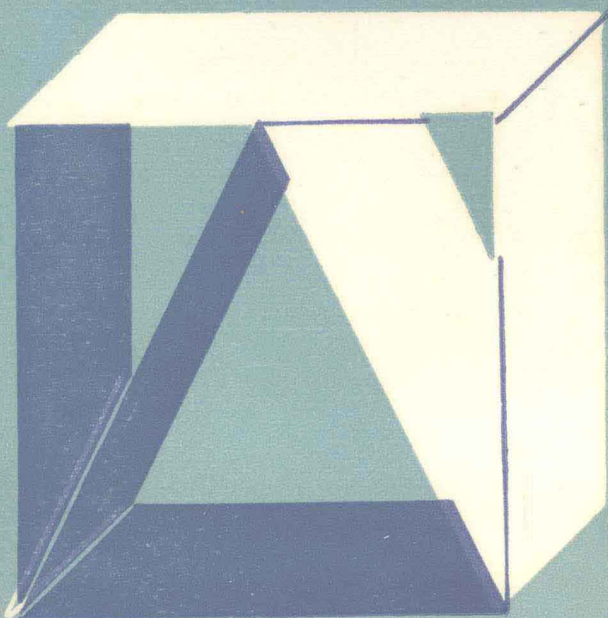
几何基础简明教程

周国新 · 李冠堂 编



辽宁教育出版社

几何基础简明教程

周国新　李冠堂　编

辽宁教育出版社

1990年·沈阳

内 容 提 要

本教程依照国家教委关于全国二年制师专数学专业教学计划将增设几何基础并减少解析几何课时的精神，参考有关《几何基础教学大纲》编写而成。

本教程共六章。第一章几何发展简史：叙述欧氏几何和非欧几何产生和发展的过程；第二章绝对几何：叙述结合、顺序、合同和连续等公理及其推论；第三章欧几里得几何：介绍平行公理以及证题法、几何变换、轨迹和作图；第四章叙述罗巴切夫斯基几何的基本理论；第五章介绍公理体系的基本问题；第六章简介黎曼几何并从不同的观点简述三种几何的统一。

本教程由俞晓群先生审定。

本教程取材精炼，叙述简明，附有题解。可作为师范院校和教育学院的试用教材或教学参考书，也可作为中学数学教师的自学读本。

几何基础简明教程

周国新　李冠堂　编

辽宁教育出版社出版　　沈阳市政二公司印刷厂印刷

（沈阳市南京街6段1里2号）

字数：210,000　开本：850×1168 1/32　印张：9 1/8

印数：1—3,000

1990年4月第1版　　1990年4月第1次印刷

责任编辑：王一心　　责任校对：周　杨

封面设计：何　明

ISBN 7-5382-0870-4/G·761

定价：3.80 元

前　　言

“几何基础”是庞大的几何体系的一个重要分支，是宏伟的几何大厦的基石。几何基础的研究始发于公元前的古希腊，而完成于19世纪末叶严密科学的公理体系的建立，是一门古老的学科。今天我们重新学习它，并不是缅怀古人，也不是回顾历史，而是有着重要的现实意义。

几何课程在中学数学教学中占有很大的比重，它不仅是今后学习科学文化知识的基础，而且对培养学生的思维能力也至关重要。限于中学数学教育的目的和学生的接受能力，既不可能、也不必要在中学几何中建立严密的公理体系。但对于中学数学教师来说，其要求就不能仅限于此。他们不但要通晓中学几何的全部内容，掌握几何学赖以建立的公理体系，熟悉几何结构的特点、逻辑关联以及处理它们的理论依据，而且还要了解不同的几何空间的区别和联系，了解欧氏几何在整个几何体系中的地位及其局限性。这样才能扩大眼界，提高对几何学的认识水平，从更高的观点，以更现代的眼光处理中学几何教学，从而收到更佳的教学效益。

熟悉过去，为了开辟未来的道路；学习欧氏几何，研究非欧几何产生和发展的历史，才能统观全局，掌握不同的几何空间的渊源及其相互联系。两千多年来，无数数学工作者前赴后继，在黑暗中摸索、奋斗。尽管经过了漫长的艰苦历程，但是

终于发现了非欧几何；尽管非欧几何常常展现出奇形怪状的面目，产生着出人意料的结论，其实都是人类的崇高智慧的光辉结晶。无疑地，这必将激起读者的极大兴趣。

本教程力求严谨而又简明。在绝对几何和罗氏几何两章中，既要保持严密的逻辑系统，又要使读者在阅读时不会感到过于繁琐而索然无味。因而有些较难的内容没有列入或证明从简。为了避免与中学课本重复，在欧氏几何一章中仅列出了若干基本命题，而把重点转向证题法、几何变换、轨迹和作图。这对几何教学也是有现实指导意义的。

从理论上了解公理体系的三个基本问题，知道公理的相容性、独立性和完备性的不同的要求和检验方法，知道模型法的作用及其局限性，有助于我们用辩证唯物主义观点看待和分析几何知识，也有助于我们认识近代公理方法之所以能够渗透到近代数学的各个领域的原因。

学习了罗氏几何之后，读者也将会对另一种非欧几何——黎曼几何产生兴趣。本教程简介了黎曼几何的概况，并从曲面几何和射影几何两方面把欧氏、罗氏和黎氏几何统一起来，使读者对其内部构造有个概括的了解，从而认识到各种变幻莫测的几何空间并不是数学家们随心所欲创造出来的，它们只是现实的客观世界空间结构的多样性的真实反映。

本教程承蒙卢家耀、孙润霖、李厚荣、欧阳立、泰福利、梁康健先生参加审稿，李玉兰、李敏君先生参加编订，程彦先生给予了大力支持，谨此致谢。

由于时间仓促，水平有限，缺点、错误在所难免。不当之处，望读者斧正。

编　者

1989年1月

目　录

第一章 几何发展简史

几何学研究的对象是物体的形状，这些形状是自然界早已存在的。如圆形的月亮，三角形的山，水平的湖，笔直的树等。自然界物体的各种形状就在人的头脑里形成各种形状的观念。后来人们在劳动中逐渐地学会制作各种形状的工具和用具，如弓箭、石刀、石斧等。在亿万次实践中，人们逐渐从具体的形状中抽象出直线、平面等概念；人们测量长度，估计面积和体积，逐渐得出一些简单的几何关系。几何学就这样在实践中产生并逐步发展起来。

§1 中国古代几何学

我国几何的发展是很早的，最初的几何概念和几何知识可以追溯到史前时代。从地下发掘出来的考古资料说明：十万年前的“河套人”已在骨器上刻有菱形的花纹，石器时代的各种工具也都具有一定的几何形状。公元前三千多年前的陶器上已有许多几何图案，殷代甲骨文已经有了“规”、“矩”二字。

我国涉及几何的一部最古的书是《墨经》。作者墨子姓墨名翟，春秋战国时鲁国人，约生于公元前468—382年间，是墨家学派创始人，比欧几里得早一百多年。他著了《墨子》一书，共71篇，现存53篇，其中《经上》、《经下》、《经说上》

和《经说下》四篇合称《墨经》.《墨经》包括几何学、力学、光学、逻辑学等内容，学术价值极高. 其中有关几何的约廿条. 下面举出几条《墨经》中的几何知识，并加以注解：

（1）经上 2. 体，分于兼也. 经说：(体)，若二之一，尺之端也.

注："兼"指物的总体，"体"指物的部分，部分是由总体分出的. 例如，一是二的部分，点是线段的部分. 这和欧几里得《几何原本》中的公理 V："整体大于部分"相类似.

（2）经上 42. 穷，或有前不容尺也. 经说：(穷)，或不容尺有穷，莫不容尺无穷也.

注："或"即"域"，指区域. "有"读为"又". "前"指最前之处，就是边界. 穷就是有边界的区域. 若用线段沿某方向去量这区域，再向前不容一线段，则区域有穷，即能量尽. 若永远量不尽(莫不容尺)，区域就是无穷的.

这和阿基米得公理意义相同，而比它早二百多年. 所以我们可以把这个公理称为不容尺公理.

（3）经上 53. 平，同高也.

注：意思是两平行线（或平行平面）间的距离处处相等. 这个命题与欧几里得第五公设等价.

（4）经上 54. 同长，以正相尽也. 经说：(同)，楗与狂之同长也.

注：同长，指彼此相比正好相尽. 象门楗与门框（即狂），其长相同.

（5）经上 58. 直，参也.

注：参就是三. 意思是：直线就是三点的位置相同. 与《几何原本》的直线定义意思相同.

（6）经上 59. 圜，一中同长也. 经说：(圜)，规写交

也。

注：圜就是圆。意思是：圆就是到一中心的距离相等。用规画线，相交而成圆。

（7）经上60．方，柱隅四讙也。经说：（方），矩写交也。

注：柱是边，隅是角，讙疑为权，相等的意思。意思是：方形四边相等，四角相等。以矩画线，其线相交就成方形。

（8）经上62．端，体之无序而最前者也。经说：(端)，是无同也。

注："序"应是"厚"。端就是点，无厚就是没有体积，点是最前面的。"同"字前应有个"不"字，意思是：点与点无不同。这与《几何原本》中点的定义"点没有部分"，"线的界限是点"的意思差不多。

（9）经上165．一法者之相与也尽类，若方之相合也。说在方。经说：(一)，方尽类，具有法而异，或木或石，不害其方之相合也。尽类犹方也，物具然。

注：意思是：由一个标准确定的事物都可以归之一类，比如直角皆相等，不管是木头的直角，还是石头的直角，都相等。不仅直角是如此，其他事物也一样。

这条比《几何原本》中公设Ⅳ"所有直角皆相等"的意义更广泛。

我国最早的一部系统的数学著作是战国以前的《周髀算经》（约公元前400年）。《周髀算经》中记载有丰富的几何知识。

《周髀算经》说："昔者周公问于商高曰：请问数将安出？商高曰：数之法出于圆方，圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一。故折矩以为勾广三，股脩四，径隅五。既方之

外，半其一矩。环而共盘，得成三四五。两矩共长二十有五，是谓积矩。”

这段话的意思是：周公问商高数是怎样产生的，商高说：数学的方法是研究一些圆形和方形的东西。圆形是由方形产生的。方形又由折成直角的矩尺产生的。怎样用矩尺来演算呢？这需要用到九九歌诀“九九八十一”等自乘和开方的方法。我们把一个直角三角形的三边分别称为勾、股、弦，如勾取 3，股取 4，则弦取 5，勾方加股方等于廿五，等于弦方。

商高还说明了用勾股形（即直角三角形）测量的道理。他说，矩尺应该是平正的，才能作出直线。矩尺仰转可以测高，伏复可以测深，横卧可以测远，令一端旋另一端转动可以作圆，合并两矩尺可成方。商高说，从前大禹治水，就是用这种方法测量地势高低，使河水就道，人民因此能安居乐业。

商高所述与古希腊数学家泰勒斯利用相似形测量金字塔的高度的原理相同，却要早五百多年。

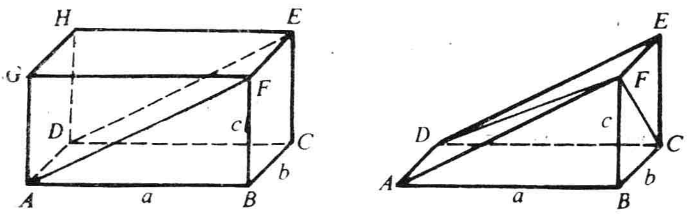
《周髀算经》还记载了周公之后的陈子，用勾股定理和相似三角形的比例图形，推算地球与太阳的距离和太阳的直径。《周髀算经》并载有勾股定理的正确证法。因此有人主张称勾股定理为陈子定理。

比《周髀算经》稍后的一部数学著作是《九章算术》。这是一部按实际问题编写的数学书，其中《方田》章讲田亩面积的计算，《商功》章讲体积计算，如各种形状的粮仓容积及建筑土方计算等，并结合这些实际问题研究过直六面体、圆柱、角锥、角锥台、圆锥、圆锥台以及球的体积。《勾股》章讲勾股定理的应用及相似比例关系等。

下面举一例介绍《九章算术》关于体积的计算：

设 $ABCDEFGH$ 是一长方体，则 $ADEF$ 是一个对角面，它

把长方体分成两个体积相等的图形，这种图形《九章算术》称为“堑堵”〔图1-1-1(a)〕。若长方体边长分别为 a,b,c，则堑堵的体积为$\frac{abc}{2}$.



(a) (b)

图 1-1-1

过 F,C,D 三点作一平面分割堑堵，得两个立方体，$FBADC$ 和 $FECD$，名分别为“阳马”和“鳖臑”〔图 1-1-1(b)〕，求得体积分别为$\frac{abc}{3}$和$\frac{abc}{6}$.

《九章算术》中计算体积的方法，与现在立体几何教科书中的方法基本相同。由此可见，我国古代对于空间图形有丰富的想象力和高度的技能技巧。

我国古代的数学著作还有《孙子算经》，《五曹算经》，《夏侯阳算经》，《张邱建算经》，《五经算术》，《数术记遗》，《海岛算经》，《缉古算经》等，都有大量的几何知识。

中国古代关于 π 的研究闻名于世。

中国古代最初使用“经一周三”，人称“古率”，《周髀算经》和《九章算术》均用古率。

公元初汉朝刘歆设计制造了一种铜质的圆柱形标准量器，

名叫"律嘉量斛"。根据铜斛上使用的铭文，知道刘歆使用的是

$$\pi \doteq 3.1547.$$

东汉张衡（公元78—139）求过两个新率：

$$\pi \doteq \sqrt{10} \text{ 和 } \pi \doteq \frac{92}{29},$$

它们近似于 3.1623 和 3.1724，比刘歆的要差。$\pi \doteq \sqrt{10}$在阿拉伯和印度的数学书上也曾提到过，但比张衡迟了几百年。

东汉蔡邕（公元133—192）曾说"玉衡的直径是八寸，圆周二尺五寸强"，可见他认为

$$\pi > \frac{25}{8} = 3.125.$$

三国时王蕃提出"周一百四十二而径四十五"，即

$$\pi \doteq \frac{142}{45} \doteq 3.155.$$

上述结果在古书上都未提到求法，大概是凭经验得出的。

首先根据科学方法推算圆周率的近似值的，当推刘徽。他的算法叫"割圆术"，不但提供了圆周率的比较精确的数值，还奠定了后世计算圆周率的基础，同时还显示出刘徽能用极限概念来考虑问题。

《九章算术·方田章》中"圆田求积"一题下面刘徽的注，所讲的就是求圆周率的方法。刘徽认为古率 $\pi \doteq 3$ 是圆内接正六边形周长与直径之比，较真值为小而且相差很大。于是他把圆内接正六边形各边所对的弧平分，作出圆周的内接正十二边形，利用勾股定理求它的边长。照此继续把弧分下去，顺次可求内接正 24，48，96，…边形的边长。边数越多，正多边形的周长就越接近圆周长，所得的近似值就越精确。

现在分三步说明刘徽的算法：

（1）求内接正n边形的边长：

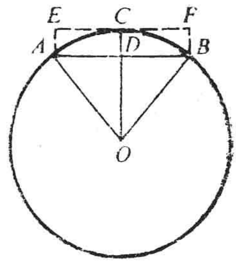


图 1-1-2

如图 1-1-2，设圆O的半径

$$OA=OB=OC=1,$$

AB是正n边形的一边，长为l_n，C是$\overset{\frown}{AB}$的中点，那么AC和CB是圆内接正$2n$边形的边，长为l_{2n}，由勾股定理得

$$OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=\sqrt{1-\left(\frac{l_n}{2}\right)^2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{4-l_n^2},$$

$$DC=OC-OD=1-\tfrac{1}{2}\sqrt{4-l_n^2},$$

所以 $$l_{2n}=AC=\sqrt{\left(\frac{l_n}{2}\right)^2+\left(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{4-l_n^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{4-l_n^2}}. \qquad (1)$$

（2）由边长求面积：

因为 $AB\perp OC$，$S_{AOBC}=\tfrac{1}{2}OC\times AB=\tfrac{1}{2}l_n$，

所以圆内接正$2n$边形的面积

$$S_{2n}=n\cdot\tfrac{1}{2}l_n=\tfrac{1}{2}nl_n. \qquad (2)$$

（3）定不足近似值和过剩近似值：

作以AB为底、DC为高的矩形$ABFE$，设圆内接正n边形的面积为S_n，则

$$S_{ABEF}=2S_{\Delta ABC}=2\cdot\frac{1}{n}(S_{2n}-S_n),$$

$$n\cdot S_{ABFE}=2(S_{2n}-S_n).$$

显然 $$2(S_{2n}-S_n)+S_n=S_{2n}+(S_{2n}-S_n)>\pi,$$

所以 $$S_{2n}<\pi<S_{2n}+(S_{2n}-S_n). \qquad (3)$$

刘徽根据上面的三个结果，从圆内接正六边形算起。由

（1）式

$$l_{12}=\sqrt{2-\sqrt{4-1^2}}\doteq 0.517638,$$

由（2）式 $S_{24}\doteq\frac{1}{2}\times 12\times 0.517638=3.105828,$

$$S_{48}\doteq 3.132627,$$

$$S_{96}\doteq 3.139344,$$

$$S_{192}\doteq 3.141024,$$

如果到此为止，则

$$S_{192}+(S_{192}-S_{96})\doteq 3.141024+(3.141024-3.139344)=3.142704,$$

由（3）式得 $3.141024<\pi<3.142704$.

这个结果显然有两位小数是准确的，于是刘徽定

$$\pi\doteq 3.14=\frac{157}{50},$$

后人称之为“徽率”。

在《九章算术》的注里，求到 $\pi\doteq 3.14$ 后，还有一大段文字，说明如果继续计算到圆内接正3072边形，可得

$$\pi\doteq\frac{3927}{1250}=3.1416.$$

南北朝时，何承天（370—447）、皮延宗（445前后）和祖冲之（429—500）三人都研究过圆周率，其中祖冲之贡献最大。

据《隋书·律历志》记载，祖冲之推算的结果为

$$3.1415926<\pi<3.1415927.$$

他称不足近似值为“朒数”，过剩近似值为“盈数”。祖冲之又定

约率为：$\pi=\dfrac{22}{7}$，

密率为：$\pi=\dfrac{355}{115}$.

可惜祖冲之的算法失传了。

密律是表圆周率的“最佳近似分数”之一。比欧州人发现它要早一千多年。

§2 古代埃及和巴比伦的几何

古代埃及在几何方面的成就是十分巨大的。据古希腊历史学家海罗都斯（公元前5世纪人）的记述：“埃及王拉姆哲斯二世为了征收田税，把等积的土地分配给农民。由于尼罗河每年的定期泛滥，地界遭到毁坏时，要向国王申请，派人重新丈量，根据损失按比例收税。这样在埃及就产生了几何知识，再传到希腊。”希腊语 *Geometria* 即“土地＋测量法”，可见几何的名称来源于土地测量。

我们对埃及数学的认识主要来自两本纸草书。一本是1858年苏格兰人兰德从埃及一个金字塔中发现的，它是埃及国王的秘书阿默斯于公元前1650年写的，书名是《阐明对象中一切黑暗的、秘密的事物的指南》，含有85个问题。分三章，一是算术，二是几何，三是杂题。包括分数计算问题，分数应用问题，耕地面积求法，谷物仓库容积求法以及有关计算金字塔的问题等。

据书中记载，古埃及人已掌握了矩形、三角形和梯形的面积求法，并给出了计算圆面积的方法：

问题 已知圆形土地的直径是9尺，问它的面积等于多少？

答：直径减去它自身的$\frac{1}{9}$，剩下8，再乘以8，得64，这就是所求土地的面积。

如果用 d 表示圆的直径，A表示圆面积，即

$$A=\left(\frac{8}{9}d\right)^2=\frac{64}{81}d^2.$$

与现在的公式$A=\frac{1}{4}\pi d^2$比较，可知其使用的π的近似值为

$$\pi\doteq 3.1650,$$

与$\pi\doteq 3.14$的误差仅0.02，这在四千年前实在了不起。根据某些数学史家推测，这个结果大概是用实验的办法得到的。先在平地上画一个直径为d的圆，用谷子铺满它，数一数谷子的粒数，再用d为边长画一个正方形，同样用谷粒把它铺满，再数一数谷子的粒数，最后计算两种粒数之比。这样反复多次实验，然后归纳出$\frac{64}{81}$这个比数来。

另一本描述古埃及数学的书是俄国人格列尼茨夫在1893年发现的莫斯科纸草书，含有25个问题。从书中令人吃惊地发现，古埃及人竟然掌握了正棱台的体积公式。莫斯科纸草书中第14题记载：正四棱台上底边长为2，下底边长为4，高为6，体积是$4^2+2\cdot4+2^2$再乘上6的$\frac{1}{3}$，得56.这正好是将上底边长$a=2$，下底边长$b=4$，高$h=6$，代入公式

$$V=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

的结果。

埃及的金字塔是世界的一大奇迹。金字塔的建造需要高度的建筑技巧和不少几何知识。如最大的金字塔高146.5米，基底正方形每边长233米。根据现代研究，底边长度的误差仅1.6厘米，是全长的$\frac{1}{14000}$；基底直角的误差只有12″，是直角的$\frac{1}{27000}$。金字塔的四个面，正向着东南西北，底面正方形两个边与正北的偏差，一个仅2′30″，一个仅5′30″。四千年前，