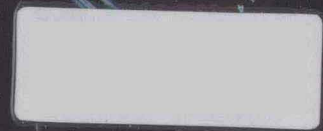
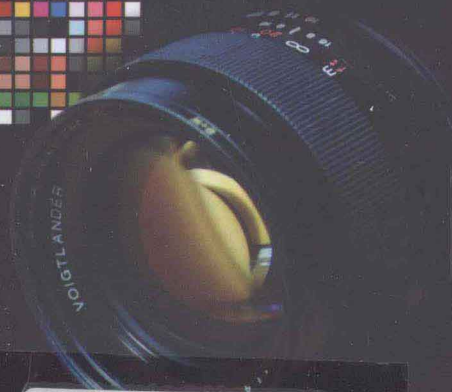
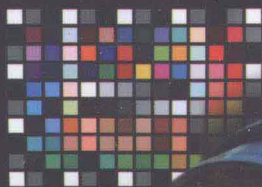


图像处理模型 数值分析与数值仿真

◎ 刘朝霞 / 著



中央民族大学出版社
China Minzu University Press

图像处理模型 数值分析与数值仿真

刘朝霞 / 著

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

图书在版编目 (CIP) 数据

图像处理模型数值分析与数值仿真 / 刘朝霞著. —北京:
中央民族大学出版社, 2012. 8

ISBN 978-7-5660-0259-4

I. ①图… II. ①刘… III. ①图像处理—模型—数值
分析 ②图像处理—模型—数值—仿真 IV. ① TP391. 41

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 206718 号

图像处理模型数值分析与数值仿真

- 著 者 刘朝霞
责任编辑 舒 松
封面设计 布拉格
出 版 者 中央民族大学出版社
北京市海淀区中关村南大街 27 号 邮编: 100081
电话: 68472815 (发行部) 传真: 68932751 (发行部)
68932218 (总编室) 68932447 (办公室)
- 发 行 者 全国各地新华书店
印 刷 者 北京宏伟双华印刷有限公司
开 本 880×1230 (毫米) 1/32 印张: 4.75
字 数 180 千字
版 次 2012 年 9 月第 1 版 2012 年 9 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5660-0259-4
定 价 18.00 元
-

版权所有 翻印必究

序 言

图像处理，这个传统的工程领域，在过去的二十年中已经吸引了许多数学家的注意。从视觉和感官科学的角度，图像处理是从二维图像重构三维世界的相关阶、几何、拓扑、模式和动态的基本工具。因此在数字技术时代，数学必须去迎接图像处理的挑战就绝不仅仅是历史的偶然了。

数学的作用也由图像处理在当前科学技术领域中的广泛应用决定。这包括航空航天运输、医学图像、分子图像、计算机图形图像、人工和机器可视化、电讯、自动导航、监控录影机和生物距离的安全识别（例如手纹和脸型的识别）等等。所有这些高度分化的分支学科使得有必要发展出图像分析和处理的共同数学基础和框架。反之，图像处理也为数学建模、分析、计算提供了大量的机遇。

迄今为止，数学上主要从三方面来研究图像处理：概率统计、偏微分方程、小波分析。计算机可视化和图像分析领域中以偏微分方程为基础模型已经在图像处理研究领域占据着重要地位。主要原因是（1）能将图像分割的模型问题转化为偏微分方程框架，且能将不同的正则化方法统一到模型中；（2）在水平集框架下能用有限差分法解偏微分方程模型；（3）易于推广到高维空间。这使得偏微分方程方法成为继传统的变换和统计方法的又一方法。

本书主要对图像处理中的六个偏微分方程模型进行数值分析和数值仿真，共分为七章。

第一章介绍图像处理中的偏微分方程模型及数值模拟的发展历史和现状。

第二章对于带有时滞正则项的图像处理模型,给出新型的半隐式数值离散,证明了数值解的存在性,及离散解对于粘性解的收敛性。

第三章对于带有扩散张量的各向异性扩散模型,构造了隐式算法,并采用代数多重网格法迭代求解,数值试验表明了算法的高效性。

第四章对于时变耦合非线性扩散方程组模型构造了半隐式离散,给出了数值算法的稳定性分析,并对于不同信噪比的真实带噪声图像进行了数值仿真。

第五章对用于图像去噪和图像分割的非线性扩散方程模型,构造了两种高阶显式算法和一种用代数多重网格法迭代求解的隐式算法,证明了半隐式离散格式的稳定性,并做了数值实验。

第六章对于图像处理中的一类奇异扩散方程模型,构造了显式有限差分格式,并证明了离散解对 BV 熵解的收敛性。

第七章对于图像处理中的另一类强退化抛物方程模型,构造了单调差分格式,通过一系列复杂的估计,给出离散近似解对 BV 熵解的收敛性分析。

本书涵盖了作者在图像处理偏微分方程模型数值分析方面所做的相关研究工作,可作为高年级研究生和青年教师进行深入研究的参考书。

本书得以出版,得到了国家自然科学基金 (No.11101450)

和国家自然科学基金 (No.11071239) 的资助, 感谢国家自然科学基金连续多年对我们研究工作的资助。由于作者学识水平所限, 书中难免有错误和不足之处, 欢迎读者予以批评指正,

作 者

2012 年 6 月

目 录

第一章 绪论	1
1.1 图像处理模型的发展历史和现状	1
1.2 图像处理模型数值模拟的发展历史和现状	6
1.3 代数多重网格法基本理论简介	9
1.4 有界变差空间简介	12
第二章 带有时滞正则项模型的数值分析与数值仿真	13
2.1 带有时滞正则项的图像处理模型	13
2.2 差分解的存在性及对粘性解的收敛性	15
2.3 迭代格式及迭代收敛性	30
2.4 数值仿真与结果比较	40
第三章 各项异性扩散模型的隐式数值模拟	43
3.1 带有扩散张量的各项异性扩散模型	43
3.2 隐式数值算法	45
3.3 数值仿真与结果比较	51
第四章 时变耦合非线性扩散模型的半隐式算法	54
4.1 时变耦合非线性扩散方程组	54
4.2 半隐式数值算法	56
4.3 数值仿真	64
第五章 非线性扩散模型的新型数值算法	68
5.1 非线性扩散模型	68

目 录

5.2	新型数值算法	71
5.3	数值结果和比较	79
第六章	一类奇异扩散方程差分解的收敛性	85
6.1	一类奇异扩散方程	85
6.2	预备知识	87
6.3	离散格式的收敛性	88
第七章	一类强退化抛物方程数值解的收敛性	100
7.1	一类强退化抛物方程	100
7.2	预备知识	102
7.3	单调差分格式的收敛性	105
参考文献		122

第一章 绪论

§1.1 图像处理模型的发展历史和现状

图像处理的内容涉及图像复原、图像压缩、图像分割等。从历史上看,数字图像处理研究有很大一部分是致力于图像复原研究的,包括对算法的研究和针对特定问题的图像处理程序的编制。我们所说的图像复原是指去除或减轻在获取数字图像过程中发生的图像质量下降(退化),这些退化包括由光学系统、运动等造成的图像模糊,以及源自电路和光学因素的噪声。图像复原的目标是对退化的图像进行处理,使它趋向于复原成没有退化的理想图像。

目前在去噪声和光滑化方法中常见的方法有生物形态光滑、线性光滑、非线性光滑、几何光滑。对于噪声消除和噪声扩散,近来相当一段时间内,图像处理技术已广泛地发展起来(见 Fritsch[10], Perona et al. [11], Gerig et al. [12], Alvarez et al. [13], [14], Shah [15], Sapiro et al. [16], Weickert [17], Cottet et al. [18], Yu-li You et al. [19], Y. Chen et al. [20], [21], [22], [23], [24])。

设 I 是观察到的带有噪声的图像的强度(灰度值),它定义在矩形区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, u 是重构后去除噪声的图像。假设

$I = u + n$, n 是噪声。目的是要从 I 重构 u , 一个最简单的模型是 Fritsh 研究的线性扩散过滤器, 其中 $|\nabla I|$ 是模糊边界检测器, $|\nabla I|$ 较大的位置更可能是图像的边界。模型为:

$$u_t = \operatorname{div}(g(|\nabla I|^2)\nabla u), \quad (1.1.1)$$

其中

$$g(|\nabla I|^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla I|^2/\lambda^2}} \quad (\lambda > 0).$$

但对于 t 较大的情形, 过滤后的图像掩藏了一些反映原始图像微观结构的因素, 自然的想法是引入反馈, 这通过对 I 的梯度的扩散项换为对 u 的梯度的扩散项来实现, 即 Perona 和 Malik 提出的非线性扩散过滤器:

$$u_t = \operatorname{div}(g(|\nabla u|^2)\nabla u), \quad (1.1.2)$$

其中

$$g(s) = \frac{1}{1 + s^2/\lambda^2} \quad (\lambda > 0).$$

此模型可使边界在长时间内保持稳定, 但当引入很大噪声时, 理论上 $|\nabla u|$ 的震荡无界, 由模型引入的条件光滑也不能给出很好的结果, 并且方程是不适定的。克服这一困难的是 Alvarez et al. [13], 模型如下:

$$u_t = g(\nabla G_\sigma * u)|\nabla u| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right), \quad (1.1.3)$$

其中

$$g(\nabla G_\sigma * u) = \frac{1}{1 + K|\nabla G_\sigma * u|^2} \quad (K > 0).$$

相关文献还有: Pietro Perona [25], Yu-li You et al. [26], F. Torkamani-Azar et al. [27], Michael J. Black et al. [28], Guillermo Sapiro et al. [29], Thorsten Grahs et al. [30], J. Weickert [31], Francine Catté et al. [32]。

以上模型也可由基于曲线发展的平均曲率流模型(参见 R. Malladi et al. [33], V. Caselles et al.[34]) 修改后得到:

$$\begin{cases} u_t = |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = I(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

相关文献还有: Adel I. El-Fallah et al. [35], Anthony Yezzi [36]。

除了各向异性扩散模型, 对带噪声图像的图像恢复起到有效作用的还有变分法。由 Rudin et al. [37] 提出的全变差方法导出的方程为:

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \beta(u - I) \\ u(x, 0) = I(x) & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Chan et al. [38] 和 Strong [39] 提出空间自适应全变差格式, 导出的方程为:

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}\left(\alpha(x)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) - \beta(u - I) \\ u(x, 0) = I(x) \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = 0 \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1.6)$$

其中 α 的选择依赖于噪声的数量及需要保持的细节的数量, 理想情形下 α 为在边界上值为 1, 在同类区域值为 0 的可微函数, 相关文献还有: Raymond H. Chan et al. [40], Tony F. Chan et al. [41], Yuqing Li et al. [42], Curtis R. Vogel et al. [43], Antonin Chambolle et al. [44], Tony Chan et al. [45], C.R. Vogel et al. [46], David C. Donson et al. [47], Stanley Osher et al. [48], Sylvie Teboul et al. [49].

Y. Chen et al. 在 [50] 中研究了从图像几何特征出发的如下各向异性扩散模型:

$$\begin{cases} u_t = |\nabla u| \operatorname{div}\left(\alpha(x)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) - \beta(u - I) \\ u(x, 0) = I(x) \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = 0 \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

其中

$$\alpha(x) = g(\nabla G_\sigma * u) = \frac{1}{1 + K|\nabla G_\sigma * u|^2} \quad (K > 0).$$

而由于与高斯光滑核的卷积, 当噪声水平大时, 易出现细节部分丢失和边角的舍入。Y. Chen [20] 将时滞正则加入到过滤中, 模型如下:

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(L(\vec{V}\nabla u)) - \beta(u - I) & x \in \Omega, t > 0, \\ \tau \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V} = \nabla G_\sigma * u & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = I(x), \vec{V}(x, 0) = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1.10)$$

其中 $G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{|x|^2}{4\sigma}}$, σ 为正参数。

§1.2 图像处理模型数值模拟的发展历史和现状

从偏微分方程角度研究图像处理的方便之处在于对于偏微分方程, 计算数学有一套丰富的数值计算方法提供给数字图像处理研究作为参考。

Catté et al. [32] 如下对于新型 Perona-Malik 边界检测和图像恢复模型给出半隐式格式,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|)\nabla u) = 0 & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ u(x, 0) = u_0, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

其中 $G_\sigma(x) = C\sigma^{-\frac{1}{2}} \exp(\frac{-|x|^2}{4\sigma})$ 。

Alvarez et al. [13], 对如下模型先作近似再利用半隐式格式对其进行求解, 并给出了保持唯一性和稳定性的多尺度图像光滑化方法,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - g(|DG_{\sigma} * u|) \left((1 - h(|Du|)) \Delta u + h(|Du|) |Du| \operatorname{div} \frac{Du}{|Du|} \right) = 0, \quad (1.2.2)$$

其中 $h(s)$ 是满足条件 (若 $s \leq e$, $h(s) = 0$; 若 $s \geq 2e$, $h(s) = 1$) 的光滑非增函数, e 为参数。

对非线性扩散过滤器通常用显式格式, 但显式格式仅对小时间步长稳定, 这使得它的效率不高且限制了实际应用。基于离散非线性扩散尺度空间结构, Weickert et al. [17] 对如下模型给出对所有时间步长都稳定的半隐式格式, 这种新格式应用可和算子分裂 (AOS) 法求解,

$$\begin{cases} \partial_t u = \operatorname{div}[g(|\nabla u_{\sigma}|^2) \nabla u], \\ u(x, 0) = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \end{cases} \quad (1.2.3)$$

其中 \vec{n} 表示图像边界 $\partial \Omega$ 的单位外法向量,

$$g(s) = \begin{cases} 1 & (s \leq 0), \\ 1 - \exp\left[\frac{-3.315}{(s/\lambda)^4}\right] & (s > 0). \end{cases}$$

Cottet et al. [18] 利用显式与半隐式结合的方法来解耦合的偏微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\nabla u) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial t} + L = F(\nabla_{\sigma} u), \end{cases} \quad (1.2.4)$$

其中 $\nabla_{\sigma} u = \nabla(u * f_{\sigma})$, $f_{\sigma}(y) = \sigma^{-2} f(\frac{y}{\sigma})$, $\int f dx = 1$, L 和 F 是 2×2 矩阵。

Chan et al. [38], 对于全变差模型 (1.1.6) 利用半隐式格式并给出了后滞不动点迭代格式及迭代收敛性。C.R. Vogel et al. [46] 对于研究的全变差模型采用不动点及最优化方法求解。

Dobson et al. [57] 对于全变差模型给出有限元分析及不动点收敛性。

Jijun Li [58] 对于以下模型给出有限元离散及稳定性分析,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \nabla \cdot \left(g(|\nabla u_\sigma|^2) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \beta |\nabla u| (u_0 - u), \\ \frac{\partial u}{\partial \mu} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times I, \\ u(x, 0) = u_0, \quad x \in \Omega, \end{cases} \quad (x, t) \in \Omega \times I, \quad (1.2.5)$$

其中 μ 表示边界的外法向量, $I = (0, T)$ 是时间尺度区间, $\Omega \in \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ 是有界区域。

Henn et al. [59], C.R. Vogel et al. [60], Scott T. Acton [61] 在迭代过程中利用了多重网格迭代法 (MG), 加快了收敛速度。

Y. Chen et al. [20], [21], [22], [24] 对于相应的偏微分方程或方程组只给出简单的显式数值离散, 还没有人对所述模型进行深入的数值分析研究。本书将在第二、三、四、五章对 Y. Chen et al. 给出的模型构造新的数值算法并进行数值分析和数值仿真。

§1.3 代数多重网格法基本理论简介

运用偏微分方程模型进行图像处理研究时要解线性代数方程组,相应系数矩阵通常不具有对角占优或对称正定等良好性质,由于图像处理涉及的计算规模又很大($10^4 \sim 10^6$),因此采用普通的迭代方法:Jacobi、Gauss-seidel、SOR等方法会比较慢或失效。多重网格法(MG)的计算复杂度仅为 $O(n)$,因此在图像处理研究领域已经逐渐被应用(Henn et al. [59], C.R. Vogel et al. [60], Scott T. Acton [61])。下面对代数多重网格法作简要介绍。

代数多重网格法(Chang, Q. et al. [62], Grauschopf, T. et al. [64], Griebel, M. et al. [65], Huang, W.Z. et al. [66], Krechel, A. et al. [67], McCormick, S. et al. [68], Mertens, R. et al. [69], Regler, H. et al. [70], Ruge, J.W. et al. [71], Schöder, J. et al. [72], Zaslavsky, L. et al. [73], [74])与几何多重网格法(A. Brandt [75], [76], [77], H. Foerster et al. [78], W. Hackbusch [79], [80], P.W. Hemker [81], R. Kettler et al. [82], M. Khalil [83], A. Krechel et al. [84], U. Trottenberg, et al. [85])有相似的过程。

对几何多重网格法以如下问题为例作简单介绍

$$L_h u_h = f_h (\Omega^h),$$

Ω^h 包含 $N = N_h$ 个网格点, u_h 是网格点的值, L_h 是离散算子。