

- 北京大学附属中学高三学生用书

数 学 分 册

(上 册)

北京大学附属中学数学教研组 编写

北 京 大 学 出 版 社

新登字(京)159号

图书在版编目(CIP)数据

数学分册(上)/北京大学附属中学数学教研组编写. —北京:北京大学出版社, 1993.9

北京大学附属中学高三学生用书

ISBN 7-301-02330-8

I. 数…

II. 北…

III. 数学-高中-学生用书

IV. G633.6

出版者地址: 北京大学校内(邮政编码: 100871)

排印者: 北京大学印刷厂

发行者: 北京大学出版社

经销者: 新华书店

版本记录: 787 × 1092毫米 16开本 15.375印张 384千字

1993年9月第一版 1993年9月第一次印刷

印数: 00001—8,000册

定 价: 8.00元

前 言

多年来,我们一直为没有一套比较理想的高三年级学生用书而感到遗憾。因此,我校高三教师一般都只能自己编写讲义或提纲印发给学生,学生也只能将教师在课堂上讲授的内容记在笔记本上,以备课下复习时使用。这样,不仅加重了师生双方的负担,同时也严重地影响了课堂教学效率的提高。从1977年起,我校各教研组的老师们在高三年级的教学实践中不断地进行探索,总结和积累了丰富的资料和经验,逐渐形成了一套具有北大附中特色的传统教案。目前,把这些教案用教材的形式相对固定下来的条件已经成熟。为此,我们在北京大学出版社的协助下,编写了这套《北京大学附属中学高三学生用书》,以便在今后若干年内,供我校高三年级使用。

这套学生用书目前共包括数学、语文、物理、化学、英语5个学科(共6分册),是我校教师在长期教学实践中积累起来的丰富的教学经验的结晶,充分体现了北大附中的办学指导思想,即“打好基础,培养能力,发展个性,提高素质”。我们认为:“打好基础”和“培养能力”两者是相辅相成、不可分割的。如果没有坚实的基础,所谓的“能力”只能是空中楼阁。往往有些同学在遇到问题时,会出现“一看就会,一做就错”这样一种眼高手低的毛病,就是因为他们基础打得不扎实的缘故。但是要真正打好基础,又不能单纯靠死记硬背,靠题海战术,“大运动量”训练来达到,这样获得的知识 and 训练出来的技能是不可能融会贯通和运用自如的。只有在教学过程中注意培养学生的学习能力,让他们在教材和教师的引导、启发下,通过研究、讨论,自己形成概念或自行探索出问题的结论,从而获得知识,提高能力。这样才能使学生对基础知识理解得更透彻,掌握得更牢固,运用得更自如。我们的这套学生用书就是以“在打好坚实基础的前提下提高学生的能力,通过提高学生的能力来使他们基础打得更扎实”这一辩证的教学思想为指导来编写的。

参加本套图书编写工作的有:数学特级教师陈剑刚,高级教师孙曾彪、董世奎、朱传渝、张宁、邓均;语文特级教师李裕德,高级教师吴祖兴、李学敏、张文敏;物理特级教师陈育林,高级教师刘宝振、林承慧、丁敬忠、迟永昌;化学高级教师刘石文、陶琅、刘建真、黄丽光、刘雅颜、张莺;英语一级教师孟学军、杨小洋等同志。

我们希望,这套学生用书的出版,不仅适时地为我校高三学生提供了教材,而且能为广大高三同学所欢迎,从而为其殷切期望提高自己学习能力和水平贡献出我们一点微薄的力量。由于编写时间仓促,难免有疏漏之处,恳切期望读者和专家们批评指正。

北京大学附属中学

1993年8月

编 者 说 明

为了我校高中毕业班数学总复习的需要,以提高课堂教学质量,帮助师生加深理解教学内容;为了帮助各界青年提高复习效果与质量,我们编写了这套教材。本教材共分四个部分:代数、立体几何、平面三角、平面解析几何,分成上、下两册书出版。

这套教材是在我校多年来高中数学教学与毕业总复习的实践基础上汇编、补充、整理而成,力求能反映我们对毕业总复习的教学指导思想与经验体会。根据教学大纲、全国统编教材与考试大纲的要求,根据我校的教学实际,组织编写本套教材。既立足于基础知识与基本方法的训练,又注意培养学生的分析问题与解决问题的能力;既强调知识的系统性,又突出总结分析问题的规律与解题方法;有利于学生与各界青年利用总复习的机会,既全面系统地复习基础知识与基本方法,又能在分析问题与解决问题的能力上得到考察与锻炼,便于读者在复习过程中总结与提高。

为了扩大学生的知识面与解题思路,这套教材的内容,在全国统编教材的基础上作了不少补充与引伸。在内容编排上,没有按照教科书上的顺序,而是按照初等数学的中心内容编排,有利于在总复习中突出课题的主题,有利于学生对所学知识的前后呼应与融会贯通。对内容较深、要求较高的课题,或超出考试大纲要求的内容,用*标出,供读者选读或参考。

这套教材的基础知识部分,大部分采取填空形式或问题形式,让学生课前预习,供其他读者思考与自测,并在教材上也可做必要的笔答,教师在课堂上除做必要的核对外,把精力集中在重点讲授上。我们在教材上编了号码,在每章后面汇集注解,读者可翻阅核对。这套教材的例题部分,不给出解题过程,让学生课前思考,教师在课堂上可加强提问、启发与重点分析或组织课堂讨论,最后作出总结。在每章后面汇集例题精解,给出题意分析、主要解题过程与答案。这套教材的练习部分,在每章后面汇集练习答案,对部分练习还做必要的提示。

这套教材是在平时教学实践的基础上,反复修改与补充,分工执笔编写。参加执笔编写的有陈剑刚、孙曾彪、董世奎、朱传渝、张宁、邓均等同志,教研组的其他同志提供了不少意见与素材。

这套教材是根据我校教学实际编写的,供我校高中毕业班使用,同时也提供给各兄弟学校与广大读者阅读与参考。根据编写这套教材的指导思想与特点,更适用于在总复习的第一阶段内使用。这套教材还会有错误与不足之处,请广大读者多提宝贵意见,我们可再作修改与补充,并向各位读者致以谢意。

北京大学附属中学数学教研组

1993年8月

目 录

代 数

第一章 集合与映射	(1)
一、集合的概念	(1)
二、专用的集合符号	(1)
三、列举法的应用	(1)
四、描述法的应用	(1)
五、元素与集合之间的关系	(2)
六、集合与集合之间的关系	(2)
七、映射	(5)
注解、例题精解、练习答案与提示	(6)
第二章 数	(8)
一、数系表	(8)
二、自然数	(8)
三、有理数	(8)
四、无理数	(9)
五、实数	(9)
六、比例的性质	(10)
七、复数	(11)
注解、例题精解、练习答案与提示	(21)
第三章 指数与对数	(32)
一、指数的概念	(32)
二、指数的运算	(32)
三、对数的概念	(33)
四、对数的运算	(34)
五、常用对数	(35)
六、指数方程	(35)
七、对数方程	(36)
八、形如 $x^{f(x)} = x^{g(x)}$ 的方程	(37)
注解、例题精解、练习答案与提示	(37)
第四章 不等式	(41)
一、不等式的概念	(41)
二、不等式的性质	(41)
三、绝对值不等式	(42)

四、各类不等式的基本解法	(42)
五、不等式的证明	(46)
六、方程的讨论	(51)
注解、例题精解、练习答案与提示	(52)
第五章 函数	(65)
一、函数的概念	(65)
二、函数的一般性质	(67)
三、基本初等函数	(69)
四、关于函数值的比大小的问题	(75)
五、关于画函数图像的问题	(76)
六、关于函数的极值与最值的问题	(78)
七、关于函数的定义域与值域的问题	(81)
注解、例题精解、练习答案与提示	(83)
第六章 数列与极限	(101)
一、数列的概念	(101)
二、等差数列与等比数列	(102)
三、等差数列与等比数列的综合练习	(104)
四、特殊数列的求和问题	(108)
五、数学归纳法	(109)
六、数列的通项公式与递推公式	(110)
七、数列的极限与函数的极限	(113)
注解、例题精解、练习答案与提示	(116)
第七章 排列、组合和二项式定理	(128)
一、基本原理	(128)
二、排列与组合	(128)
三、二项式定理	(130)
四、组合数的性质(即二项式系数的性质)	(131)
注解、例题精解、练习答案与提示	(133)

立体几何

第一章 直线和平面	(139)
一、点、直线、平面的基本性质	(139)
二、点、直线、平面之间的位置关系	(141)
三、直线与直线、直线与平面、平面与平面间的位置关系	(143)
四、距离和角(一)	(148)
五、距离和角(二)	(152)
六、两条异面直线间的距离	(154)
七、折叠问题	(156)
八、截面问题	(157)

注解、例题精解、练习答案与提示	(162)
第二章 多面体和旋转体	(201)
一、系统表	(201)
二、棱柱	(201)
三、棱锥、棱台	(205)
四、圆柱、圆锥、圆台	(210)
五、球	(213)
六、几何体之间的“接”与“切”	(216)
七、立体几何中的最值	(217)
注解、例题精解、练习答案与提示	(219)

一、集合的概念

什么叫集合？[1]

集合分为三类：无限集、有限集与空集。

集合有哪几种表示法？[2] 其中哪种表示法一般只能用来表示有限集？[3]

二、专用的集合符号

N 表示[4]集， Z 表示[5]集， Q 表示[6]集。

R 表示[7]集， C 表示[8]集， ϕ 表示[9]集。

R^+ 表示[10]集， R^- 表示[11]集， R^0 表示[12]集。

三、列举法的应用

用列举法表示下列集合。

1. 整数[13]；2. 整数而又小于12的所有自然数。[14]

3. 两两相线分别在坐标轴上，且边长为1的正方形的所有顶点。[15]

4. 下列各实系数方程分别可能有多少个实根？分别写出每一个方程所有可能的实根个数所组成的集合（不要计算具体数值）。

(1) $ax^2+bx^2+cx+d=0$ ($a \neq 0$)。[16]

(2) $ax^3+bx^3+cx^2+dx+d=0$ ($a \neq 0$)。[17]

(3) $x^2-2cx+1=0$ ($|c| \leq 1$)。[18]

四、描述法的应用

用描述法表示下列集合，这种表示形式都是唯一确定的。[19]

1. 不等于2的一切实数所组成的集合。[20]

2. 不等式 $x^2+5x-6 \leq 0$ 的解集并化简。[21]

3. 不等式 $x^2-5x+0 \geq 0$ 的解集并化简。[22]

4. 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ -3x \geq 12 \end{cases}$ 的解集并化简。[23]

代 数

第一章 集合与映射

一、集合的概念

什么叫集合？ [1]

集合分为三类：无限集、有限集与空集。

集合有哪几种表示法？ [2] 其中哪种表示法一般只能用来表示有限集？ [3]

二、专用的集合符号

N 表示 [4] 集， Z 表示 [5] 集， Q 表示 [6] 集，

R 表示 [7] 集， C 表示 [8] 集， $\emptyset$ 表示 [9] 集，

R^+ 表示 [10] 集， R^- 表示 [11] 集， $\overline{R}$ 表示 [12] 集。

三、列举法的应用

用列举法表示下列集合：

1. 能被 2 或 3 整除而又不大于 12 的所有自然数。 [13]

2. 两对角线分别在坐标轴上，且边长为 1 的正方形的所有顶点。 [14]

*3. 下列各实系数方程分别可能有几个实根？分别写出每一个方程所有可能有的实根个数所组成的集合 (k 重根算作 k 个根)：

(1) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$)； [15]

(2) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ($a \neq 0$)； [16]

(3) $x^2 - 2ax + 1 = 0$ ($|a| < 1$)。 [17]

四、描述法的应用

用描述法表示下列集合，这种表示形式都是唯一的吗？ [18]

1. 不等于 2 的一切实数所组成的集合。 [19]

2. 不等式 $x^2 + 5x - 6 < 0$ 的解集并化简。 [20]

3. 不等式 $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ 的解集并化简。 [21]

4. 方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$ 的解集并化简。 [22]

5. 方程组 $\begin{cases} s+t=3 \\ t+u=4 \\ u+s=5 \end{cases}$ 的解集并化简. [23].

6. 与 $-\frac{\pi}{3}$ 终边相同的所有角的集合. [24]

7. 所有第四象限的角的集合. [25]

8. 分别写出适合下列各条件的所有角 x 的集合:

(1) $\sin x = \frac{1}{2}$; [26] (2) $\cos x = -1$; [27] (3) $\operatorname{tg} x = 0$. [28]

9. 方程 $\sin x(\operatorname{tg} x - 1) = 0$ 的解集. [29]

10. 函数 $y = \frac{1}{\sin x(\operatorname{tg} x - 1)}$ 的定义域. [30]

11. 不在第一象限、第二象限、第三象限、第四象限的所有点的集合. [31]

12. 平面直角坐标系内,以原点为圆心, r 为半径的圆内或圆上的所有的点的集合. [32]

13. 以原点为圆心, 半径分别为 2 和 3 的两个同心圆所形成的圆环内的所有的点 (不包括任何一个圆周上的点) 的集合. [33]

14. 平面直角坐标系内 x 轴上方的所有的点 (不包括 x 轴上的点) 的集合. [34]

15. 以 y 轴为中心轴线的宽为 1 的长带子内 (包括边界) 的点的集合. [35]

16. 以原点为顶点, x 轴的正半轴为始边的角 α 满足 $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{3}{5}, \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5}, \end{cases}$ 写出角 α 终边上所

有的点的集合. [36]

*17. 直线 $y = \frac{1}{2}x + 3$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成的图形内的点 (包括周界上的点) 的集合. [37]

用描述法表示集合, 元素的属性可以用文字语言描述, 也可以用数学式子表达. 用描述法既可以表示无限集, 又可以表示有限集. 但是, 必须明确元素的符号以及描述元素属性的具体内容, 避免混淆, 譬如, 在下列集合中:

$\{x|y = \sqrt{4-x}\}$, 元素为自变量 x , 集合表示函数的定义域, 即 $\{x|x \leq 4\}$;

$\{x|y = \sqrt{4-x}, x \in N\}$, 集合仍表示函数的定义域, 是有限集 $\{1, 2, 3, 4\}$;

$\{y|y = 2x^2 + 1\}$, 元素为因变量 y , 集合表示函数的值域, 即 $\{y|y \geq 1\}$;

$\{(x, y)|y = 2x^2 + 1\}$, 元素为点 (x, y) , 集合表示满足函数式的点集, 即顶点为 $(0, 1)$ 且张口向上的抛物线;

$\{(x, y)|y = 2x + k, k \in R\}$, 元素为点 (x, y) , 集合表示以 2 为斜率的平行直线系.

五、元素与集合之间的关系

记号 $a \in A$ 读作 [38], 它表示 [39]; 记号 $a \notin A$ 读作 [40], 它表示 [41].

六、集合与集合之间的关系

1. 子集

- (1) 集合 A 是集合 B 的子集是指 [42], 记作 [43]. 怎样读?
- (2) 集合 A 是集合 B 的真子集是指 [44], 记作 [45].
- (3) 集合 A 与集合 B 相等是指 [46], 记作 [47]. 怎样读?
- (4) 记号 $\in$ 和 $\subset$ 有什么不同? [48]
- (5) 一个非空集合至少有几个子集? [49]
- (6) 一个集合由 3 个元素组成, 它共有 [50] 个不同的子集; 一个集合由 7 个元素组成, 它共有 [51] 个不同的子集; 一个集合由 n 个元素组成, 它共有 [52] 个不同的子集.
- (7) 如果 $A \subset B, B \subset C$, 则 A 与 C 之间的关系是 [53].
- (8) 数集 N, Z, Q, R, C 与 $\emptyset$ 之间的包含关系是 [54].

2. 交集

- (1) 集合 A 与集合 B 的交集是指 [55], 记作 [56].
- (2) 在右图 1-1 中, 画出集合 A 与集合 B 的交集.

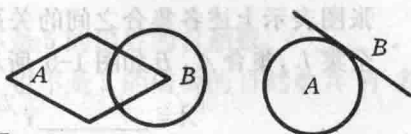


图 1-1

- (3) $\{\text{等腰三角形}\} \cap \{\text{直角三角形}\} = [57].$
- (4) $\{(x, y) | x + y = 3\} \cap \{(x, y) | 2x - y = 3\} = [58].$
- (5) $\{x | x^2 - 9 < 0\} \cap \{x | 0 \leq x \leq 4\} = [59].$
- (6) $\emptyset \cap \emptyset = [60]; A \cap \emptyset = [61]; A \cap A = [62].$

3. 并集

- (1) 集合 A 与集合 B 的并集是指 [63], 记作 [64].
- (2) 在图 1-2 中, 画出集合 A 与集合 B 的并集.
- (3) $\{\text{有理数}\} \cup \{\text{无理数}\} = [65].$
- (4) $\{x | 2 < x < 8\} \cup \{x | -3 \leq x \leq 5\} = [66].$
- (5) $\{x | x \neq -2, x \in R\} \cup \{x | x \neq 3, x \in R\} = [67].$
- (6) $\emptyset \cup \emptyset = [68]; A \cup \emptyset = [69]; A \cup A = [70].$
- (7) 如果 $A \subset B$, 则 $A \cap B = [71]; A \cup B = [72].$
- (8) 在 $A, B, A \cap B, A \cup B$ 四个集合之间有哪些确定的包含与被包含的关系? 试用符号表示出来. [73]

4. 补集

- (1) 集合 A 在全集 I 中的补集是指: [74], 记作 [75].
- (2) A 和 I 的关系是 [76]; $\bar{A}$ 和 I 的关系是 [77].
- (3) 在图 1-3 中, 画出集合 A 的补集.

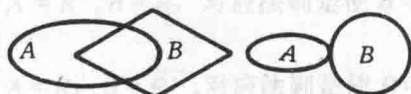


图 1-2

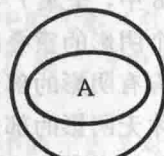


图 1-3

- (4) 若全集为 I , 则 $A \cap \bar{A} = [78]; A \cup \bar{A} = [79]; \bar{\bar{A}} = [80].$ 若 $A = I$, 则 $\bar{A} = [81].$
- (5) 已知 $I = R, A = \{x | x^2 - 9 \geq 0\}$, 则 $\bar{A} = [82].$

练习 1.1

1 设 R 表示实数集, C 表示复数集, C_1 表示纯虚数集, C_2 表示虚数集. 则 $C_2 \cap R =$;
 $C_1 \cap C_2 =$; $C \cap R =$; $C_2 \cup R =$; $C_1 \cup C_2 =$; $C \cup C_2 =$.

2 已知全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 5\}$. 则:
 $\bar{A} =$; $\bar{B} =$; $A \cup B =$;
 $A \cap B =$; $\overline{A \cap B} =$; $\overline{A \cup B} =$;
 $\overline{A \cap \bar{B}} =$; $\overline{\bar{A} \cap B} =$;
 $\overline{A \cup \bar{B}} =$.

从中还能发现什么规律?

3 全集 $I = \{\text{四边形}\}$, $A = \{\text{平行四边形}\}$, $B = \{\text{矩形}\}$, $C = \{\text{菱形}\}$, $D = \{\text{正方形}\}$. 用一张图表示上述各集合之间的关系(图1-4).

4 全集 I , 集合 A, B 如图 1-5 所示. 则

$$\bar{A} = \text{ ; } \bar{B} = \text{ ; } \overline{A \cap B} = \text{ ; } \\ \overline{A \cup B} = \text{ ; } A \cup \bar{B} = \text{ ; } \bar{A} \cap B = \text{ .}$$

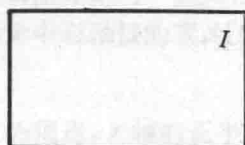


图 1-4

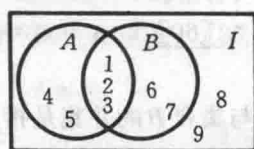


图 1-5

5 在图 1-6 中画出集合: $\overline{A \cap B} \cap (A \cup B)$.

6 已知全集 I , 集合 A, B 如图 1-7 所示. 用 A, B 及其交集、并集、补集的符号表示图中的阴影部分: .

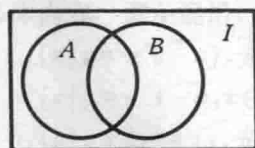


图 1-6

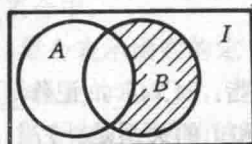


图 1-7

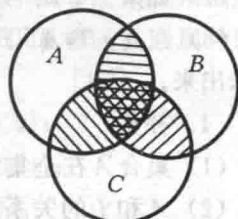


图 1-8

7 在图 1-8 中, 全集 $I = A \cup B \cup C$, 用 A, B, C 及其交集、并集、补集的符号表示下列集合:

(1) 三个阴影的重叠部分 ;

(2) 所有有阴影的部分 ;

(3) 全体无阴影的部分 .

8 设 $A = \{x | 16 - x^2 \geq 0\}$, $B = \{x | x^2 - 5x - 6 > 0\}$, 全集 $I = R$, 则

$$A \cap B = \text{ ; } A \cup B = \text{ ; } \bar{A} \cap B = \text{ ;}$$

$$\bar{A} \cup B = \text{ ; } A \cap \bar{B} = \text{ ; } A \cup \bar{B} = \text{ .}$$

9 已知 $I = \{x | x < 10, x \in N\}$, $A \cap B = \{2, 5\}$, $\bar{B} \cap A = \{1, 7\}$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \{3, 8, 9\}$. 则

$A = \underline{\hspace{2cm}}$; $B = \underline{\hspace{2cm}}$.

10 设全集 $I = \{200 \text{ 以内的自然数}\}$,

$A = \{200 \text{ 以内能被 } 2 \text{ 整除的自然数}\}$,

$B = \{200 \text{ 以内能被 } 3 \text{ 整除的自然数}\}$,

$C = \{200 \text{ 以内能被 } 5 \text{ 整除的自然数}\}$.

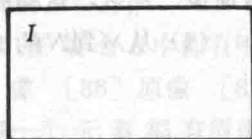


图 1-9

(1) 用图 1-9 表示上面各集合之间的关系.

(2) 用 A, B, C 及其交集、并集、补集的符号表示下列集合, 并说明是图中的哪一个部分:

$\{200 \text{ 以内能被 } 6 \text{ 整除的自然数}\} = \underline{\hspace{2cm}}$;

$\{200 \text{ 以内能被 } 15 \text{ 整除的自然数}\} = \underline{\hspace{2cm}}$;

$\{200 \text{ 以内能被 } 10 \text{ 整除的自然数}\} = \underline{\hspace{2cm}}$;

$\{200 \text{ 以内能被 } 30 \text{ 整除的自然数}\} = \underline{\hspace{2cm}}$;

$\{200 \text{ 以内既不是 } 2 \text{ 的倍数, 又不是 } 3 \text{ 的倍数, 也不是 } 5 \text{ 的倍数的自然数}\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

*(3) 求 200 以内既不是 2 的倍数, 又不是 3 的倍数, 也不是 5 的倍数的自然数共有多少个?

七、映射

1. 集合 A 到集合 B 的映射是指: [83]. 记作 [84].

2. 如果 $f: A \rightarrow B$ 是一个从集合 A 到集合 B 的映射, 按照对应法则 f , 与 A 中的元素 a 相对应的 B 中的元素是 b , 则 b 叫做 a 的 [85], a 叫做 b 的 [86].

3. 从集合 A 到集合 B 的映射还具备怎样的条件时, 就称为从集合 A 到集合 B 的一一映射? [87].

4. 要从集合 A 到集合 B 的映射 $f: A \rightarrow B$ 有逆映射, 必须而只须是 [88]. 映射 $f: A \rightarrow B$ 的逆映射是从集合 [89] 到集合 [90] 的映射, 记作 [91].

如果在映射 $f: A \rightarrow B$ 的作用下, 集合 B 中的元素 b 是集合 A 中的元素 a 的象, 则在它的逆映射的作用下, a 是 b 的 [92], b 是 a 的 [93].

5. 下面八个从集合 A 到集合 B 的对应关系中, 哪些对应是从集合 A 到集合 B 的映射? 其中哪些映射又是从集合 A 到集合 B 的一一映射? 哪些映射有逆映射? 如果有, 写出它的逆映射.

(1) $A = N, B = N$, 对应法则是使 B 中的元素 y 按 $y = \frac{x}{2}$ 与 A 中的元素 x 对应. [94]

(2) $A = N, B = N$, 对应法则是使 B 中的元素 y 按 $y = 2x$ 与 A 中的元素 x 对应. [95]

(3) $A = R, B = R$, 对应法则是使 B 中的元素 y 按 $y = 2x$ 与 A 中的元素 x 对应. [96]

(4) $A = \overline{R}, B = R$, 对应法则是使 B 中的元素 y 按 y 是 x 的平方根与 A 中的元素 x 对应. [97]

(5) $A = R, B = \overline{R}$, 对应法则是使 B 中的元素 y 按 $y = x^2$ 与 A 中的元素 x 对应. [98]

(6) $A = \overline{R}, B = \overline{R}$, 对应法则是使 B 中的元素 y 按 $y = x^2$ 与 A 中的元素 x 对应. [99]

(7) $A = \overline{R}, B = R$, 对应法则是使 B 中的元素 y 按 $y = x^2$ 与 A 中的元素 x 对应. [100]

(8) $A = \overline{R^+}, B = \overline{R^+}$, 对应法则是使 B 中的元素 y 按 $y = x^2$ 与 A 中的元素 x 对应. [101]

6. 已知两集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \{a, b, c, d\}$, 求:

(1) 从 M 到 N 的映射, 使得 M 中的每个元素在 N 中有像, 且 N 中的每一个元素在 M 中必有原像. 那么, 这样的映射有多少个? [102]

(2) 从 M 到 N 的映射有多少种? [103]

注解、例题精解、练习答案与提示

【注解】

一、[1] 具有某种属性的元素的整体称为集合 [2] 列举法、描述法、字母表示法 [3] 列举法

二、[4] 自然数 [5] 整数 [6] 有理数 [7] 实数 [8] 复数 [9] 空 [10] 正数 [11] 负数 [12] 非负数

三、[13] $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$ [14] $\left\{\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ [15] $\{1, 3\}$ [16] $\{0, 2, 4\}$ [17] $\{0\}$

四、[18] 不都是 [19] $\{x|x \neq 2, x \in \mathbb{R}\} = \{x|x < 2\} \cup \{x|x > 2\}$ [20] $\{x|x^2 + 5x - 6 < 0\} = \{x|-6 < x < 1\}$ [21] $\{x|x \leq 2\} \cup \{x|x \geq 3\}$ [22] $\{(x, y) | (3, 4), (-3, -4), (4, 3), (-4, -3)\}$ [23] $\{(s, t, u) | (2, 1, 3)\}$ [24] $\left\{a | a = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ [25] $\left\{a | 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < a < 2k\pi + 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

[26] $\left\{x | x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ [27] $\{x | x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$

[28] $\{x | x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ [29] $\{x | x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{x | x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ [30] $\{x | x \neq k\pi,$

$k \in \mathbb{Z}\} \cap \left\{x | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{x | x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ [31] $\{(x, y) | (a, 0), a \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y) | (0, b), b \in \mathbb{R}\}$ [32] $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$ [33] $\{(x, y) | 4 < x^2 + y^2 < 9\}$ [34] $\{(x, y) | y > 0, x \in \mathbb{R}\}$ [35] $\left\{(x, y) | -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, y \in \mathbb{R}\right\}$ [36] $\{(x, y) | 3x + 4y = 0, y \geq 0\}$

[37] $\left\{(x, y) | x^2 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 3, \text{ 且 } -\frac{3}{2} \leq x \leq 2\right\}.$

五、[38] a 属于 A [39] a 是集合 A 中的元素 [40] a 不属于 A [41] a 不是集合 A 中的元素

六、[42] 集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素 [43] $A \subseteq B$ [44] 集合 A 是集合 B 的子集, 且集合 B 中至少有一个元素不属于 A [45] $A \subset B$ [46] $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ [47] $A = B$ [48] 前者用于元素与集合之间的关系, 后者用于集合与集合之间的关系 [49] 有两个 (空集与它本身) [50] $C_0^3 + C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 = 2^3 = 8$ [51] $2^7 = 128$ [52] 2^n [53] $A \subset C$ [54] $\emptyset \subset N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ [55] 同时属于集合 A 和集合 B 的一切元素所组成的集合 [56] $A \cap B$ [57] $\{\text{等腰直角三角形}\}$ [58] $\{(2, 1)\}$ [59] $\{x | 0 \leq x < 3\}$ [60] $\emptyset$ [61] $\emptyset$ [62] A [63] 由属于集合 A 或属于集合 B 的一切元素所组成的集合 [64] $A \cup B$ [65] R [66] $\{x | -3 \leq x < 8\}$ [67] R [68] $\emptyset$ [69] A [70] A [71] A [72] B [73] $(A \cap B) \subseteq A, (A \cap B) \subseteq B, A \subseteq (A \cup B), B \subseteq (A \cup B), (A \cap B) \subseteq (A \cup B)$

[74] 由 I 中所有不属于集合 A 的元素组成的集合 [75] $\bar{A}$ [76] $A \subseteq I$ [77] $\bar{A} \subseteq I$
 [78] $\emptyset$ [79] I [80] A [81] $\emptyset$ [82] $\{x | x^2 - 9 < 0\} = \{x | -3 < x < 3\}$.

七、[83] 按某种确定的对应关系 f , 使集合 A 的任何一个元素, 在集合 B 中都有唯一的元素和它对应, 称集合 A 到集合 B 的映射 [84] $f: A \rightarrow B$ [85] 像 [86] 原像 [87] 如果对于集合 A 中的不同元素, 在集合 B 中有不同的像, 而且 B 中每一个元素都有原像 [88] 集合 A 到集合 B 的映射是一一映射 [89] B [90] A [91] $f^{-1}: B \rightarrow A$ [92] 像 [93] 原像 [94] 非映射 [95] 映射 [96] 一一映射, $f^{-1}: y \rightarrow x = \frac{y}{2}$ [97] 非映射 [98] 映射 [99] 一一映射, $f^{-1}: y \rightarrow x = \sqrt{y}$ [100] 映射 [101] 一一映射, $f^{-1}: y \rightarrow x = -\sqrt{y}$ [102] $(C_3^2 \cdot C_4^1)P_3^3 = 240$ 个 [103] $4^5 = 1024$ 个

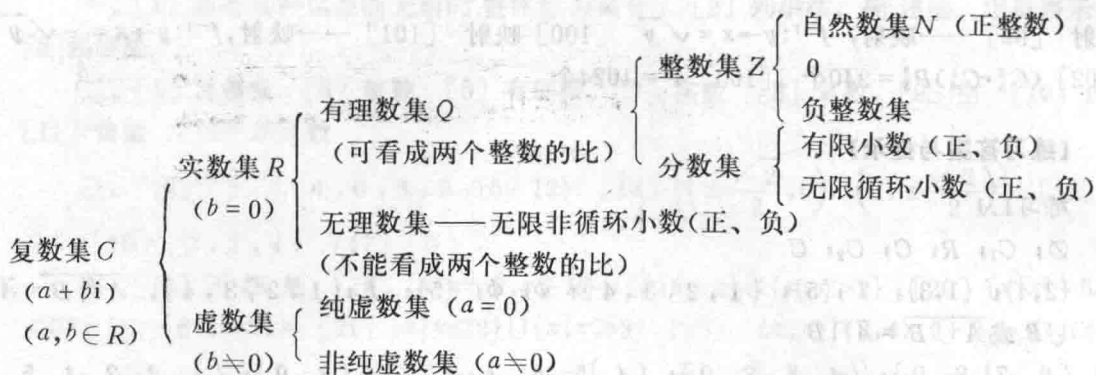
【练习答案与提示】

练习 1.1

- 1 $\emptyset; C_1; R; C; C_2; C$
- 2 $\{2, 4\}; \{1, 3\}; I; \{5\}; \{1, 2, 3, 4\}; \phi; \phi; \{5\}; I; \{1, 2, 3, 4\}. \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ 或 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- 4 $\{6, 7, 8, 9\}; \{4, 5, 8, 9\}; \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}; \{8, 9\}; \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\}; \{6, 7\}$
- 6 $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup (A \cup B)} = \bar{B} \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = \dots$
- 7 (1) $A \cap B \cap C$ (2) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ (3) $\overline{(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)}$
- 8 $\{x | -4 \leq x < -1\}; \{x | x \leq 4\} \cup \{x | x > 6\}; \{x | x < -4\} \cup \{x | x > 6\}; \{x | x < -1\} \cup \{x | x > 4\}; \{x | -1 \leq x \leq 4\}; \{x | -4 \leq x \leq 6\}$
- 9 $\{1, 2, 5, 7\}; \{2, 4, 5, 6\}$
- 10 (2) $A \cap B; B \cap C; A \cap C; A \cap B \cap C; \overline{A \cup B \cup C}$ (3) 54 个

第二章 数

一、数系表



二、自然数

1. 质数与合数

- (1) 只有 1 和本身两个约数的自然数称为质数 (即素数)。
- (2) 除了 1 和本身两个约数外还有其他约数的自然数称为合数。
- (3) 1 既不是质数也不是合数。
- (4) 50 以内的所有质数是 [1]。

2. 在什么情况下, 两个自然数是互质的? [2].

三、有理数

1. 定义: 如果 p, q 都是整数, 且 $q \neq 0$, 则形如 $\frac{p}{q}$ 的数叫做有理数 (即比数)。

2. 如果非零有理数 $\frac{p}{q}$ 中的分子 p 与分母 q 是互质的, 则 $\frac{p}{q}$ 叫做既约分数。任何非零有理数都可以化成既约分数。对于整数, 则 $q=1$ 。

3. 如果一个有理数而不是整数, 则它一定可以化为有限小数或无限循环小数。把下列有理数化为小数: $3\frac{5}{8} = \underline{[3]}\frac{5}{8}$, $\frac{12}{7} = \underline{[4]}\frac{2}{7}$ 。

4. 有限小数和无限循环小数都可以化为分数。把下列数化为分数: $1.256 = \underline{[5]}\frac{1256}{1000}$, $2.1108 = \underline{[6]}\frac{1108}{1000}$ 。

*5. 根据有理数的定义, 证明下面的结论:

- (1) 有理数加上 (或减去) 有理数仍得有理数;
- (2) 有理数乘以有理数 (或除以非零有理数) 仍得有理数。

练习 2.1

- 1 把下列分数化为小数: $\frac{38}{11} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\frac{428}{13} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\frac{9}{74} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\frac{157}{370} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 2 把下列小数化为分数: $3.24 = \underline{\hspace{2cm}}$; $0.2\dot{3} = \underline{\hspace{2cm}}$; $0.4\dot{7} = \underline{\hspace{2cm}}$; $0.12\dot{3} = \underline{\hspace{2cm}}$; $0.8\dot{2}\dot{7} = \underline{\hspace{2cm}}$.

四、无理数

1. 无限非循环小数叫做无理数 (即非两个整数之比的比数)。

2. 常见的无理数有 (举代表性的例子): $\underline{[7]}$ 。

*3. 证明下面的结论:

(1) 一个无理数与一个有理数的和 (或差) 仍为无理数。

(2) 一个无理数与一个非零的有理数的积 (或商) 仍为无理数。

4. 两个无理数的和、差、积、商一定是无理数吗? $[8]$

*5. 用反证法证明:

(1) $\sqrt{2}$ 是无理数; $[9]$

(2) $\lg 5$ 是无理数。

五、实数

1. $\{\text{有理数}\} \cup \{\text{无理数}\} = \{\text{实数}\}$ 。

2. 实数的绝对值

(1) 在数轴上表示实数 a 的点到原点的距离叫做 a 的绝对值, 记作 $|a|$ 。

(2) 已知 a 为实数, 则

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a \geq 0; \\ -a, & \text{当 } a \leq 0. \end{cases}$$

3. 实数的方根

(1) 如果 $x^n = a$ ($n \in N$), 则 x 叫做 a 的 n 次方根。

(2) 实数 a 在实数范围内的偶次方根:

正实数 a 在实数范围内有两个偶次方根, 它们的绝对值相等, 符号相反。其中正的那个叫算术根, 记作 $\sqrt[n]{a}$ ($n \in N$)。

零的偶次方根为零。

负实数 a 在实数范围内没有偶次方根。

(3) 实数 a 在实数范围内的奇次方根:

实数 a 在实数范围内都有且仅有一个奇次方根, 记作 $\sqrt[n]{a}$ ($n \in N$)。正数的奇次方根为正数, 零的奇次方根为零, 负数的奇次方根为负数。

(4) 当 $a \in R$, 且 $n \in N$ 时, 则: $\sqrt{a^2} = \underline{[10]}$, 一般地 $\sqrt[n]{a^{2n}} = \underline{[11]}$;

$\sqrt[3]{a^3} = \underline{[12]}$, 一般地 $\sqrt[n]{a^{2n+1}} = \underline{[13]}$; $(\sqrt[n]{a})^n = \underline{[14]}$, 其中 $\underline{[15]}$ 。

4. 几个常见的非负数

(1) 已知 $a \in R$, 则 $a^2 \geq 0$, 一般地 $a^{2n} \geq 0$ ($n \in N$)。

(2) 已知 $a \in R$, 则 $|a| \geq 0$ 。

(3) 已知 $a \geq 0$, 则 $\sqrt[n]{a} \geq 0$, 一般地, $\sqrt[n]{a} \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

(4) 已知 $a \in \mathbb{R}$, 则 $\sqrt{a^2} = |a| \geq 0$, 一般地, $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a| \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

练习 2.2

1 化简下列各式:

(1) $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$ ($a < b$) = _____; (2) $\sqrt{1 - \sin^2 115^\circ}$ = _____;

(3) $\sqrt{\lg^2 6 - \lg 36} + 1$ = _____;

(4) $\sqrt{x^2 + 8x + 16} + |x - 2|$ ($x < -4$) = _____;

(5) $\frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha + 1} + |\sec \alpha - 1|}{\sin \alpha}$ (α 为锐角) = _____;

(6) $|x + 5| - |x - 3| + |2x - 6|$ ($-5 \leq x \leq 3$) = _____.

2 讨论并化简下列各式:

(1) $\sqrt{x^2 + 6x + 9}$ = _____;

(2) $\sqrt{4 - 4x + x^2}$ = _____;

(3) $\sqrt{\log_2^2 x + 2 \log_2 x + 1}$ = _____;

(4) $|a + 1| - \sqrt{16a^2 - 8a + 1}$ = _____;

*(5) $\sqrt{x^4 - 6x^2 + 9} + \sqrt{16 - 8x^2 + x^4}$ = _____.

3 化简下列根式:

(1) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ = _____;

(2) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ = _____;

(3) $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$ = _____;

(4) $\sqrt{11 + \sqrt{72}}$ = _____;

(5) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ = _____;

(6) $\sqrt{8 - 3\sqrt{7}}$ = _____;

(7) $\sqrt{7 + 3\sqrt{5}}$ = _____;

*(8) $\sqrt{18 + 12\sqrt{3}}$ = _____;

(9) $\sqrt{3 + 2\sqrt{5} + 12\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}$ = _____.

4 解下列方程:

(1) $|3 - x| = 2$, 解为 _____; (2) $|x + 2| + |x - 3| = 5$, 解为 _____;

(3) $|2x - 1| - |2 - x| = 9$, 解为 _____;

(4) $3|x - 1| - 2\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x + 1$, 解为 _____;

(5) $2|x| + |x + 1| - |3 - x| = 2x + 4$, 解为 _____;

(6) $|x^2 + 5x - 6| - |x + 4| = 2$, 解为 _____;

(7) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{2x - 4} + 1 = 0$, 解为 _____;

(8) $|x + 3| + |2x - 4| = 0$, 解为 _____;

(9) $|x^2 - 4| + |x^2 - 5x + 6| = 0$, 解为 _____;

(10) $|x - |2x + 1|| = 3$, 解为 _____.

六、比例的性质

基本性质: 若 $a:b = c:d$, 即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $ad = bc$;

更比定理: 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$;