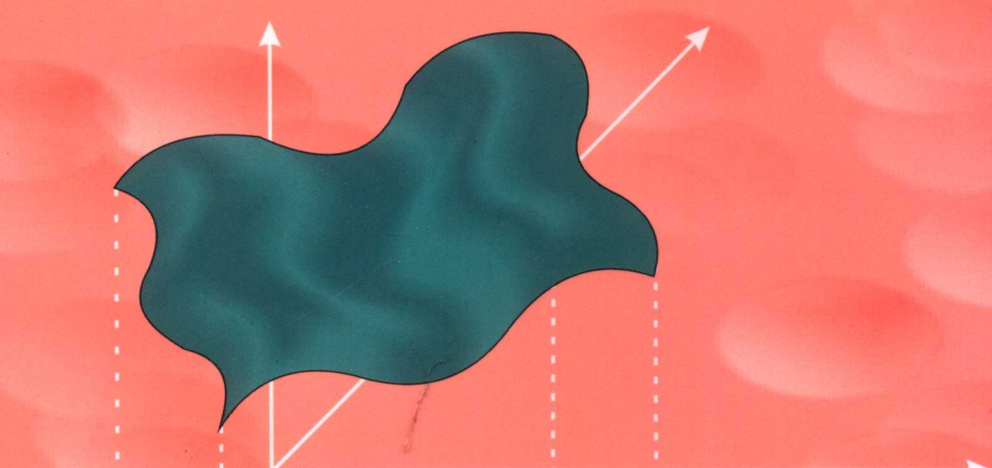
网络继续教育课程学习指导丛书·公共基础课程系列

GAODENG SHUXUE

高等数学

学习与考试指导（下）

韩 华 主编



武汉理工大学出版社
WUTP Wuhan University of Technology Press

网络继续教育课程学习指导丛书·公共基础课程系列

高等数学
学习与考试指导（下）

（第2版）

主　编　韩　华

武汉理工大学出版社
·武　汉·

内 容 提 要

本书是根据编者多年进行远程教育和教学研究的经验，针对远程教育的教与学精心设计的学习指导书。

本书分上下两册。下册包括定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、微分方程和无穷级数。每章包括学习指导、学习内容、释疑解难和基础练习及参考答案，其中学习内容包括要点归纳、典型例题、本节小结和思考及解答。附录包括课程教学及考试大纲、模拟试卷及解答和历年试卷及解答。

本书可供远程教育的工科类专科学生使用，也可供学习高等数学课程的读者作为学习辅导书和考试复习书使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习与考试指导：全2册/韩华主编. —2版.—武汉：武汉理工大学出版社，2012.12

ISBN 978-7-5629-3931-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①韩… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第318877号

项目负责人：徐 扬 陈军东　　**责任编辑**：陈军东
责 任 校 对：彭佳佳　　**装帧设计**：董君承
出 版 发 行：武汉理工大学出版社
武汉市洪山区珞狮路122号 邮编：430070
http://www.techbook.com.cn
印 刷 者：武汉理工大印刷厂
经 销 者：各地新华书店
开 本：787×1092 1/16
印 张：29.25
字 数：748千字
版 次：2013年1月第2版
印 次：2013年1月第2版第1次印刷
定 价：64.00元(上、下册)

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请向出版社发行部调换。
本社购书热线：(027)87785758 87391631 87165708(传真)

出版说明

在产业结构转型升级的新时期，我国各行各业迫切需要大量的人才，尤其是高素质应用型人才。现代远程教育（网络继续教育）为合理利用现代教育技术手段，充分发挥优质教育资源的作用提供了有效的途径。网络继续教育是针对在职人员开展的教育学习活动，而基于现代网络技术和信息技术的网络教育自1999年以来得到了空前的发展，已经为我国经济社会发展培养了千千万万应用型人才。网络继续教育是我国高等教育的重要组成部分，在建设学习型社会、构建我国终身教育体系中有着不可替代的作用。《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010—2020年）》也明确提出："大力发展现代远程教育，建设以卫星、电视和互联网等为载体的远程开放继续教育及公共服务平台，为学习者提供方便、灵活、个性化的学习条件。"

网络教育经过十余年的发展，已经形成了较为独特的有别于学校教育的教学模式，网络教育的教学方式已经广泛应用于函授教育教学中。网络继续教育教学的主体——学习者是不同的。参加网络继续教育的学员，其专业基础、文化素质、学习时间、学习习惯和学习环境都存在较大的差异，教学活动的组织也无法做到完全统一；并且网络教育的学习者主要是利用业余时间进行自主学习。网络继续教育教学的客体——知识技能也与学校教育有较大的区别。学校教育的知识内容体系包含三大类——公共基础课、专业基础课和专业课。公共基础课主要教授高等教育的基本知识，网络成人教育新模式的公共基础课不是按照全日制模式来做，而是根据在职人员的特点来构建理论体系；专业基础课强调把学校的培养体系和企业实际应用的知识体系有机地结合起来，虽然这样的专业基础课和传统的学历教育一样按知识点来构造，但不仅是以够用为准，更关键的是在保证高等教育知识体系的前提下，更多地融入实际工作和行业需要的知识与技能；而对于专业课，鉴于高等教育的教材往往严重滞后于行业技术和行业发展需要的现状，网络继续教育新模式凸显融入社会，跟踪行业实际运行过程中正在应用的技术和设备，更多地引入一些最新的技术和知识。

教材作为教学内容的重要载体，直接联系教学活动的主体与客体。教材体系的构建必须既符合教学主体的学习和认知规律，又遵循教学客体的内在逻辑规律，有利于教学活动的组织、教学内容的传授。网络继续教育的教材还应该符合网络继续教育的特点和规律。在武汉理工大学网络继续教育学院的大力支持下，我们对网络继续教育教学特点和规律进行了认真的研究，于2009年开始组织武汉理工大学网络继续教育课程的部分优秀主讲教师进行网络继续教育教材体系的建设，并于2010年起推出网络继续教育公共基础课程的教材，包括高等数学、微积分、工程数学、大学英语以及马克思主义基本原理、毛泽东思想概论与中国特色社会主义理论体系概论等；2011年推出工程管理、工商管理等重点专业的教学资源包；2013年起将陆续推出部分专业基础课程的学习指导书。这套教材本着适应在职人员学习的特点，按照"脉络梳理，释疑解难，模拟训练，历年真题"的风格进行编写，对网络继续教育的各科基础课程的内容体系进行了简明扼要的梳理，对学习过程中存在的重点难点问题

进行了透彻的解析。各书中设有丰富的例题和附有答案的习题，书后附有精心设计的模拟训练试卷及武汉理工大学网络学院历年考试真题及详细解答。

我们将长期探索网络继续教育的教学规律，密切关注网络继续教育的发展趋势，继续完善和建设好网络继续教育的教材体系。我们也诚恳地希望各大高校的网络继续教育学院、各类教学站点在教学活动中引进这个体系，并在使用过程中提出改进的意见。希望我们共同努力，为网络继续教育事业的进一步发展做出贡献。

武汉理工大学出版社
2012年12月

前　　言

《高等数学学习与考试指导》是针对远程教育的工科类专科学生的教与学精心设计的学习指导书。编者根据多年进行远程教育和教学研究的经验，本着由简到繁、通俗易懂、适于远程教育和自主学习的指导思想编写此书。编写时，紧扣教学大纲要求，注重基本知识的系统讲解、典型方法的全面训练，强调对基本概念、定理、结论的理解与应用。

全书分上、下两册，全部内容共分为十一章和五个附录。每章均由四部分构成。

第一部分是学习指导，包括章节学习的重点、难点、常见题型及学习方法指导。

第二部分是学习内容，分节展开写。每一节包含要点归纳、典型例题、本节小结和思考解答。其中要点归纳是对教学重点内容进行简明扼要的归纳和说明，对难点知识进行直观通俗的解释；典型例题注重对解题思路进行指导，强调基本题型的分析和解题过程的指点；本节小结是以提纲的形式提炼本节的知识点，方便学生巩固复习；思考解答是在掌握基本知识和基本题型的基础上提供进一步思考的内容，以便学生增强分析问题的能力和解题能力。加“*”的章节，不作为必须掌握的知识，可根据具体的情况学习。

加“*”的章节，不作为必须掌握的知识，可根据具体的情况安排学习。

第三部分是释疑解难。针对学生学习过程中有关概念、定理理解存在的困惑和解题过程中的难点问题有针对性地给出解释。

第四部分是基础练习。按照与例题对应、解法相同的原则挑选基础习题并且给出详细的解答。

附录包含课程教学及考试大纲、模拟试卷及解答和近几年武汉理工大学网络学院统考试卷和解答。

全书设计内容全面、重点突出，知识结构与教学录像对应，其中每章的第一部分和第二部分都由编者进行了视频讲解，方便学生自学。本书是下册。下册主要内容包括定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、微分方程和无穷级数等内容。供高等数学课程第二学期使用，也可供学习高等数学的读者作为学习辅导书和考试复习书使用。

目　录

第 6 章 定积分及其应用

Chapter 6

学习指导

本章在第 5 章的基础上讨论微积分学的另一个基本问题——定积分及其应用.包含定积分的定义及其性质,积分上限函数的定义及其导数,牛顿—莱布尼兹公式,定积分的换元法和分部积分法,广义积分的概念,定积分在几何学中的应用(面积、旋转体体积、平行截面面积已知的立体的体积)和定积分在物理学中的应用(路程、功、水压力、引力).在学习定积分概念时要注意理解引例,体会四步法的合理性.定积分的计算问题本是一个复杂的极限计算问题,但是借助于牛顿一莱布尼兹公式,便转化为较为简单的求原函数和代值计算问题.注意定积分的换元法要对积分变量、被积函数和积分区间三部分同时换.定积分的应用主要掌握"微元法"的思想,利用微元法解决简单的几何与物理问题.

学习重点:定积分的计算,定积分的几何应用.

学习难点:广义积分,定积分的物理应用.

常见题型:分段函数的定积分,利用定积分换元法求值,利用定积分分部积分法求值,广义积分的计算,变限函数的导数计算,平面图形的面积计算,旋转体的体积和定积分的物理应用.

6.1 定积分的概念

6.1.1 要点归纳

6.1.1.1 问题的提出

引例 1 求曲边梯形的面积

曲边梯形由连续曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$、x 轴与两条直线 $x=a$、$x=b$ 所围成.

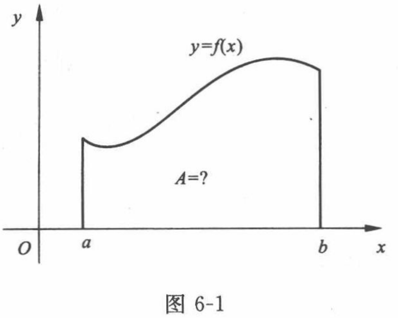


图 6-1

曲边梯形如图 6-1 所示,在区间$[a,b]$内插入

若干个分点,$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,把区间$[a,b]$分成 n 个小区间$[x_{i-1},x_i]$,长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$;在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i,以$[x_{i-1},x_i]$为底,$f(\xi_i)$为高的小矩形面积为 $A_i=f(\xi_i)\Delta x_i$.

曲边梯形面积的近似值为

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}A_i=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

当分割无限加细,即小区间的最大长度 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$趋近于零($\lambda\to0$)时,曲边梯形面积为 $A=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.

引例 2 求变速直线运动的路程

设某物体作直线运动,已知速度 $v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上 t 的一个连续函数,且 $v(t)\geqslant0$,求物体在这段时间内所经过的路程 s.

思路:把整段时间分割成若干小段,每小段上速度看作不变,求出各小段的路程再相加,便得到路程的近似值,最后通过对时间的无限细分过程求得路程的精确值.

(1)分割 $T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots t_{n-1}<t_n=T_2$

$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$

(2)近似 $\Delta s_i\approx v(\tau_i)\Delta t_i,\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$

(3)求和 $s\approx\sum\limits_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$

(4)取极限,得

路程的精确值 $s=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$ (其中 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$).

引例 3 收益问题

设某商品的价格 p 是销售量 x 的函数 $p=p(x)$. 求当销售量从 a 变到 b 时的收益 R 为多少?

思路:把整个销售量段分割成若干小段,每小段上价格看作不变,求出各小段的收益再相加,便得到整个收益的近似值,最后通过对销售量的无限细分过程求得收益的精确值.

(1)分割 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$;

(2)近似 $\Delta R_i\approx p(\tau_i)\Delta x_i,\tau_i\in[x_{i-1},x_i]$;

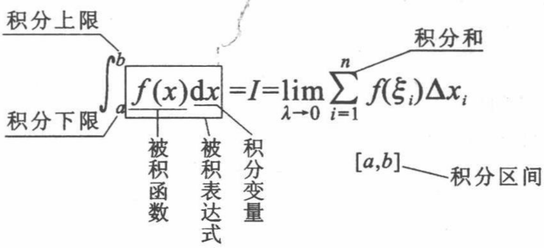
(3)求和 $R\approx\sum\limits_{i=1}^{n}p(\tau_i)\Delta x_i$;

(4)取极限,得收益的精确值 $R=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}p(\tau_i)\Delta x_i$ (其中 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$).

6.1.1.2 定积分的定义

设函数 $f(x)$在$[a,b]$上有界,在$[a,b]$中任意插入若干个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 把区间$[a,b]$分成 n 个小区间,各小区间的长度依次为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$($i=1,2,\cdots,n$),在各小区间上任取一点 ξ_i($\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$),作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$($i=1,2,\cdots,n$),并作和 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$,记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$,如果不论对$[a,b]$怎样的

分法，也不论在小区间$[x_{i-1},x_i]$上点 ξ_i 怎样的取法，只要当 $\lambda\to 0$ 时，和 S 总趋于确定的极限 I，我们称这个极限 I 为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的**定积分**，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.



注意：

(1)积分值仅与被积函数及积分区间有关，而与积分变量的字母无关．

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

(2)定义中区间的分法和 ξ_i 的取法是任意的．

(3)当函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在时，称 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积．

对定积分的补充规定：

(1)当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$；

(2)当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

6.1.1.3　定积分存在定理

定理 1　若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

定理 2　若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

6.1.1.4　定积分的几何意义

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示介于 x 轴、曲线 $y=f(x)$及两条直线 $x=a$、$x=b$ 之间的各部分面积的代数和．在 x 轴上方的面积取正号，在 x 轴下方的面积取负号.

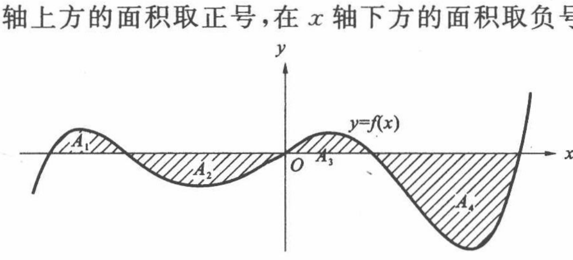


图 6-2

如图 6-2，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$.

6.1.2 典型例题

例 1 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

指导:因为被积函数 $y=x^2$ 在积分区间$[0,1]$连续,由定积分存在定理知定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 存在. 又定积分定义中指出,对于区间的任意分法和 ξ_i 的任意取法,和式的极限值都存在且相等,故在判定定积分存在的基础上,利用定义计算定积分时,可以采取特殊的分法和特殊的取法,以便于极限值的计算. 而特殊的分法和特殊的取法往往是对区间进行 n 等分,ξ_i 取左端点或右端点.

解:将$[0,1]$ n 等分,分点为 $x_i=\dfrac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度 $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

取 $\xi_i=x_i(i=1,2,\cdots,n)$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2\Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2\Delta x_i = \sum_{i=1}^n\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\ &=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \xi_i^2\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

例 2 利用定积分的几何意义计算定积分 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

指导:定积分从几何图形上看等于介于 x 轴、曲线 $y=f(x)$及两条直线 $x=a$、$x=b$ 之间的各部分面积的代数和. 其中,在 x 轴上方的面积取正号,在 x 轴下方的面积取负号.

解:由图 6-3 知,定积分 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 表示四分之一圆的面积,故其值为$\dfrac{\pi}{4}$.

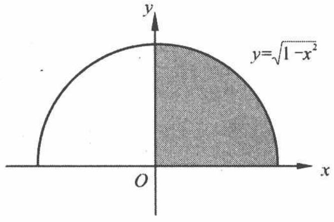


图 6-3

□ 本节小结

1. 定积分的实质:特殊形式的极限;
2. 定积分的思想和方法(图 6-4);

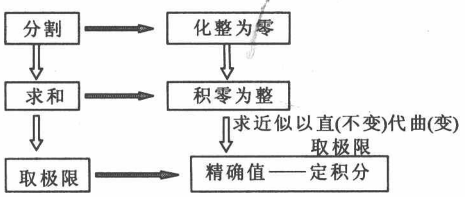


图 6-4

3. 定积分的存在定理；

4. 定积分的几何意义：面积的代数和．

□ 思考及解答

思考 1：将和式极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$表示成定积分．

解答：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{i\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x.$$

思考 2：设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续，且取正值．

试证：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}$．

证明：利用对数的性质得
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\ln\left[\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}\right]}$$

根限运算与对数运算换序得
$$\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}}$$

指数上可理解为：$\ln f(x)$在$[0,1]$区间上的一个积分和．分割是将$[0,1]n$ 等分，点为 $\xi_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$．因为 $f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且 $f(x)>0$，所以$\ln f(x)$在$[0,1]$上有意义且可积，
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}.$$

6.2　定积分的性质

6.2.1　要点归纳

性质 1　$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$．

性质 2　$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　（k 为常数）．

性质 3　$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$（定积分对于积分区间具有可加性）．

性质 4　$\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x=b-a$.

性质 5 如果在区间$[a,b]$上 $f(x)\geqslant 0$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0(a<b)$.

性质 5 的推论:

(1)如果在区间$[a,b]$上 $f(x)\leqslant g(x)$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\quad(a<b)$;

(2) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x(a<b)$.

性质 6 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值及最小值,则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).$$

证:$\because m\leqslant f(x)\leqslant M$,

$\therefore\int_a^b m\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M\mathrm{d}x$,

$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$.

注:此性质可用于估计积分值的大致范围.

性质 7 定积分中值定理

如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则在积分区间$[a,b]$上至少存在一点 ξ,使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)\quad(a\leqslant\xi\leqslant b)$$

证:$\because m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$

$\therefore m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$

由闭区间上连续函数的介值定理知,在区间$[a,b]$上至少存在一个点 ξ,使$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)\quad(a\leqslant\xi\leqslant b).$$

积分中值公式的几何解释:

在区间$[a,b]$上至少存在一个点 ξ,使得以区间$[a,b]$为底边,以曲线 $y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为 $f(\xi)$的矩形的面积(图 6-5).

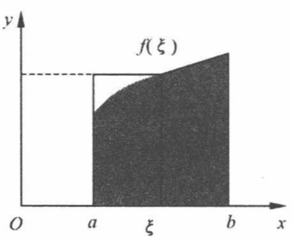


图 6-5

6.2.2 典型例题

例 1 比较积分值$\int_0^{-2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$和$\int_0^{-2}x\mathrm{d}x$的大小.

指导:利用性质 5 的推论,通过比较被积函数在相应区间上的大小判定定积分的大小. 注意推论中的定积分的上下限分别为区间的右端点和左端点,即上限大于下限. 此题利用推论判定后,就要再利用性质交换积分上下限的位置,从而定积分符号改变,判定结果相应改变.

解:令 $f(x)=\mathrm{e}^x-x,x\in[-2,0]$

$\because f(x)>0$,

$\therefore \int_{-2}^{0}(e^x - x)dx > 0$，

$\therefore \int_{-2}^{0} e^x dx > \int_{-2}^{0} x dx$

于是 $\int_{0}^{-2} e^x dx < \int_{0}^{-2} x dx$.

例 2 估计积分 $\int_{0}^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x} dx$ 的值.

指导:利用性质 6,计算出被积函数 $f(x)=\frac{1}{3+\sin^3 x}$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的最大值 M 及最小值 m,则 $m(b-a) \leqslant \int_{a}^{b} f(x)dx \leqslant M(b-a)$.

解:$f(x)=\frac{1}{3+\sin^3 x}, x\in[0,\pi]$,

$\because 0\leqslant \sin^3 x \leqslant 1, \therefore \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{3+\sin^3 x} \leqslant \frac{1}{3}$,

$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{4} dx \leqslant \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x} dx \leqslant \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3} dx$,

$\therefore \frac{\pi}{4} \leqslant \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x} dx \leqslant \frac{\pi}{3}$.

例 3 估计积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ 的值 .

指导:被积函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 单调减少,则在左端点取得最大值,右端点取得最小值.

解:$f(x)=\frac{\sin x}{x}, x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0, \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$

故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减少. $x=\frac{\pi}{4}$ 为最大值点, $x=\frac{\pi}{2}$ 为最小值点.

即 $M=f(\frac{\pi}{4})=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}, m=f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$,

$\because b-a=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}, \therefore \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}$,

$\therefore \frac{1}{2} \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1} x^2 e^{-x^2} dx$.

指导:首先利用定积分中值定理去掉积分号,再利用函数极限与数列极限的关系进行恒等变形,变形之后借助洛必达法则可求.

解:由积分中值定理知,存在 $\xi\in[x,x+1]$,使

$$\int_{x}^{x+1} x^2 e^{-x^2} dx = \xi^2 e^{-\xi^2}(x+1-x) = \xi^2 e^{-\xi^2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}x^2e^{-x^2}dx=\lim\limits_{\xi\to+\infty}\xi^2e^{-\xi^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{x^2}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(e^{x^2})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{e^{x^2}\cdot(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0.$$

例 5 设 $f(x)$ 可导,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$,求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}t\sin\dfrac{3}{t}f(t)dt$.

指导:运用定积分中值定理去掉积分号,化简表达式;再借助重要极限、数列极限与函数极限的关系可求.

解:由积分中值定理知,存在 $\xi\in[x,x+2]$,使

$$\int_x^{x+2}t\sin\frac{3}{t}f(t)dt=\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)(x+2-x)=2\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi),$$

所以,$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}t\sin\dfrac{3}{t}f(t)dt=2\lim\limits_{\xi\to+\infty}\left[\xi\sin\dfrac{3}{\xi}f(\xi)\right]$

$$=6\lim_{\xi\to+\infty}\left[\frac{\sin\frac{3}{\xi}}{\frac{3}{\xi}}\cdot f(\xi)\right]$$

$$=6\lim_{\xi\to+\infty}f(\xi)=6\lim_{x\to+\infty}f(x)=6.$$

□ 本节小结

1. 定积分的性质(注意估值性质、积分中值定理的应用).
2. 典型问题:
(1)估计积分值;
(2)不计算定积分比较积分大小.

□ 思考及解答

思考:定积分性质中指出,若 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积,则 $f(x)+g(x)$ 或 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积.这一性质之逆成立吗?为什么?

解答:由 $f(x)+g(x)$ 或 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,不能断言 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积.例如,$f(x)=\begin{cases}1 & x\text{ 为有理数}\\0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}0 & x\text{ 为有理数}\\1 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$.

显然 $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积,但 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上都不可积.

6.3 积分上限函数

6.3.1 要点归纳

6.3.1.1 积分上限函数定义

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,并且设 x 为 $[a,b]$ 上的一点,考查定积分

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t .$$

如果上限 x 在区间$[a,b]$上任意变动,则对于每一个取定的 x 值,定积分有一个对应值,所以它在$[a,b]$上定义了一个函数,记为 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,称为积分上限函数.

6.3.1.2　积分上限函数性质

定理 1　如果 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上具有导数,且它的导数是 $\Phi'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$.

证:$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t$

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t ,$$

由积分中值定理得:

$\Delta\Phi=f(\xi)\Delta x$,$\xi$ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间,$\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(\xi)$,$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\xi)$,

$\Delta x\to 0$,$\xi\to x$,$\therefore \Phi'(x)=f(x)$.

进一步的结论　假设 $f(t)$连续,$a(x)$、$b(x)$可导,则

(1)$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t=f[b(x)]b'(x)$;

(2)$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b} f(t)\mathrm{d}t=-f[a(x)]a'(x)$;

(3)$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$.

证(3):$F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t=\int_{a(x)}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{a(x)} f(t)\mathrm{d}t,$$

故 $F'(x)=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$.

定理 2　原函数存在定理

如果 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就是 $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

定理的重要意义:

(1)肯定了连续函数的原函数是存在的;

(2)初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.

6.3.2　典型例题

例 1　求下列函数的导数: