

高等数学教程

第四卷 第二分册

B. И. 斯米尔诺夫著

谷超豪 金福临译

人民教育出版社

高等数学教程

第四卷 第二分册

B. И. 斯米尔诺夫著

谷超豪 金福临译

人民教育出版社

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的、斯米尔诺夫 (В. И. Смирнов) 著 “高等数学教程” (Курс высшей математики) 第四卷 1953 年第三版译出的。

本书(第四卷)中译本暂分二分册出版。

简 装 本 说 明

目前 850×1168 毫米规格纸张较少, 本书暂以 787×1092 毫米规格纸张印刷, 定价相应减少 20%。希鉴谅。

高 等 数 学 教 程

第四卷 第二分册

В. И. 斯米尔诺夫著

谷超豪 金福临译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

国营五二三厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012.0336 开本 787×1092 1/32 印张 16 10/16

字数 398,000 印数 39,001—119,000 定价 1.23 元

1958 年 7 月第 1 版 1979 年 8 月陕西第 12 次印刷

目 录

第三章 偏微分方程的一般理論

§ 1. 一阶方程(313)

99. 具有两个自变量的綫性方程(313) 100. 柯西問題和特征綫(316)
101. 任意多个自变量的情形(321) 102. 例(328) 103. 輔助定理
(329) 104. 非綫性一阶方程(333) 105. 特征流形(337) 106. 柯西
方法(339) 107. 柯西問題(341) 108. 解的唯一性(343) 109. 奇异
情形(346) 110. 任意个数自变量(348) 111. 全积分, 通积分和奇积分
(351) 112. 全积分和柯西問題(354) 113. 例(356) 114. 任意个数
自变量的情形(360) 115. 雅可比定理(363) 116. 两个一阶方程的方
程組(364) 117. 拉格朗日-夏比方法(366) 118. 綫性方程組(369)
119. 完全組和雅可比組(371) 120. 完全組的积分法(373) 121. 普
阿松括号(375) 122. 雅可比方法(377) 123. 标准組(379) 124. 例
(380) 125. 优級数法(381) 126. 柯瓦列夫斯卡娅定理(385) 127.
高阶方程(391)

§ 2. 高阶方程(393)

128. 二阶方程的类型(393) 129. 常系数方程(395) 130. 两个自变
量时的标准形式(397) 131. 柯西問題(400) 132. 特征長条(403)
133. 高阶导数(405) 134. 实的和虚的特征(409) 135. 基本定理
(410) 136. 中間积分(412) 137. 孟日-安培尔方程(414) 138. 任
意个数自变量时的特征(414) 139. 双特征(417) 140. 与变分問題的
联系(422) 141. 閘断曲面的傳播(424) 142. 强性閘断(427) 143.
黎曼方法(430) 144. 特征的初始条件(435) 145. 存在定理(436)
146. 逐次逼近法(438) 147. 格林公式(440) 148. 索伯列夫公式
(447) 149. 索伯列夫公式(續)(450) 150. 函数 σ 的作出(453)
151. 初始条件的一般情形(458) 152. 推广的波动方程(461) 153.
任意个数自变量的情形(463) 154. 基本不等式(466) 155. 解的唯一
性和連續相关性的定理(471) 156. 波动方程的情形(475) 157. 輔助
命題(479) 158. 波动方程的广义解(484) 159. 橢圓型方程(487)
160. 普阿松方程的广义解(491)

§ 3. 方程組(494)

161. 方程組的特征(494) 162. 运动学的相容条件(499) 163. 动力

学的相容条件(502) 164. 流体动力学方程(503) 165. 弹性学方程(506) 166. 各向异性弹性体(507) 167. 电磁波(510) 168. 弹性学中的强性间断(514) 169. 特征和高频率(519) 170. 两个自变量的情形(521) 171. 例(523)

第四章 边值问题

§ 1. 常微分方程的边值问题(526)

172. 二阶线性方程的格林函数(526) 173. 边值问题化为积分方程(530) 174. 格林函数的对称性(533) 175. 边值问题的特征值与特征函数(534) 176. 特征值的符号(537) 177. 例(539) 178. 推广的格林函数(541) 179. 勒上特多项式(547) 180. 埃尔密脱函数与勒盖尔函数(550) 181. 四阶的方程(552) 182. B. A. 斯捷克洛夫的精确化的展开定理(554) 183. 热传导方程的富里埃方法的有效性(559) 184. 振动方程的富里埃方法的有效性(561) 185. 唯一性定理(564) 186. 特征值与特征函数的极值性质(567) 187. 柯朗定理(571) 188. 特征值的渐近表示(573) 189. 特征函数的渐近表示(577) 190. 李茨方法(580) 191. 李茨的例子(582)

§ 2. 椭圆型方程(584)

192. 牛顿势函数(584) 193. 双层势函数(588) 194. 单层势函数的性质(597) 195. 单层势函数的法线导数(599) 196. 单层势函数的法线导数(续)(602) 197. 法线导数的平均值(604) 198. 单层势函数沿任何方向的导数(607) 199. 对数势函数(611) 200. 积分公式与平行曲面(614) 201. 调和函数序列(619) 202. 拉普拉斯方程的内部边值问题的提法(623) 203. 平面上的外部问题(625) 204. 凯尔文变换(629) 205. 诺伊曼问题解的唯一性(633) 206. 三维空间边值问题的解法(637) 207. 积分方程的研究(639) 208. 关于解边值问题的结果的综述(645) 209. 平面上的边值问题(648) 210. 球函数的积分方程(650) 211. 辐射着的物体的热平衡(651) 212. 许瓦兹方法(653) 213. 引理的证明(655) 214. 许瓦兹方法(续)(658) 215. 次调和函数与优调和函数(662) 216. 辅助的命题(665) 217. 上函数与下函数法(666) 218. 边界值的研究(670) 219. n 维空间中的拉普拉斯方程(675) 220. 拉普拉斯算子的格林函数(677) 221. 格林函数的性质(680) 222. 平面上的格林函数(683) 223. 例(687) 224. 格林函数与非齐次方程(689) 225. 特征值与特征函数(694) 226. 特征函数的法线导数(698) 227. 特征值与特征函数的极值性质(700) 228. 赫姆荷兹方程与辐射原理(702) 229. 唯一性定理(705) 230. 极限振幅原理(707) 231. 赫姆荷兹方程的边值问题(709) 232. 电磁波的绕射(714) 233. 磁场强度向量(716) 234. 椭圆型方程狄利克雷问题的解

唯一性(718) 235. 方程 $\Delta v - v\lambda = 0$ (721) 236. 特征值的渐近表示(726) 237. 辅助定理的证明(731) 238. 更一般形式的线性方程(740) 239. 二阶线性椭圆型方程(742) 240. 格林张量(746) 241. 弹性理论的平面静力学问题(748)

§ 3 抛物型与双曲型方程(751)

242. 热传导方程的解对初始条件、边值条件与自由项的相关性(751)
243. 一维情形中的热传导方程的势函数(753) 244. 多维情形的热源(756) 245. 热传导方程的格林函数(753) 246. 拉普拉斯变换的应用(759) 247. 有限差分的应用(763) 248. 富里埃方法(767) 249. 非齐次方程(769) 250. 热传导方程解的性质(773) 251. 在一维情形下的广义单层势函数与双层势函数(776) 252. 次抛物函数与优抛物函数(782) 253. 波动方程解的基本不等式(783) 254. 非齐次方程的情形(787) 255. 富里埃方法与广义解(793) 256. 富里埃级数的研究(798) 257. 关于迴道的假设(805) 258. 辅助的命题(806) 259. 迴道积分的变换(809) 260. 基本不等式的证明(881) 261. 特征函数的导数(814) 262. 辅助命题的证明(815) 263. 球的边值问题(820) 264. 球内部的振动(824) 265. 解的研究(828) 266. 电报方程的边值问题(831)

俄汉名词索引(834)

第三章 偏微分方程的一般理論

§ 1. 一阶方程

99 具有兩個自變量的綫性方程 我們已不止一次地遇到含有未知函数偏导数的各种类型的微分方程,它們常是一些形狀很特殊的方程,是从数学物理的具体問題中产生的。本章的目的,要闡明偏微分方程的一般理論;而我們的敘述就从一阶方程的理論的研究开始。

一个含自变量 $x_1, \dots, x_n$ 的一个未知函数 u 的一阶方程的形狀为

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0,$$

其中 $x_1, \dots, x_n$ 是自变量, 而 $p_k = u_{x_k}$ 是未知函数 u 关于各自变量的偏导数。我們首先研究关于偏导数 p_k 是綫性的方程,也就是下面形狀的方程:

$$(1) \quad a_1(x_1, \dots, x_n, u)p_1 + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u)p_n = c(x_1, \dots, x_n, u),$$

而系数 a_k 和自由項 c 都是所有自变量 x_k 和未知函数 u 的給定的函数。因为函数 u 本身在系数和自由項中可以任意方式出現,有时說这样的方程不是綫性的,而叫做拟綫性方程。这一段我們只对兩個自变量的情形来考虑形狀 (1) 的方程。在这一特別情形,自变量通常用字母 x 和 y 来記,而偏导数照常以下面方式来記: $p = u_x$ 及 $q = u_y$ 。因此,本段研究的对象就是下面形狀的方程:

$$(2) \quad a(x, y, u)p + b(x, y, u)q = c(x, y, u).$$

回忆一下我们很早就曾见到过线性偏微分方程[II; 21],并且知道形状(2)的方程的积分问题和某一常微分方程组的积分问题是等价的。我们将对过去所得的结果,补充一些新的事项,它们对于进一步研究更复杂的问题是有意义的。

给定的函数 $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$, 和 $c(x, y, u)$ 在空间 (x, y, u) 确定了某个方向场,就是说,在空间的每一定点有一个方向,它的方向余弦与 a, b, c 成比例。方向场确定这样的曲线族,其中任何一条曲线,它的每一点的切线合于在这点的场中的方向。这曲线族的获得,是下面常微分方程组积分的结果:

$$(3) \quad \frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)},$$

或者,如果用 ds 来记写出的这三个比的公共值,就有:

$$(4) \quad \frac{dx}{ds} = a(x, y, u); \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y, u); \quad \frac{du}{ds} = c(x, y, u).$$

量 p, q 及 -1 和所求曲面的法线的方向余弦成比例,于是方程(2)表示所求曲面的法线和场中方向正交的条件:

$$ap + bq + c(-1) = 0,$$

就是说,方程(2)归结到这样的要求,使得在所求曲面 $u = u(x, y)$ 上的每一点,由上述方向场所确定的方向落在曲面的切平面上。由方程组(4)所确定的曲线称为方程(2)的特征曲线或特征。若某一曲面 $u = u(x, y)$ 是方程(2)的特征曲线的几何轨迹,就是说,若曲面由满足方程组(4)的曲线 l' 所构成,则过这曲面上每一点的曲线 l' 的切线都落在曲面的切平面上,于是推知,这曲面满足方程(2),就是说,是这方程的积分曲面。因此,如果曲面 $u = u(x, y)$ 由方程(2)的特征曲线所构成,则这曲面是此方程的积分曲面。

我们假设曲面 $u = u(x, y)$ 在每一点有切平面,并且曲面的法线方向沿曲面连续地变动。也就是假设 $u(x, y)$ 的一阶偏导数是

存在和連續的。

以後說到積分曲面，我們就假定這個曲面具有上述性質。通常簡稱這樣的曲面為光滑的。

以上我們證明了，具有方程 $u = u(x, y)$ 且由特征曲綫組成的光滑曲面是積分曲面。倒過來說，不难看出，若某一光滑曲面滿足方程 (2)，即它為積分曲面，那末它可用特征曲綫來遮蓋。

實際上，若某曲面 S 滿足方程 (2)，則在它的每一点，方向 (a, b, c) 在 S 的切平面上。因此，我們在 S 上有了方向場。把這方向場所對應的一階常微分方程積出來，我們就得到在曲面 S 上並且滿足方程組 (4) 的曲綫 l' 。例如，方程

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)}$$

能作為這一階方程，其中 u 用它在曲面 S 的方程中的表达式 $u = u(x, y)$ 替代。假定說，積分所寫出的方程，我們得到 y 的通過 x 和任意常數 C 的表达式；把這個表达式代入公式 $u = u(x, y)$ ，對於 u 我們也得到通過 x 和 C 的表达式，這樣便有了遮蓋曲面 S 的曲綫族 l' 的方程。

在一階常微分方程的研究中，我們見到過，若對應於自變量的給定值，給定了未知函數所取的初值，未知函數就能完全確定 [II; 50, 51]。如果能夠求出一般積分的話，由這些初值就可以確定一般積分所含的任意常數。可是只要借助於證明存在性與唯一性定理時所用過的逐次逼近法 [II; 51]，就是不知道一般積分，也可以由初始值來確定解。方程 (2) 的通解所含的已經不是任意常數，而是任意函數 [II; 22]，在這情形下按初始條件的定解問題可表述為以下方式：確定方程 (2) 的積分曲面，使它通過空間 (x, y, u) 的某給定曲綫 l 。如果我們用 λ 記曲綫 l 在平面 (x, y) 上的投影，於是上述問題化為求方程 (2) 的這樣的解，使它在曲綫 λ 上各

点取給定值的問題。先来拟定所提出的問題的解法 [II; 22]。設 M_0 是曲綫 l 上的某一点, 把它的坐标看作由方程組 (4) 所确定的函数的初始值。按照存在性与唯一性定理, 得到通过这点 M_0 的完全确定的特征綫。对曲綫 l 的每一点皆这样做, 我們得到一族特征綫; 假定它們構成某曲面 S 。它就通过曲綫 l , 且按上面所說, 就是方程 (2) 的积分曲面。反之, 如前面所說的一样, 方程 (2) 的每一积分曲面, 可由特征綫組成, 也就是由滿足方程組 (4) 的曲綫所組成。由于取 l 上的点的坐标作为这些解的初始条件, 因此, 我們可以肯定, 用上面所述方法来确定通过曲綫 l 的积分曲面是唯一可能的; 严格地說, 就是問題的解是唯一的, 并且所求积分曲面是通过曲綫 l 上各点的特征綫的几何軌迹。

为严格地推导問題的解的存在性与唯一性的証明, 需要对方程 (4) 的右边作某些假定, 并且也要对曲綫 l 加上某些重要的附加条件。例如, 若給定的曲綫 l 本身就是特征綫, 則按上述方法, 从 l 上的各点引特征綫不能导出曲面而仍只是曲綫 l 。在这种情形下, 解將有無穷多 [II; 23]。实际上, 若过曲綫 l 上的某一点引曲綫 l_1 , 它就不是特征綫。通过这曲綫上的各点引特征綫 (給定的曲綫 l 也在其中), 我們得到通过已給曲綫 l 的积分曲面。注意到选取 l_1 时的任意性, 我們就看出: 如果給定的曲綫 l 是特征綫, 問題就有無穷多的解。也可能發生問題根本沒有解的情况。当通过曲綫 l 上点的特征綫在这曲綫的鄰域并不構成有显式方程 $u = u(x, y)$ 的曲面时, 其中 $u(x, y)$ 是單值連續, 且有連續的一阶偏导数, 就屬於这种情形。例如, 要是所說到的特征綫形成母綫平行于 u 軸的柱面就是如此。在下一段, 我們就来講述所提出的問題有一个确定解的解析条件。

100. 柯西問題和特征綫 柯西問題通常指的是前面列出的关于确定通过已給曲綫 l 的方程 (2) 的积分曲面的問題。为了深

入研究這個問題的解的存在性與唯一性問題，我們必需利用常微分方程論中的一個定理，這就是：

定理 設微分方程組

$$(5) \quad \frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots, y_n) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

的右边是其所有變量的在某一區域內的連續函數，這區域由下面不等式所確定：

$$(6) \quad |x-a| \leq A; |y_k-b_k| \leq B \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

此外，若 f_k 在這區域內有連續偏導數 $\frac{\partial f_k}{\partial y_s}$ 存在，則由於存在性與唯一性定理，對區域 (6) 內的任意初始值 $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ 所確定的方程組 (5) 的解

$$y_k = \varphi_k(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

有關於初始值的偏導數 $\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_s^0}$ ，它們是其所含變量 $(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ 的連續函數。

為了不中斷敘述，我們把這個定理的證明延到後一段去。

現在來解決柯西問題。假定曲綫 l 的方程以參數的形式給出：

$$(7) \quad x_0 = x_0(t); y_0 = y_0(t); u_0 = u_0(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

且設方程 (4) 的右边在空間 (x, y, u) 的含曲綫 l 在內的某一區域內滿足上述定理中的條件。取 l 上的點的坐標作為在 $s=0$ 的初始值，則對充分接近於零的 s ，得到方程組 (4) 的解：

$$\begin{aligned} x &= x(s, x_0, y_0, u_0); & y &= y(s, x_0, y_0, u_0); \\ & & u &= u(s, x_0, y_0, u_0), \end{aligned}$$

或者，由於 (7)：

$$(8) \quad x = x(s, t); \quad y = y(s, t); \quad u = u(s, t).$$

假設方程 (7) 的右边關於 t 連續可微，並利用上面的定理，我

們可以肯定函数(8)不仅对 s 而且对 t 也有連續导数。对区間 $t_0 < t < t_1$ 中任意給定的 t , 函数(8)对于充分接近于零的所有 s 是确定的。作出这些函数中的前面两个关于 s 和 t 的函数行列式:

$$(9) \quad \Delta = x_s y_t - x_t y_s.$$

对以后重要的是这个行列式异于零还是等于零这件事。我們首先考虑沿曲綫 l 当 $\Delta \neq 0$ 的情形, 其次, 再考虑沿曲綫 l 当 $\Delta = 0$ 的情形。从第一种情形开始:

$$(10) \quad \Delta \neq 0 \quad (\text{沿曲綫 } l),$$

就是說, 当 $s=0$ 时 $\Delta \neq 0$, 不仅如此, 由于导数的連續性, 在初始值 $s=0$ 与值 t 的某一鄰域內 $\Delta \neq 0$ 也成立, 而 t 对应于曲綫 l 的某一点 M 。此时, 从(8)中的前两个方程, 对曲綫 l 上点 M 的坐标 (x, y) 的某一鄰域中的一切 x 及 y , 可以关于 s 及 t 解出, 这解是唯一的, 并且得到的函数 $s(x, y)$, $t(x, y)$ 有一阶連續导数 [III; 19]。將所得的函数 $s(x, y)$ 及 $t(x, y)$ 代入(8)中的第三个方程, 則在所述的鄰域中得到函数 $u(x, y)$, 它有連續一阶导数, 并且曲面 $u = u(x, y)$ 在 M 的鄰域含有曲綫 l 的一段。从前段所說的几何学上的看法, 直接推出 $u(x, y)$ 滿足方程(2)。我們以下也要用分析的方法来檢驗这事实。

应当指出, 我們仅在曲綫 l 上任一給定点 M 的某一鄰域內作出解 $u(x, y)$, 或者說, 得到了問題的局部解。在加上某些条件到 a, b, c 及曲綫 l 上时, 可以相信, 在整个曲綫 l 的某一鄰域內, 即对平面 (x, y) 上所有充分接近于 $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$ 的一切 x 和 y , 是可能作出积分曲面来的。这里假設 $x'_0(t)$, $y'_0(t)$ 不同时为零。类似这种結論的确切說法將在下段指出。

关于在平面 (x, y) 上的某一預先指定的区域內, 方程的解的存在問題是很难決定的。可以作出平面 (x, y) 上的一个区域 B , 和在其上有任何阶导数的函数 $b(x, y)$, 使得对于方程

$$u_x + b(x, y)u_y = 0,$$

在全区域 B 上有連續一阶导数的解, 仅仅是 $u = \text{常数}$ 。

現在驗證, 所作函数 $u(x, y)$ 确实是方程 (2) 的解。利用复合函数的求导数法則及方程 (4), 可以写出:

$$\frac{du}{ds} = u_x a + u_y b。$$

但是 $\frac{du}{ds} = c$, 由此推知, $u(x, y)$ 确实滿足方程 (2)。

問題的解的唯一性, 直接从每个积分曲面由特征曲綫所構成的这个事实推出。現在我們从解析上来証明它。設 $u = u(x, y)$ 是某一积分曲面, 并且 $u(x, y)$ 有一阶連續导数。对常微分方程組

$$(11) \quad \frac{dx}{ds} = a[x, y, u(x, y)]; \quad \frac{dy}{ds} = b[x, y, u(x, y)].$$

求积分, 并将所得的解代入函数 $u = u(x, y)$, 在我們的积分曲面上就得到一族曲綫。

不难驗證, 这时函数 u 滿足 (4) 中第三个方程。实际上, 由于 (11):

$$\frac{du}{ds} = u_x a + u_y b。$$

但是 $u = u(x, y)$ 是积分曲面, 就是說, $u_x a + u_y b = c$, 因此, $\frac{du}{ds} = c$ 。

这样, 上面所講的遮盖曲面 $u = u(x, y)$ 的曲綫确实是特征綫。于是, 在条件 (10) 之下, 柯西問題有唯一的解。我們在考慮非綫性一阶方程时还要回到唯一性問題。

現在假定沿曲綫 l , 即当 $s=0$ 时, 我們有:

$$(12) \quad \Delta = x_s y_t - x_t y_s = 0。$$

在这种情况下要証明, 如果通过曲綫 l 且有一阶連續导数的积分曲面 $u = u(x, y)$ 存在, 則这曲綫一定是特征綫。在这里和以前一样, 要是我們說曲面 $u = u(x, y)$ 通过曲綫 l , 那末应了解为是

局部的,就是說,只考虑 l 的某一段。

將假設 a 及 b 沿 l 不等于零。考虑到方程 (4) 中的前两个,我們可写条件 (12) 为形状:

$$(13) \quad \frac{x_t}{a} = \frac{y_t}{b} = k \quad (s=0),$$

其中字母 k 用来記所写比式的公共值。設 $u = u(x, y)$ 是通过 l 的积分曲面,將式子 $x = x_0(t)$ 及 $y = y_0(t)$ 代入 $u(x, y)$, 关于 t 求导并利用 (13), 我們得到: $\frac{du}{dt} = u_x k a + u_y k b$ 。注意到 $u = u(x, y)$ 是方程 (2) 的解并利用这个方程,更可写出 $\frac{du}{dt} = k c$, 这样我們就导出方程組:

$$\frac{x_t}{a} = \frac{y_t}{b} = \frac{u_t}{c} \quad (s=0),$$

于是推出曲綫 l 是特征綫。因此, 若 $\Delta = 0$, 則为了要使通过 l 的积分曲面存在, 这曲綫就必须是特征綫。这时, 如在前段見過的一样, 通过曲綫 l 有無穷多积分曲面。在上面推导証明时, 对我們來說, 通过 l 的积分曲面 $u = u(x, y)$, 在这綫上各点有連續导数当然是重要的; 可能有这种情形, 像我們將要在例題中見到的一样, l 不是特征綫, 而沿着它 $\Delta = 0$, 并且竟还存在着通过 l 的积分曲面, 可是 $u(x, y)$ 的偏导数在 l 的各点不复連續, 換句話說, 曲綫 l 是积分曲面的奇綫。若 l 不是特征綫, 而沿着它 $\Delta = 0$, 那末就是說, 沿曲綫 l

$$\frac{x_t}{a} = \frac{y_t}{b} \neq \frac{u_t}{c}。$$

应当指出方程組 (4) 的一个特性。輔助参数 s 在方程的右边不出現, 并且任意常数之一是作为 s 的附加項而出現的。这个任意常数不起主要作用而归結为选 s 初始值的任意性。因此, 我們在求这方程組的积分时有两个实质任意常数。要是写方程組 (4) 为形状 (3), 这事实便立即清楚了。

回忆起,若是求隐式 [II; 21]:

$$(14) \quad \varphi(x, y, u) = C$$

的解,其中 C 是某一任意常数,则拟綫性非齐次方程 (2) 可化为純綫性齐次方程。按照隐函数求导的法則,我們有

$$u_x = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u}; \quad u_y = -\frac{\varphi_y}{\varphi_u},$$

方程 (2) 化为純綫性齐次方程:

$$(15) \quad a(x, y, u)\varphi_x + b(x, y, u)\varphi_y + c(x, y, u)\varphi_u = 0.$$

对应的常微分方程組是 (3)。若

$$\varphi_1(x, y, u) = C_1; \quad \varphi_2(x, y, u) = C_2$$

是这方程組的两个独立的解,則

$$\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2)$$

也是方程 (15) 的解,其中 F 为 φ_1 及 φ_2 的任意函数。我們曾見到如何从柯西問題的条件来确定这函数的形狀 [II; 23]。

上面的說明引起以下的問題。我們求方程 (2) 的解时,把这解看作是屬於具隐式方程 (14), 而含有任意常数 C 的这一类解中的。不难証明,用这样的方法,我們并未丢失方程的任何一个解。簡單地說,由于柯西問題初始条件的任意性,这里的问题归結到,我們可把方程的任何解看作是屬於“含任意常数的整个解族中的; 关于这个任意常数解出来,我們就确信任何解可从形狀 (14) 的式子得到。我們可能丢失的仅是那些不能由上述柯西問題解法的过程中得到的解 (奇解)。如果函数 a , b 及 c 滿足某些一般的条件,这样的解就不会有了。至于詳細的証明,我們不去講它。

101. 任意多个自变量的情形 考虑有任意个数自变量的綫性方程:

$$(16) \quad a_1(x_1, \dots, x_n, u)p_1 + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u)p_n = c(x_1, \dots, x_n, u).$$

以后我們常常假設系数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 对所考虑的变数 $x_1, x_2, \dots, x_n, u$ 之值來說不同时为零, 就是說, $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$ 。在方程 (16) 的研究中, 我們將利用类似于三維空間的几何術語; 在这种情形下, 我們有坐标是 $(x_1, \dots, x_n, u)$ 的 $(n+1)$ 維空間。 m 維流形是指这空間中的一个点集, 其中的点的坐标能用 m 个任意参数来表示:

$$x_k = x_k(t_1, \dots, t_m); \quad u = u(t_1, \dots, t_m) \quad (k=1, 2, \dots, n);$$

并且我們假設从写出方程中的某 m 个能关于 $t_1, \dots, t_m$ 解出。当 $m=n$, 我們有 n 維流形, 將称之为曲面。若参数取为 $x_1, \dots, x_n$, 則有曲面的显式方程: $u = u(x_1, \dots, x_n)$ 。方程 (16) 的积分曲面的方程正应有这样的形狀。当 $m=1$ 时, 对应的一維流形称为 $(n+1)$ 維空間的曲綫。

方程 (16) 的特征曲綫由以下方程組确定:

$$(17) \quad \frac{dx_k}{ds} = a_k(x_1, \dots, x_n, u); \quad \frac{du}{ds} = c(x_1, \dots, x_n, u),$$

其中 s 是輔助参数。除了所有的 x_k 及 u 皆为常数的解而外, 这方程組的任一解都給出 $(n+1)$ 維空間的曲綫。由于 $a_1^2 + \dots + a_n^2 > 0$, 因而所有 x_k 和 u 皆为常数的解不可能存在。这曲綫的坐标可用参数 s 表示; 为了从这些曲綫作出曲面, 我們必須取和 $(n-1)$ 个任意参数有关的这种曲綫的一族。得到总共与 n 个参数有关的点集。若某一光滑曲面 $u = u(x_1, \dots, x_n)$ 是由与 $(n-1)$ 个参数有关的特征曲綫族所構成, 則它是方程 (16) 的积分曲面。实际上, $u(x_1, \dots, x_n)$ 关于 s 求导数并利用方程 (17) 得:

$$\frac{du}{ds} = \sum_{k=1}^n u_{x_k} a_k.$$

但是, 由于 (17) 中的最末一个方程, $\frac{du}{ds} = c$, 就推出方程 (16)。反之, 任一积分曲面可由与 $(n-1)$ 个参数有关的特征綫族所組成。

实际上,有了积分曲面 $u=u(x_1, \dots, x_n)$, 我們可从方程組

$$(18) \quad \frac{dx_k}{ds} = a_k[x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)] \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

确定 x_k , 并給出 $(n-1)$ 个任意常数。作为 s 的附加項的一个任意常数不起重要作用。將方程組 (18) 的解代入 $u=u(x_1, \dots, x_n)$ 的右边, 关于 s 求导数并利用方程 (16) 和 (18), 我們看到 u 就滿足方程 (17) 中的最末一个。

和在 [100] 中的一样, 我們假設 $u(x_1, \dots, x_n)$ 及方程 (17) 的右边都有連續一阶导数。

方程 (16) 的柯西問題是: 确定积分曲面使含有給定的 $(n-1)$ 維流形:

$$(19) \quad x_k = x_k(t_1, \dots, t_{n-1}); \quad u = u(t_1, \dots, t_{n-1}), \\ (k=1, 2, \dots, n),$$

而这些等式的右边, 在 $(n-1)$ 維空間 $(t_1, \dots, t_{n-1})$ 的某一区域 D 內連續且有連續一阶偏导数。

假設由导数 $\frac{\partial x_k}{\partial t_i}$ 所形成的矩陣的秩等于 $(n-1)$, 并且不同的值組 $(t_1, \dots, t_{n-1})$ 有不同的点 $(x_1, \dots, x_n)$ 对应。其次, 如上面提过的一样, 假設系数 $a_k(x_1, \dots, x_n, u)$ 及 $c(x_1, \dots, x_n, u)$ 在含有流形 (19) 在內的空間某区域 D 中有連續一阶导数。

在特殊情形下, 柯西問題中的这一条件可以是: 当自变量之一取給定的数值时, 給出未知函数 u 作为其余变量的函数:

$$(20) \quad u|_{x_1=x_1^{(0)}} = \varphi(x_2, \dots, x_n).$$

問題的解法完全和兩個自变量情形类似。表达式 (19) 当作求方程組 (17) 积分时的初始条件。这样, 我們得到下面形狀的解:

$$(21) \quad x_k = x_k(s, t_1, \dots, t_{n-1}); \quad u = u(s, t_1, \dots, t_{n-1}).$$

往后, 行列式: