INFINITE ANALYSIS INTRODUCTION

无穷分析引论

（下）

[瑞士] 欧拉 著　　张延伦 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

INFINITE ANALYSIS INTRODUCTION

无穷分析引论

（下）

[瑞士] 欧拉 著　　　张延伦 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书为微积分预备教程、为弥补初等代数对于微积分的不足，以及为学生从有穷概念向无穷概念过渡而写，读者对象是数学工作者和有一定数学基础的广大数学爱好者.本书在数学史上地位显赫，是对数学发展影响最大的七部名著之一.

图书在版编目(CIP)数据

无穷分析引论.下/(瑞士)欧拉著;张延伦译.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2013.3

ISBN 978-7-5603-4000-5

Ⅰ.①无… Ⅱ.①欧…②张… Ⅲ.①无限一数学分析一概论 Ⅳ.①O173

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 027722 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 徐 丽
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 21 字数 470 千字
版 次 2013 年 3 月第 1 版 2013 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4000-5
定 价 98.00 元

英译者序

1748 年出版时，这套书的序言只印在上册，为方便读者，英译本将原序中与下册有关的部分摘印于下册.

上册英译本受到的欢迎使笔者加紧了下册的翻译，本人很荣幸能够效力于这部著名教科书英译本的出版，希望欧拉的思想在数学界深受喜爱、广为传播.

作　者　序

接触到的学生，他们学习无穷分析之所以遇到困难，往往是由于初等代数准备不足.虽然无穷分析并不要求初等代数的全部知识和技能，但有些必备的东西，初等代数或者完全没讲，或者讲得不够详细.本书力求把这类东西讲得既充分又清楚，求得完全弥补初等代数对无穷分析的不足.书中把相当多的难点化易，使得读者逐步地、不知不觉地掌握到无穷这一思想，有很多通常归无穷分析处理的问题，本书使用了代数方法，这清楚地表明了分析与代数两种方法之间的关系.

本书分上、下两册，上册讲纯分析，下册讲必要的几何知识，这是因为无穷分析的讲解常常伴以对几何的应用.别的书中都讲的一般知识本书上、下册都不讲.本书所讲的是别处不讲，或讲得太粗的，或虽讲但所用方法完全不同的.

……

下册讨论的问题，一般地说都属于高等几何.一般教科书讲这一部分时都从圆锥曲线开始，本书先讲曲线的一般理论，再讲圆锥曲线，为的是能够应用曲线理论去研究任何一种曲线.本书利用描述曲线的方程，而且只用这种方程来研究曲线，曲线的形状和基本性质都从方程推出.我觉得这种处理方法的优越性，在圆锥曲线上表现得最突出.此前人们用几何或分析方法进行处理，都显生硬，不自然.我们先从二阶曲线的通用方程推出了二阶曲线的一般性质，接下去根据有无伸向无穷的分支，也即是否界于某个有限区域之中，对二阶线进行了分类.对于无穷分支，我们进一步考虑分支的条数，并考虑各条分支有无渐近线.这样我们得到了通常的三种圆锥曲线.第一种是椭圆，它位于一个有限区域之中；第二种是双曲线，它有四条伸向无穷的分支，趋向两条渐近线；第三种是抛物线，有两条伸向无穷的分支，没有渐近线.

接下去，对三阶线用类似的方法，阐述了其一般性质，并将它分为 16 类，事实上是把牛顿的 72 种划分成了 16 类.对这一方法我们的描述是充分的，不难用它对更高阶曲线进行分类.书中用它对四阶曲线进行了分类.

在分阶进行考察之后，我们转向了寻求曲线的共同性质，讲了曲线的切线和法线，也讲了用密切圆半径表示的曲率.这些问题现在一般都用微积分来解决，但本书只在通常代数的基础上对它们进行讨论，为的是使读者能够比较容易地从有穷分析过渡到无穷分析.我们也对曲线的拐点、尖点、二重点和多重点进行了讨论，讲了如何从方程求出这些点，求法都不难，但我不否认用微分学的方法来求更容易.我们也讲到了关于二阶尖点这个有争论的问题.二阶尖点，即有同朝向的两段弧收敛于它的尖点.我们讨论的深入程度不越出看法一致的范围.

我加写了几章,用来讨论具有某些性质的曲线的求法,最后给出了与圆有关的几个问题的解.

作为学习分析的必备知识,我们添上了一个关于曲面的附录,讲了如何用三元方程表达曲面的性质,然后照曲线那样,根据方程的阶将曲面分了类,并证明了只有一阶曲面才是平面.根据伸向无穷的部分将二阶曲面分成了六类,对更高阶的曲面也可以用类似的方法进行分类,我们通过方程对两个曲面的交线进行了讨论,交线多数都不在一个平面上.

这里申明一点,书中很多东西是别人已经得到了的,恕我没有一一指出.本书力求简短,如果加上关于问题历史的说明,那将突破本书的篇幅限制.作者可聊以自慰的是,本书对别人已经得到了的东西,其中很多是用另一种方法进行讨论的.很希望广大读者从方法新和全新的东西中,特别是从全新的东西中得到益处.

目　　录

第一章　曲线概述

§ 1

通常视变量为可以取一切值的量，因而几何上用无穷直线（这里记为 RS，图 1）表示变量. 在无穷直线 RS 上取定一个点 A，拿 A 作为 RS 上一切量的起始点，则线段 AP 的长度就是变量的一个确定的值，不同的 AP 表示变量的不同的值，整个的 RS 表示变量的一切值.

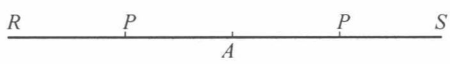

图 1

§ 2

设无穷直线 RS 表示的变量为 x，那么 RS 上的线段就可以表示 x 的每一个确定的值. 例如，取点 A 作 P，则这长度为零的线段 AP 就表示 $x=0$ 这个值，点 P 离点 A 越远，线段 AP 表示的 x 值越大.

线段 AP 的长为横标，横标表示变量 x 的确定的值.

§ 3

由于无穷直线 RS 从点 A 向左向右都伸向无穷远，所以 x 的正值负值它都可以表示. 如果取右侧的 x 为正，那么左侧的线段 AP 就表示负的 x. 事实上，点 P 离开 A 右移时线段 AP 增长，它所表示的 x 值增大，反之，点 P 左移，则 x 值减小；当点 P 与 A 重合时，x 值为零；点 P 继续左移时，x 值将小于零，为负，也即，取 A 点右侧的 AP 为正，则左侧的 AP 为负，也可以取左侧为正，那么右侧就为负.

§ 4

我们来看看，用无穷直线表示变量 x 的时候，几何上 x 的函数怎样表示. 设 y 是 x 的一个函数，那么当 x 为一个确定值时，我们得到一个确定的 y 值. 用无穷直线 RAS（图 2）表示 x 值，并假定 RS 上方的 y 值为正，RS 上的 y 值为零，RS 下方的 y 值为负，那么，对 AP 确定的每一个 x，我们引 RS 的垂线 MP，使线段 MP 等于对应的 y，当 y 值为正时，垂

线 MP 在 RS 上方，y 值为负时，PM 在 RS 下方.

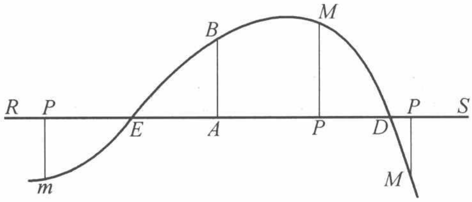

图 2

§ 5

图 2 所表示的这个函数，$x=0$ 时，$y=AB$，$x=AP$ 时，$y=PM$，$x=AD$ 时，$y=0$. $x=AP$ 时，如果 y 的值为负，则垂线 PM 在直线 RS 下方，x 为负值时类似，y 值为正，则用 RS 上方的垂线表示它，y 值为负，则用 RS 下方的垂线，例如 Pm 表示它. 如果对某个 x 值，例如 $x=AE$，函数 $y=0$，则垂线长为零.

§ 6

上述方法使 RS 上的每一个点 P 都有一个对应点 M，AP 为一个 x 值，PM 垂直于 RS，且 PM 的长等于 AP 所表示的那个 x 所对应的 y 值. 点 M 的位置：y 为正时，在 RS 上方；y 为负时，在 RS 下方；y 为零时，在 RS 上，即 P，M 重合，图 2 上，点 D 和 E 处，P 和 M 是重合的. 点 M 全体构成一条直线或曲线，这直线或曲线由函数 y 决定. x 的任何一个函数 y，我们都可以用这样的方法把它变成几何上的一条直线或曲线，这条线的性质由函数决定.

§ 7

由函数 y 我们可以确定对应曲线上的每一点，从而确定整个曲线. 曲线上对应于 P 的点 M 随 PM 的确定而确定. 我们可以这样确定曲线上的每一点. 反之，对于曲线上的每一点 M，直线 RS 上都有一个点 P 与它对应. 过曲线上点 M 引纵标，记垂足为 P，这 P 就是 M 的对应点，这线段 AP 的长就是 x，纵标 PM 的长就是 y 的值，即曲线上的点都由函数 y 确定.

§ 8

让一个点机械地连续运动，可以画出很多不同的线. 每做一次这样的运动都得到一条完整的具体的曲线. 但我们主要考虑由函数产生的曲线，这种曲线更适于解析处理，更适于微积分. x 的任何一个函数都给出一条线，直线或曲线. 反之，每条线也都决定一个

函数.可见,我们研究的任何一条曲线,其性质都由这样的一个函数确定:从曲线上任意一点M向直线RS引纵标MP,则数值等于线段AP之长的x所对应的函数值y应该为纵标MP的长.

§9

从上面对曲线的描述看得出,可将曲线分为连续的和不连续的,不连续的也称为混合的,连续曲线可以用x的一个确定的函数表示.如果曲线的不同部分,如BM,MD,DM等由不同的函数确定,比如BM部分由一个函数确定,而MD部分由另一个函数确定,等等,则称它为不连续的,或者混合的,或者不规则的.不连续曲线不由一个单一的规律构成,而是由几个连续部分合成.

§10

几何主要讲连续曲线.后面我们将证明:依某种不变规则机械地运动,这样画出的曲线都可用一个函数表示,也即都是连续曲线.设$mEBMDM$是可以用x的函数y表示的连续曲线,那么在直线RS上取定了AP表示的x,则y的值就等于纵标PM的长.

§11

在曲线的这样的定义之下,曲线方程中极常用的几个术语都可继续使用,首先称表示x的直线为轴或笛卡儿直线.

称x值的起始点为原点,称轴上表示x确定值的那一部分,即AP为横标.从横标端点P垂直于轴画到曲线的直线PM叫纵标,也称纵标为直角线,因为它与轴成直角,也可以取纵标与轴成斜角,那时的纵标也称为斜角线.只要不特别声明,我们都采用直角纵标.

§12

这样,记横标AP为x,即$AP=x$,则函数y告诉我们纵标PM的大小,即$PM=y$.连续曲线的性状都由一个函数y表示,即都由y,x和常数的一个关系式表示.轴RS上的AS部分表示正横标,AR部分表示负横标,RS上方为正纵标区域,RS下方为负纵标区域.

§13

在x的任何一个函数我们也都得到一条连续曲线,事实上,先让x取从0到∞的所

有正值,求出对应于每一个 x 的 y 值,并用纵标表示出来. y 为正时纵标在轴的上方,为负时在轴的下方. 这样我们就得到了曲线 BMM 部分. 然后让 x 取从 0 到 $-\infty$ 的所有负值,则对应的 y 值确定曲线的 BEm 部分. 两部分合起来就是函数描述的整个曲线.

§ 14

由 y 是 x 的函数知,或 y 为 x 的显函数,或 y 与 x 由一个方程相联系. 总之,每条曲线都可以由变量 x 和 y 所构成的方程表示. x 是轴上的横标,从原点 A 算起,y 是垂直于轴的纵标. 纵标横标总称为直角坐标. 因而可以说曲线的性质由坐标方程决定.

§ 15

这样我们就把对曲线的研究归结成了对函数的研究. 因而可以根据函数对曲线进行分类. 曲线也首先分为代数的和超越的,纵标 y 是横标 x 的代数函数时,曲线是代数的,也即曲线的性质由坐标 x 和 y 的代数方程表示的时候,称它为代数曲线. x 和 y 构成超越方程,或者 y 是 x 的超越函数,这时的曲线叫超越曲线. 这样我们就把曲线分成了代数的和超越的两大类.

§ 16

从 x 得 y,从 y 得曲线,因而为了考察曲线,我们应该考虑这函数是单值的还是多值的. 先假定 y 是 x 的单值函数,也即 $y=P$,P 是 x 的某个单值函数. 这样对每一个确定的 x 值我们都得到一个确定的 y 值,也即每一个横标都对应于一个纵标. 从而得到曲线的形状是:对轴 RS 上的任意一点 P,过 P 垂直于 RS 的直线 PM 都与曲线相交,并且只交于一点 M. 这样一来,轴上的每一点都对应曲线上一点,而轴两面伸向无穷,所以曲线也两面伸向无穷. 换句话说,从单值函数得到的曲线,随 x 轴两面无间断地伸向无穷,图 2 所示曲线 $EBMDM$ 就是两面无间断地伸向无穷的.

§ 17

设 y 为 x 的二值函数,或者 P,Q 表示 x 的单值函数,$y^2=2Py-Q$,从而 $y=\pm\sqrt{P^2-Q}$,那么每一个横标 x 将对应两个纵标 y. 这两个纵标,或者同为实数,或者同为虚数. $P^2>Q$ 时同为实数,$P^2<Q$ 时同为虚数,因而当两个 y 值都为实数时,横标 AP 对应两个纵标 PM,PM,也即过点 P 与轴垂直的直线交曲线于 M 和 M 两点. 如果 $P^2<Q$,则没有纵标与横标对应,也即过点 P 垂直于横轴的直线同曲线不相交. 图 3 上点 P 处就是这样. 由于从 $P^2>Q$ 不能越过实与虚的衔接点 $P^2=Q$ 变为 $P^2<Q$,因而在实纵标结束点处,如 C 和 G,必有 $y=P\pm 0$,也即两个纵标相等,曲线向相反的两个方向弯曲.

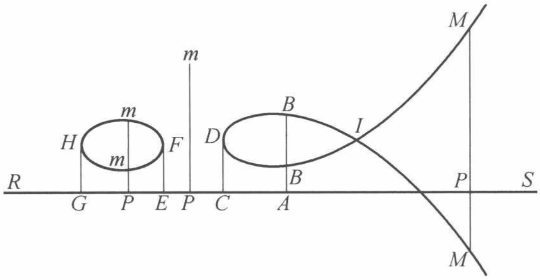

图 3

§ 18

从图 3 上我们看到，当负的横标 $-x$ 在 AC 和 AE 之间时，纵标是虚的，此时 $P^2<Q$. 如果点 E 继续左移，纵标将重新变为实数(但不能越过使 $Q^2=P$ 的点 E，点 E 处两个纵标相等)，又重新是横标 AP 对应两个纵标 Pm 和 Pm，到 G 又两个纵标相等，过 G 纵标再次变为虚数. 可见这种曲线是由彼此分离的两部分，如 $MBDBM$ 和 $FmHm$ 或更多部分组成. 但是应该认为作为总体来研究的这几部分共同构成一条连续的或规则的曲线，因为不同部分产生于同一个函数. 可见这种曲线具有如下的性质：过横轴上一点引垂直于横轴的直线 MM，则 MM 与曲线或者不相交，或者相交于两点，两点重合处，如 D，F，H 和 I 处例外.

§ 19

如果 y 是 x 的三值函数，也即如果 y 由状如

$$y^3-Py^2+Qy-R=0$$

的方程决定，其中 P，Q，R 是 x 的单值函数，那么对每一个横标 x，纵标 y 将有三个值. 这三个值或者全实，或者一实两虚. 因此这纵标线与曲线必定或者相交于三点，或者只相交于一点，两点重合处例外. 可见每一个横标至少对应于一个实纵标，这意味着曲线随 x 轴一起向两面无穷延伸，因而这曲线或者由一根连续曲线构成，如图 4，或者由分离的两部分构成，如图 5，或者由更多部分构成.

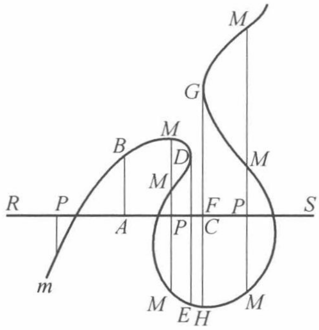

图 4

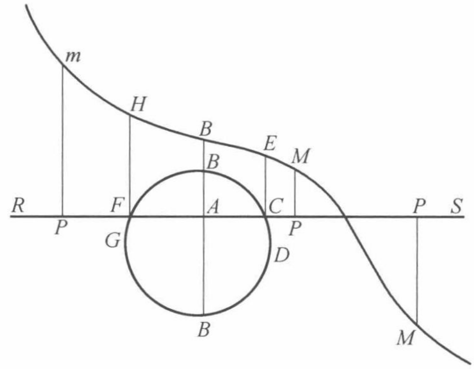

图 5

§ 20

如果 y 是 x 的四值函数,也即如果 y 由方程

$$y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = 0$$

确定,那么每一个 x 值所对应的实 y 值,都或者为 4 个,或者为 2 个,或者为 0 个,因而,纵标与这种函数所形成的曲线的交点个数,或为 4,或为 2,或为 0. 这几种情形图 6 上都有. 应该指出 I 和 O 两处,那里两个交点重合,可见向左向右至无穷这曲线的分支个数都或为 0,或为 2,或为 4. 分支个数为 0 时,曲线的向左向右部分都不产生伸向无穷的分支,曲线两面都封闭,被局限在某个区域之内,值数更多的函数,其曲线的性质都可以用这种方法进行讨论.

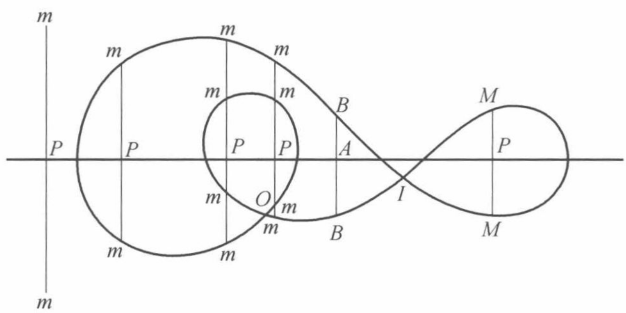

图 6

§ 21

当 y 为 n 值函数,即 y 由最高次数为 n 的方程确定时,y 的实值个数或为 n,或为 $n-2$,或为 $n-4$,或为 $n-6$,等等. 纵标线与曲线的交点个数同于 y 的实值个数. 这样一来,如果一根纵标线与连续曲线的交点个数为 m,那么任一纵标线与这条曲线的交点个数同 m 的差都为偶数. 即此时纵标线与曲线交点的个数不能是 $m+1$, $m-1$ 或 $m \pm 3$,等等. 纵

标线与同一曲线的交点个数必定同为奇数或同为偶数. 也即知道了一根纵标线与曲线交点个数的奇偶,也就知道了全体纵标线与曲线交点个数的奇偶.

§ 22

这样,如果一根纵标线与曲线的交点个数为奇数,那么就不存在与该曲线无交点的纵标线,即曲线在每一面都至少有一条伸向无穷的分支,如果这时在某一面有多条伸向无穷的分支,那么这分支条数也必为奇数,因为这时纵标线与曲线的交点个数不能为偶数. 这时两面伸向无穷的分支条数的和为偶数. 当纵标线与曲线交点个数为偶数时,每面伸向无穷的分支数,或为 0,或为 2,或为 4,等等. 两面伸向无穷的分支数的和也为偶数.

以上我们介绍了连续的规则曲线的重要性质,可用来区别间断的不规则曲线.

第二章 坐标变换

§ 23

给定一个关于坐标 x,y 的方程,那么取一条直线 RS 作轴,并在 RS 上取一个点 A 作原点,我们就可以像图 2 那样把这个方程描述的曲线画出来. 反之,有了画出的曲线,我们就可以列出描述这曲线性质的坐标方程. 但是列这个方程时有两个东西是随意的:RS 本身的位置和原点 A 在 RS 上的位置. 位置有无穷多种取法,因而对应于这同一条曲线的方程也就有无穷多个. 可见方程不同,曲线不一定不同,但曲线不同,方程一定不同.

§ 24

改变轴的位置,改变原点在轴上的位置,都可以得到描述同一条曲线性质的无穷多个方程. 这些方程是相联系的,由其中任何一个都可以推出其他. 事实上,当坐标方程已知,它所描述的曲线已经画出时,任取一条直线作轴,在取定的轴上任取一点作原点,我们都可以推出曲线对所取轴的坐标方程. 本章我们讲从一条曲线的一个方程求这条曲线关于另一个轴、另一个原点的另一个方程的方法. 用这种方法可以求出一条曲线的所有方程. 这种方法还可用来判断不同方程所给曲线是否相同.

§ 25

给定一个 x,y 的方程,如图 7,取直线 RS 作轴,取点 A 作原点,用 x 表示横标 AP,用 y 表示纵标 PM,那么根据方程我们就可以画出它所描述的曲线 CBM. 先保持轴 RS 不变,取 RS 上异于 A 的点 D 作原点,记点 M 在新原点下的横标 DP 为 t,纵标 PM 依旧为 y 不变,现在我们要进行的是,求出曲线 CBM 关于 t,y 的方程. 记线段 $AD=f$,这里的 D 在 A 点左侧,AD 在原来的负横标区,$DP=t=f+x$,从而 $x=t-f$,以 $t-f$ 替换关于 x,y 的方程中的 x,我们就得到描述同一条曲线 CBM 的关于 t,y 的方程. 由于 $AD=f$ 可以任取,所以我们已经得到了无穷多个方程,它们都描述同一条曲线.

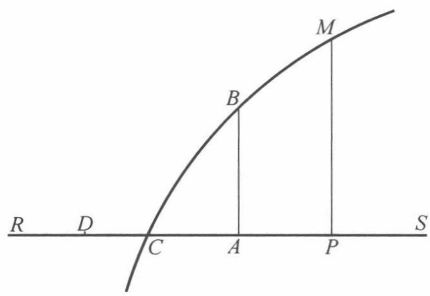

图 7

§ 26

设曲线交轴 RS 于某一点，比如 C，如果取这个点 C 作原点，则横标 $CP=0$ 时，纵标也为 0，当然这里假定点 C 只对应一个纵标，曲线与轴的交点，包括点 C，都可以从曲线的方程求得，方法是：置曲线方程中的 y 为 0，得 x 的方程，这 x 的方程的解就是曲线与轴的交点，曲线与轴相交处 y 为 0，因而令 $y=0$，解方程就得到曲线与轴的所有交点.

§ 27

加大或减小横标 x，也即以 $x-f$ 替换 x，则原点移动，新的原点 D 在 A 点左侧时 f 为正，在点 A 右侧时 f 为负.

记 $AP=x$，$PM=y$，则方程给出的曲线为 LBM（图 8）. 原点左移之后，我们再将轴平行下移，取平行于原轴 RS 的 rs 为新轴，取新轴 rs 上的点 D 为新原点，新轴在原纵标的负值区域中，与原轴的距离 $AF=g$，取 $DF=AG=f$，记新轴时曲线上点 M 的横标 $DQ=t$，纵标 $QM=u$，则

$$t=DF+FQ=f+x,\quad u=PM+PQ=y+g$$

从而

$$x=t-f,\quad y=u-g$$

将所给方程中的 x 和 y 换为 $t-f$ 和 $u-g$，得到关于 t,u 的方程，它描述的也是所给曲线.

§ 28

f,g 都任取，取法都无穷，因而不同方程的个数比只移动原点又多一层无穷，它们描述的全都是同一条曲线. 我们看到，两个方程，一个是关于 x,y 的，一个是关于 t,u 的，它们虽然不同，但一个是另一个坐标增大、减小的结果. 这样的两个方程描述的曲线是同一条，用这样的方法可以得到描述同一条曲线的无穷多个不同方程.

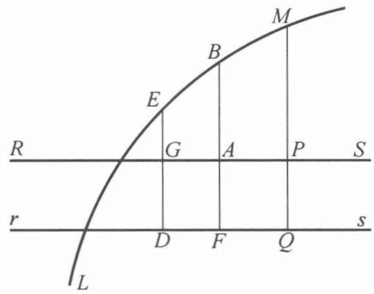

图 8

§ 29

使新轴 rs 与旧轴 RS 交于原点 A，且相垂直，即新旧轴相垂直，且原点重合(图 9). 轴为 RS 时，曲线 LM 的方程是关于横标 $AP=x$ 和纵标 $PM=y$ 的. 从曲线上的点 M 向新轴 rs 引垂线 MQ，记新横标 $AQ=t$，新纵标 $QM=u$，由 $APMQ$ 为矩形，得 $t=y,u=x$. 这样，将原方程中的 x 换成 u，y 换成 t，就得到关于 u 和 t 的方程，也即原来的横标 x 变成了现在的纵标 $QM=u$，原来的纵标 y 变成了现在的横标 $AQ=t$. 换成新轴，方程不变，只是横标纵标互换，而纵标横标统称为坐标，可以不加区别，不指明谁纵谁横，给定一个 x,y 的方程，取 x 还是取 y 为横标，曲线是一样的.

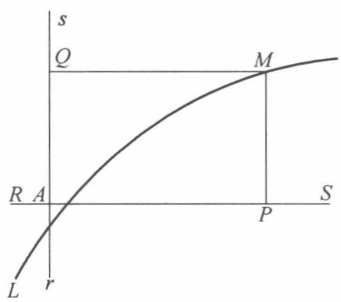

图 9

§ 30

上节我们假定新轴 rs 的 As 部分为正横标，轴 rs 的右侧为正纵标区域，这正负的选择是任意的，如果取轴的 Ar 部分为正横标，则 $AQ=-t$，应该用 $-t$ 代替 x,y 方程中的 y. 继而，如果取 rs 轴的右侧为负纵标区，则应该用 $-u$ 代替 x. 可见，坐标方程中的一个或两个坐标都变成负的，曲线的性质不变. 请注意，对方程的所有变换都是这样.