GAOZHONG

SHUXUEYINANJIEXI

修订本

高中数学疑难解析

湖南教育出版社

高中数学疑难解析

本社 编

湖南教育出版社

高中数学疑难解析

本社 编

责任编辑：孟实华

*

湖南教育出版社出版（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1982年8月第1版 1985年8月第2版第2次印刷

字数：180,000 印张：9 印数：437,901——540,900

统一书号：7284·313 定价：1.05元

本书是为了回答高中学生在数学学习中提出的疑难问题而编写的。全书计收37个难点，全部按教材顺序排列，由浅及深，一个难点一篇文章，文章前后虽有联系，但都独立成篇，既能答疑解惑，又要言不烦，颇值一读。

目　录

1

有关集合的应用问题

集合是现代数学最基本的概念之一。由于这一概念的简单性、普遍性及抽象性，已使它渗透到数学的一切领域。中学阶段学点集合的知识，不仅是为今后的学习作准备，而且有利于对中学教材加深理解，同时能更好地培养学生分析思考问题的能力。但由于学生以往只习惯于数和式的概念及其运算，初次接触集合的有关概念及其运算时，不容易理解，所以，这里就集合的简单运算及其应用谈谈解题的一般原理与方法。

一、首先要明瞭集合中的元素，既可以是数、式、点、线、面、体等数学专门研究的对象，也可以是其它的对象，总之，是具有某种确定属性的对象。

二、其次必须深刻理解子集、并集、交集、全集、补集、空集等有关概念的内在含义。

三、要善于把一个全集分成几个互不相容的子集，即这些子集无公共元素或这些子集的交集为空集，并能用韦恩图直观地表示集合。

四、必须掌握计算集合所含元素个数的几个简单公式：设$n(X)$表示集合X所含元素的个数。

1. $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$。

当 $A\cap B=\varnothing$时，则有

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$。

2. $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$。

五、要掌握有关集合的几个运算规律（列表如下）：

交换律	$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$
结合律	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
分配律	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
0—1律	$A\cup\phi=A$，$A\cap I=A$，$A\cup I=I$，$A\cap\phi=\phi$
等幂律	$A\cup A=A$，$A\cap A=A$
吸收律	$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$
求补律	$A\cup\bar{A}=I$，$A\cap\bar{A}=\phi$
反演律	$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

（以上这些运算规律可由有关定义及直观图证得）

下面举一些例子，说明如何运用集合的概念和运算规律解答有关问题。

例1 设一元二次方程$x^2-px+15=0$，$x^2-5x+q=0$的解集分别为A、B，且

$A\cup B=\{2, 3, 5\}$；$A\cap B=\{3\}$，求A、B及p、q的值。

〔解〕 $\because$ $A\cap B=\{3\}$，$\therefore$ 3是两个方程的公共根，分别代入其方程得 $3^2-3p+15=0$；$3^2-5\times3+q=0$。

$\therefore\quad p=8,\ q=6$。

原方程分别为

$$x^2-8x+15=0;\qquad x^2-5x+6=0.$$

设它们各自的另一根分别为α、β，由韦达定理可得：$3\alpha=15$，$3\beta=6$，

$\therefore\quad \alpha=5,\quad \beta=2$。

$\therefore\quad A=\{3,\ 5\};\ B=\{2,\ 3\}$。

例2 已知全集$I=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \}$。$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,9,\}$，而$\overline{A}\cap B=\{4,\ 6,\ 8\}$，试确定$A$与$B$。

〔解〕 $\because\quad \overline{A}=\overline{A}\cap I=\overline{A}\cap(B\cup\overline{B})$

$$=(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$$

$$=\{4,\ 6,\ 8\}\cup\{1,\ 9\}$$

$$=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$$

而 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\therefore\quad A=\overline{\overline{A}}=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

又 $B=B\cap I=B\cap(A\cup\overline{A})=(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})$

$$=\{2\}\cup\{4,6,8\}=\{2,4,6,8\}$$

$\therefore\quad A=\{1,4,6,8,9\}$，$B=\{2,4,6,8\}$

例3 若 $A=\{2,\ 4,\ a^3-2a^2-a+7\}$，

$B=\{-4,\ a+3,\ a^2-2a+2,\ a^3+a^2+3a+7\}$，

且 $A\cap B=\{2,\ 5\}$，试求实数a的值。

分析：$\because\quad A\cap B=\{2,\ 5\}$，而$A$中已有元素2，4，

∴ A中另一元素a^3-2a^2-a+7必为5，由此可求出a的值，再将a的值代入B中有关代数式（元素）进行验证，最后确定a值。

〔解〕 由题意，可知：$a^3-2a^2-a+7=5$，

即 $(a+1)(a-1)(a-2)=0$，

∴ $a=\pm1$，2。

将$a=1$，-1，2分别代入B中的三个由代数式表示的元素：$a+3$，a^2-2a+2，a^3+a^2+3a+7，可以发现：

当$a=1$时，$B=\{-4, 4, 1, 12\}$，显然不合题意；

当$a=-1$时，$B=\{-4, 2, 5, 4\}$，此时$A\cap B=\{2,4,5\}$，

与已知条件$A\cap B=\{2, 5\}$矛盾；

当$a=2$时，$B=\{-4, 5, 2, 25\}$，

∴ $a=2$ 符合题意。

例4 33名学生在自习课时做数学、物理作业，18人做完了数学作业，23人做完了物理作业，若每人至少完成了一科作业，问同时完成数、理两科作业的有几人？

〔解法一〕 设完成数学作业的学生人数构成集合A，完成物理作业的学生人数构成集合B。则

$$n(A)=18,\ n(B)=23,\ n(A\cup B)=33.$$

$$\therefore\ n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

$$=18+23-33=8.$$

〔解法二〕 如图1.将$A\cup B$分成三部分，设每部分人数分别为x、y、z，

则有$\begin{cases} x+y+z=33 \\ x+z=18 \\ y+z=23 \end{cases}$

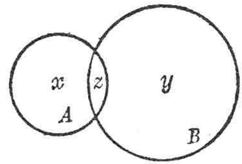

图1

解方程组得$\begin{cases} x=10 \\ y=15 \\ z=8 \end{cases}$

∴ 同时完成两科作业的学生有8人。

将两种方法比较，解法一较简单，但对没学过集合有关概念的初中学生来说，第二种解法还是通俗易懂的。

例5 某校学生参加高考，数学成绩不低于70分的有175人，语文成绩不低于70分的有140人，这两科成绩都不低于70分的有115人，都不足70分的有 20 人，问该校参加高考的学生有多少人？

分析：此题是求全集元素个数的问题，由韦恩图可以看出：先需求出$n(A\cup B)$。

〔解〕 如图 2 。设数学、语文高考成绩不低于70分者分别组成集合A、B，参加高考的学生组成全集I，依题意有：

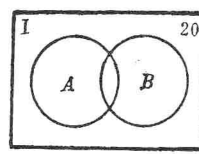

图2

$$n(A)=175, \qquad n(B)=140,$$

$$n(A\cap B)=115, \qquad n(\overline{A\cup B})=20.$$

于是：$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$$=175+140-115$$

$$=200.$$

$\therefore \quad n(I)=n(A\cup B)+n(\overline{A\cup B})$

$$=200+20=220.$$

故该校参加高考学生共有220人。

例6 某校先后举行数、理、化三科竞赛，学生中至少参加一科的有：数学800人，物理700人，化学400人；至少参加两科的有：数学、物理500人，数学、化学300人，物理、化学200人；三种都参加的有150人，试计算参加竞赛的学生总数。

分析：初看题目，似乎很复杂，不知如何动笔运算，但只要画出很简单的韦恩图，答案可直接求出。画三个两两相交的圆，分别表示参加数学、物理和化学竞赛人数的集合，因为三科都参加的有150人，将此数填入三个圆的公共部分，再根据至少参加两科的人数分别减去150，将所得的三个结果：350，150，50分别填入相应的两个圆的其余公共部分；最后根据至少参加一科的人数计算后又填入数学150、物理150、化学50。于是根据直观图可得到参加数学竞赛的为800人，只参加物理竞赛的有150人，只参加化学竞赛的有50人，同时参加物理、化学竞赛的有50人，

所以得 $800+150+50+50=1050$。

故参加竞赛的学生共有1050人。

例7 在集合$\{x:100<x<300\}$中有多少个能被7或11整除的数？

〔解〕 （解此题可借助于数列的知识）

设在给定的集合中，7的倍数构成集A，11的倍数构成集B。

由等差数列知识可知：集合 A 中的元素构成首项是 105，公差是7，末项是294的等差数列。由通项公式可求出其项数为28，即$n(A)=28$。

同理，集合B中的元素构成首项是110，公差为11，末项为297的等差数列，其项数为18，即$n(B)=18$。

但在给定集合能被7整除且能被11整除（即能被77整除）的数有154，231两个元素，即$n(A\cap B)=2$。

$$\begin{aligned}\therefore\quad n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=28+18-2=44.\end{aligned}$$

此即为本题所求之数。

例8 求函数$y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sin\pi x}$的定义域。

〔解〕 设所求定义域为集合P。则

$$\begin{aligned}P&=\{x\mid x-1\geqslant 0\}\cap\{x\mid \sin\pi x\neq 0\}\\&=\{x\mid x\geqslant 1\}\cap\{x\mid x\neq k,\ k\in z\}\\&=\{x\mid i<x<i+1,\ (i=1,2,\ 3,\cdots\cdots)\}.\end{aligned}$$

即 $P=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(i,\ i+1)$。

例9 设平面上的点的集合$A=\{(x,y)\mid x-3y\leqslant 0\}$
$B=\{(x,\ y)\mid 2x-y\geqslant 0\}$，$C=\{(x,\ y)\mid 4x+3y<0\}$，
$D=\{(x,\ y)\mid 1\leqslant x\leqslant 3,\ x,\ y$均为整数$\}$

（1）用阴影表示集合$A\cap B\cap\overline{C}$。

（2）求$A\cap B\cap\overline{C}\cap D$中元素的个数。

分析：以上集合A、B、C中的二元不等式的解集均表示平

面上点的范围，首先应将不等式变成$y \geqslant f(x)$ 或$y \leqslant f(x)$ 的形式，并在直角坐标平面内作出函数$y=f(x)$的图象(此题图象均为直线)。取大于号时(即$y>f(x)$),解集为直线上方的点集,反之取直线下方的点集，若包括等号则表示直线上的点也属于解集。又集合D表示两条直线$x=1$与$x=3$之间的部分（包括两条直线在内）所有坐标为整数的点构成的集合。

〔解〕（1）题中所给集合分别为：

$$A=\left\{(x,\ y)\mid y \geqslant \frac{x}{3}\right\},\quad B=\left\{(x,\ y)\mid y \leqslant 2x\right\},$$

$$C=\left\{(x,\ y)\mid y<-\frac{4}{3}x\right\}.$$

$$\therefore\quad \overline{C}=\left\{(x,\ y)\mid y \geqslant -\frac{4}{3}x\right\}.$$

分别在直角坐标系中作出函数①$y=\frac{x}{3}$；②$y=2x$；③$y=-\frac{4}{3}x$的图象。

如图3，A表示直线①上方及直线上的点，B表示直线②下方及直线上的点，$\overline{C}$表示直线③上方及直线上的点，其公共部分(即$A \cap B \cap \overline{C}$）为图3中阴影部分所示。

（2）在图3的基础上再作两直线 $x=1$，$x=3$（用坐标纸正确作图），由图4可知：在梯形$EFGH$内及其边上，横、纵坐标都是整数的点有12个，

$$\therefore\quad n(A \cap B \cap \overline{C} \cap D)=12.$$

即 $A \cap B \cap \overline{C} \cap D$中有12个元素。

此题若不注意集合D中点（x, y)的横、纵坐标均为整数这

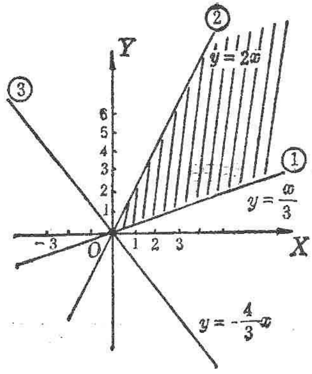

图3

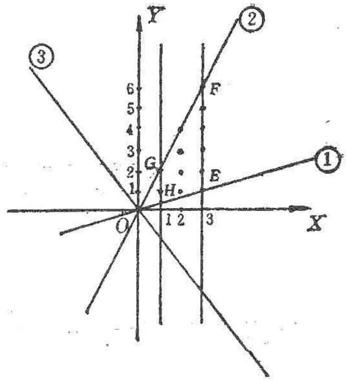

图4

个条件，则梯形内部及边界上的点所构成的集合就是无限集了。

（澧县一中　金新玉）

2

对数换底公式的应用

对数换底公式$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$，在有关对数的计算、化简和解方程等方面起着十分重要的作用。若归纳总结出几条推论，运用起来就简便多了。

推论1 若干个对数连乘时，若从第二个对数起，每一个对数的底数都等于它前一个对数的真数，则它们的乘积是以第一个对数的底数为底数，最后一个对数的真数为真数的对数，即：

$$\log_b N_1\cdot\log_{N_1}N_2\cdot\log_{N_2}N_3\cdots\cdots\log_{N_{n-1}}N_n=\log_b N_n。$$

其中b，N_i（$i=1$，2，……，$n-1$）均为不等于1的正数，N_n为正数。

我们称它为对数乘法的连锁律。简单记忆为：对数真底相接，积为首底尾真。

如　$\log_2 3\cdot\log_5 4=2\log_5 2\cdot\log_2 3=2\log_5 3$。

特例　$\log_a b\cdot\log_b a=\log_a a=1$，

即　$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$。

（简记口诀：底真互换，对数互倒。）