

几何学问题解答卷

漢譯舒塞斯

(立體)

幾何學問題解答

譯述者霍宏基

人文書店出版

1933

三S立體幾何學問題解答

每冊定價大洋七角

版權
所有



民國二十二年九月再版

代銷處
各埠
大書局

分發行所

上海英租界三馬路佩文齋

宜內大街

北平

青雲閣

佩文齋

東安市場

天津法租界二十四號路佩文齋

發行者

人

文

書

店

北平宣內大街中間路東

電話南局一三九六

譯述者

霍

宏

基

原著者

Schultze-Sevenoak-Schlyler.

例 言

1. 本書譯文內所標之頁數及節數係指英文三 S 立體幾何學及與英文原本頁數相符之譯本而言。
 2. 本書可供學者參攷及自修之用。
 3. 本書譯時曾參攷下列各書；李耀春譯舒塞斯立體幾何學，溫氏立體幾何學，何崇禮立體幾何學特此聲明誌謝。
- 譯者識

三S幾何學問題解答

(立體部)

第 2 頁

習題 1. 攝影者之像匣或測量者之轉鏡儀 (transit) 皆支以三足架，何故？

(解) 三點能定一平面，若有不在一平面上三個以上之足則不穩定。

習題 2: 不在一平面上之四點能定幾個平面？

(解) 1, 2, 3, 4 四點按下列排列法能定四個平面。
(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)。

第 3 頁

習題 1. 若一平面交兩平行面之一，則亦必交他一平面。

(解) 設 AB 及 CD 兩面平行，且第三平面 EF 與平面 AB 交於 GH 線，作第四平面 RS 使通過 GH 上之 K 點及 CD 平面上之 M 點，假設 EF 平面與 CD 平面平行，則 RS 平面將截 AB, EF 兩平面於兩交線，此兩交線平行於 RS 及 CD 兩平面之交線 (§486)。此為不可能。

習題 2. 若一線交兩平行面之一，則亦必交他一平面。

(解). 設 AB 線交 MN 面, 而 MN 平行 RS 面.

作一平面 PQ 使過 AB 線及 RS 平面上之一點.

餘證與習題一同.

習題 3. 在教室內舉例證明命題 2.

(解) 地板與諸牆, 等等.

習題 4. 命題 2 圖內, 若 $AC \parallel BD$, 証 $AB=CD$.

(解) $AB \parallel CD$ (§486) $ABCD$ 爲一 \square , $\therefore AB=CD$.

第 4 頁

習題. 求作一平面, 使平行於一已知直線, 且通過二已知點.

(解) 連已知兩點. 過兩點之一作一線平行於已知線. 兩交線能定所求之平面.

第 6 頁

習題 1. 若三平面在一截線上截相等線段, 則在任何截線上截相等線段.

(解) 直接自 (§495) 知之.

習題 2. 在命題 5 圖形, 若 $BC=5$, $AD=15$, $DE=4$, 求 EF .

(解) $BG : AD = CG : CD = ED : EF : FD$.

$$\therefore 5 : 15 = x : x + 4, 15x - 5x = 20 \therefore x = 2.$$

第 7 頁

習題. 若 AB 線平行於 P 平面, 且平行於他線 CD ,
則平面 $P \parallel CD$.

(解) 通一平面過 AB 與 P 面交於 XY 線. $AB \parallel XY$
(§492). $\therefore CD \parallel XY$ (§497), $CD \parallel$ 平面 P
(§488).

第 10 頁

習題 1. 在命題 VIII 圖形內, 求出 CD 之長, 若
 $AD=5$, $AB=4$, $BC=5$, $\angle CBD=120^\circ$, 及
 $AB \perp MN$ 平面.

(解) $BD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, BC 延線上之 BD 射影 $= \frac{3}{2}$
(平面(192)頁, 習題9). $\therefore (CD)^2 = (5^2) + (3^2) + 2 \cdot 5 \cdot \frac{3}{2}$
 $= 49$ 及 $CD = 7$.

習題 2. 若 $ABCD$ 為空間一四邊形 (即 A, B, C, D 四點
不在一平面上), 且 $AB=BC$, $CD=DA$, 則平面
角 A 等於平面角 C .

(解) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (s.c.s.)

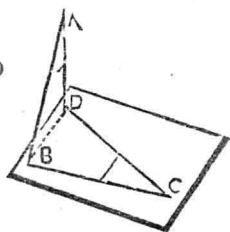
習題 3. 空間四邊形兩鄰邊中點之聯線與他兩鄰邊中點之聯線相平行且相等.

(解) 兩對鄰邊中點之聯線皆 $\parallel BD$

且 $= \frac{1}{2} BD$.

\therefore 兩線彼此平行 (§497).

\therefore 且兩線相等 (公理 1).



EX. 3

習題 4. 若兩角不在同平面內，其邊平行且在相反方向，試証兩角相等.

(解) 由後延長一角之兩邊通過頂點，用 (§53) 及 (§498).

習題 5. 若兩角之邊平行，在何種條件下則兩角相補？

(解) 設 $\angle ABC$ 及 $\angle A'B'C'$ 爲已知角，而 $AB \parallel A'B'$ ，
 $BC \parallel B'C'$ ， BA 及 $B'A'$ 延之在同方向，
 BC 及 $B'C'$ 延之在相反方向。

習題 6. 在何種條件下則通過二點之一平面能垂直於一已知直線？

(解) 自兩已知點至已知線所作之兩垂線須交於已知線上。

習題 7 通過五點能有幾個平面，不許有四點在一平面上？

(解) 可用自 5 物選 3 之法，即 $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ 平面，

習題 8. 能包含空間一有限部份 (definite portion) 所需最少之平面為若干？何故？

(解) 四平面. 三平面能交於一點，必需有一第四平面方能截空間一有限部份.

習題 9. 証：一四邊形定一平面 (a) 若其兩對角線相交
(b) 若其兩邊平行. (c) 若其兩對邊相交.

(解) (a) 用 (§484 [2],) 及 §481.

(b) 用 (§484 [3],) 及 §481.

(c) 用 (§484 [2],) 及 (§481).

第 11 頁

習題 1. 一直角以其一邊為軸旋轉之，問旋轉之邊所生之面為何種？

(解) 垂直於軸之一平面 (§504).

習題 2. 三線互相垂直，試証不能再作第四線垂直於此三已知線.

(解) 設四個垂直線爲 OA, OB, OC, OD . 則 OA, OB, OC 將在同一平面上 (§504). 此爲不可能 (§47), 因 OA 及 OB 將垂直於 OC 在同一平面內.

習題 3. 試證不能作一線垂直於兩平面, 設兩平面有一公共點.

(解) 設若能, 則與 §506 衝突.

第 13 頁

習題 1. 順次聯結空間四邊形各邊之中點. 則構成一平行四邊形.

(解) 用第 10 頁, 習題 3 及 (§144.)

習題 2. 聯結空間任一四邊形對邊中點之線, 必彼此平分.

(解) 此兩線爲習題 1 內平行四邊形之對角線故彼此平分.

習題 3. 試述命題 XI 如下式: 若一平面垂直於兩平行線之一,……

(解) 若一平面垂直於兩平行線之一, 亦必垂直於他線.

習題 4. 作 BB' 線, 更用 BC 與 $B'C'$ 兩線證明命題 XI.

(解) 作 BB' , AB 及 $A'B'$ 在同一平面上 (§484, [3]).

$AB \perp MN$ 平面 (假設). $AB \perp BC$ (§500).

$BB' \perp A'B'$ (§105). $BC \parallel B'C'$. $\angle ABC =$

$\angle A'B'C'$ (§498). $A'B' \perp B'C' \therefore A'B' \perp MN$

(平面 §502.)

習題 5. 試述若一平面斜交二平行線之一線, 必不垂直於他一線.

(解) 用間接証法. 應用 (§510).

第 15 頁

習題 1. 距已知平面有定距離之點之軌跡爲何?

(解) 軌跡爲平行於已知平面之兩平面, 與已知平面之距離等於定距.

習題 2. 距已知平面有定距離且與他二已知點成等距離之點之軌跡爲何?

(解) 用習題 1 及 (§509). 若二已知點之連結線不與已知平面垂直, 則所求軌跡爲二平行線.

習題 3. 求距 A 及 B 兩點等遠, 且距 C 及 D 兩點等遠之點之軌跡.

(解) 用 (§509) 兩次, 所求軌跡爲一直線, 但 AB 及 CD 線相平行時則無解.

習題 4. 研究習題 3, 當 (a) 線 $AB \parallel$ 線 CD , (b) C 與 B 重合, (d) A, B, C, D 四點在一直線上.

(解) (a) 普通無軌跡, 除非 AB 及 DC 之垂直平分平面相合時, ABDC 構成一長方形.

(b) 軌跡必須存在.

(c) 無軌跡除非 $A \equiv C$ 及 $B \equiv D$.

習題 5. 過二相交平面外一點, 作一線平行於每一平面.

(解) 過已知點作一線平行於二面之交線,

習題 6. 証: 每個三角形能定一平面.

(解) 用 (§484 [2],) 及 (§481.)

習題 7. 若 $AB \parallel A'B'$ 且通過每線作一平面相交於 CD , 則 $CD \parallel AB$.

(解) $\triangle B \parallel A'B'$ (假設). 平面 $B'C \parallel AB$ (§488).

$\therefore AB \parallel CD$ (§492).

第 17 頁

習題 1. 在命題 XIII 圖形, 若 $\angle B = \angle C$, 則 $EB = EC$, 及 $AB = AC$.

(解) Rt. $\triangle ABE \cong$ rt. $\triangle CAE$ (§117).

習題 2. P 點距 MN 平面 3 吋, A 點在 MN 內, 作一直線 PA. 若 $PA = 5$ 吋, 問 A 點至垂線足(由 P 至 MN) 之距離爲何?

(答) 4 吋.

第 19 頁

習題. 若兩平面皆平行於第三平面, 則必彼此平行.

(解) 作一線垂直於第三平面, 則亦必垂直於他兩平面 (§522). 應用 (§521).

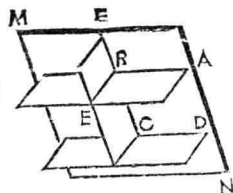
第 22 頁

習題 1. 對頂二面角 (dihedral angles) 相等.

(解) 作一平面垂直於兩已知面之交線, 平面角 (Plane \angle s) 相等 (§500), (§53).

習題 2. 若兩個平行平面被第三平面所截, 則同位二面角相等.

(解) 作一平面垂直於兩交線, 則構成二相等之平面角.



Ex. 2

第 23 頁

習題. 若相鄰二面角各爲 30° 及 40° . 求平分此等二面

角之二平面所構成之二面角.

(答) 35°

第 24 頁

習題 1. 過一已知點作一平面垂直於二已知平面.

(解) 自已知點向二已知面作二垂線, 此兩垂線可定所求之平面 (§534).

[注意] 若兩面平行, 則此題不定 (indeterminate)

習題 2. 過一已知點作一平面垂直於已知平面 P 且平行於一已知直線 CD .

(解) 過已知點 A 作 $AF \perp P$ 平面, 作 $AE \parallel CD$.
 AF 及 AE 可決定所求之面 (§534)(488).

習題 3. 過一已知直線作一平面垂直於已知平面.

(解) 自已知直線上一點作一線垂直於已知面.
 此垂直線及已知線能定所求之面.

第 25 頁, 538 節

習題. 在命題 XX 圖內, 求 AF 之長, 若平面 $CE \perp MN$ 平面, $AB \perp CD$, $AB = m$ 吋, $BF = n$ 吋,

(解) $AB \perp MN$ 平面 (§536), $\therefore \angle ABF = 90^\circ$

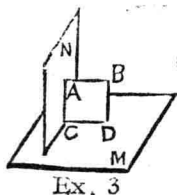
$$A(F) = \sqrt{m^2 + n^2} \text{ 吋.}$$

第 25 頁, 540 節

習題. 若一直線平行於一平面, 則垂直於此線之任一平面, 亦必垂直於第一平面,

(解) 設 $AB \parallel M$, 及 $AB \perp N$.

通過 AB 作 AD 平面, 截平面 M 於 CD . $AB \parallel CD$ (§492), $CD \perp N$ 平面 (§510).



\therefore 平面 $M \perp N$ 平面 (§534)

第 26 頁

習題. 與二相交平面等距離之點之軌跡, 為平分此相交平面所構成之二面角之二平面.

(解) 應用 (§541), (542).

(第 26 頁)

習題 1. 二平面平行, 一平面內之圓射影於他平面上, 問其射影為何? 若二平面互相垂直, 問其射影為何?

(解) (a) 設已知圓之任意半徑 OB 之射影為 $O'B'$.

O' 之位置已定, 且 $O'B' = OB$.

\therefore 軌跡為與已知圓相等之圓.

(b) 等於已知圓直徑之直線.

習題 2. 若一圖在一平面上之射影爲一直線，則此圖爲一平面圖形 (Plane figure).

(解) 過射影作平面 MN 垂直於已知平面.

\therefore 按 (§537). 已知圖形必須在平面 MN 上.

故爲平面圖形.

習題 3. 若一線 AB 與一平面 MN 構成 45° 之角，又 $AB = 10$ 吋，問 AB 在 MN 上之射影之長爲若干？

(解) $5\sqrt{2}$. 參看 平面 191 頁，習題 7.

習題 4. 在命題 XXIII 圖形，求 AB 與 MN 之夾角，若 $AA' = 6$, $BB' = 11$, 及 $AB = 10$.

(解) 作 $AE \parallel A'B'$ 遇 BB' 於 E. $BE = 5$,

$AB = 10$, $\therefore \angle BAE = 30^\circ$ 故所求角爲 30° .

習題 5. 於命題 XXIV 之圖，若 $AC = 3$ 吋， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $\angle CAD = 90^\circ$ ， $AC = AD$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，求 BD 之長.

(解) $AB = 2AC = 6$ 吋. $AD = AC = 3$ 吋. $AD \perp AB$

(§520). $BD = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$ 吋 ≈ 6.7 吋.

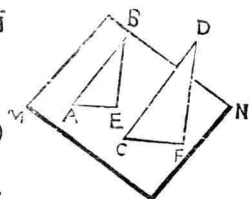
題習 6. 二平行線與一平面之傾角相等.

(解) 設 $AB \parallel CD$, $BE \perp MN$ 平面

$DF \perp NM$ 平面. $\therefore BE \parallel DF$

(§513) $\angle B = \angle D$ (§498)

$\therefore \angle BAE = \angle DCF$ (§113).



Ex. 6

習題 7. 於命題 XXIV 圖形 (但 $AC \neq AD$),

求 $\angle BAD$, 若 $AB=10$, $CD=5\sqrt{2}$,

$\angle BAC=30^\circ$, $\angle CDA=90^\circ$.

(解) $BD \perp AD$ (§520). $BC=5$, $BD = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{2})^2}$
 $= \sqrt{75}$. $AD = \sqrt{10^2 - 75} = 5$.

$\therefore AD = \frac{1}{2} AB$. $\angle BAD = 60^\circ$.

習題 8. 於上圖內, 求 AB 及 BD , 若 $AD=m$, $DC=n$,

$CB=p$, $\angle ADC=90^\circ$ 且由此求出 $\angle ADB$ 之值.

(解) $\overline{AC^2} = m^2 + n^2$. $\therefore \overline{AB^2} = m^2 + n^2 + p^2$.

$\overline{BD^2} = p^2 + n^2$, $\overline{AB^2} = \overline{AD^2} + \overline{BD^2}$ 因 $m^2 + n^2 + p^2$
 $= m^2 + (p^2 + n^2)$ 故 $\angle ADB = 90^\circ$.

別証參考命題習題 XIV.

習題 9. AB 及 CD 不在一平面上, 試作其公垂線 (參看原書圖形).