WULI GUANG XUE
XUEXI ZHIDAO

普通高等院校光电工程系列“十二五”规划教材

物理光学学习指导

韩 军 段存丽 编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校光电工程系列“十二五”规划教材

物理光学学习指导

韩军　段存丽　编著

国防工業出版社
·北京·

内容简介

本书是以作者2005年编写的同名教材为基础,结合近年来我国高等教育工程创新能力培养教学改革思想而编写的。

根据波动光学的知识结构特点,将全书分为4章,这也与《工程光学》章节顺序保持了一致性。每章包括内容精讲和典型例题、重点和难点、课后习题及解答、考研试题精选及解答。内容精讲旨在帮助学生理解物理光学的基本内容、基本概念,思考题融合了工程应用与生活实际,鼓励学生探究基本规律,努力掌握解决问题的基本方法。

本书可作为高校测试技术与仪器、光电信息工程、光信息科学与技术等相关专业的本科生、专科生的学习指导书,也可以作为以上专业学生研究生考试的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

物理光学学习指导/韩军等编著.—北京:国防工业出版社,2012.10
普通高等院校光电工程系列"十二五"规划教材
ISBN 978-7-118-07844-2

Ⅰ.①物… Ⅱ.①韩… Ⅲ.①物理光学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O436

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第066353号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 14¾ **字数** 347千字
2012年10月第1版第1次印刷 **印数** 1—4000册 **定价** 28.00元

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776
发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

前　言

本书为作者编著的《工程光学》(国防工业出版社,2011 年版)的配套教材。“物理光学”是光电信息类专业的核心专业基础课“工程光学”的有机组成部分,是一门经典理论与近代技术结合的应用性很强的课程。它在光的电磁本质基础上,阐述光在介质中的传播规律,进而研究这些规律的应用。对于初学者而言,学习物理光学这门课时常会感到:一是知识要点难以系统掌握,二是分析应用难以从心,特别是解题困难。

为了解决初学者普遍存在的问题,本书选编了大量的典型例题。例题选择以符合要求、难度适中、重点突出为原则,同时注重内容、题型、解法三方面的典型性和综合性。解题突出启发性和灵活性,旨在引导读者掌握正确的解题方法和技巧。

各章都配有一定数量的习题解答,选题力图精少,但各练习目标明确,目的在于巩固广大读者的观察、分析和应用技能,并引导其灵活延展,力图使读者既加深理解物理概念及思想方法,又能有针对性地体会科学研究的一般规律、训练用所学知识分析问题和解决问题的能力。

本书在编写过程中力求体系直观,脉络清晰,以帮助读者准确理解物理概念、系统把握知识脉络、熟练掌握思想方法为主要编写原则。希望能够通过大量的经典实例,逐步培养起学生运用物理光学的思想方法分析和解决问题的综合能力,达到培养创新意识和科学素养的目标。

体现于本书的教学思想是从 1980 年以来所有讲授物理光学的西安工业大学教师和学习本课程的同学在教学实践中不断探索、验证和完善的结果。本书在编写过程中,参阅了大量国内外文献,在此向这些文献的作者表示谢意。

本书的第 1 章(除 1.1.5 节)和第 4 章由韩军教授编写,第 2 章(除 2.1.6 节)和第 3 章由段存丽副教授编写,1.1.5 节由郭荣礼博士编写,2.1.6 节由路绍军博士编写。全书由韩军教授统稿。

由于编者水平有限,书中错误和缺点在所难免,恳请读者批评指正,以便改进提高。

作　者

2012 年 7 月

目 录

第一章　波动光学通论

几何光学和波动光学是经典光学的两个组成部分。几何光学从光的直线传播、反射、折射等基本实验定律出发,讨论成像等特殊类型的光的传播问题,它在方法上是几何的,在物理上不必涉及光的本性。但是,要真正理解光,理解光场中可能发生的一切绚丽多彩的景像,必须研究光的波动性。此外,也只有从光的波动理论才能看出几何光学理论的限度。

波动是自然界中相当普遍的一类运动形式,在力、热、电、光各个领域中无处不在。尽管各种波动的具体形态各异,其间却存在着非常明显的共性。无论在基本概念、基本原理方面,还是在所用的数学语言和计算方法方面,它们都具有惊人的相似性,甚至可以说几乎完全一样。然而,光波是特定波段内的电磁波,其波长按宏观尺度看来非常小,以及发射源是微观客体,这使它具有自己的特点。光波的特点集中地反映在研究和应用它的实验装置和仪器上。这些仪器装置的设计往往需要针对光波的特点作种种十分细腻,甚至令人感到"琐碎"的考虑。

在具体分析波的干涉、衍射、偏振等现象之前,本章集中讨论波动光学中的一些基础性概念及原理。首先介绍波的有关概念及数学描述,其重点是波的时空周期性及复振幅概念;其次讨论波的叠加原理及各种典型光波的叠加过程,并由此引入光的干涉及光的偏振态的概念;作为波的叠加的逆运算,对波的分解亦作了简要介绍,从中可得出波在时域和空域中的反比例关系;最后对波在两种介质的界面上反射和折射的有关问题进行较细致的考察与分析。

1.1　内容精讲及典型例题

1.1.1　波的数学描述

一、内容精讲

1. 波动及其基本特征

振动在空间的传播形成波动。波场中每点的物理状态随时间作周期性的变化,而在每一瞬时波场中各点物理状态的空间分布也呈现一定的周期性,因此,说波动具有时空双重周期性。此外,伴随着波动,总有能量的传输。具有时空双重周期性的运动形式和能量的传输是一切波动的基本特性,不具备这种特性的事物,不能成为严格意义上的波动。

波场中物理状态的扰动可用标量场描述的,称为标量波;需用矢量场描述的,称为矢量波。例如,密度波、温度波等是标量波,电磁波(包括光波)是典型的矢量波(此外,还有更复杂的波动形式——张量波,如固体中的弹性波、引力波等)。

矢量波可以有一个纵方向(与传播方向平行)的自由度和两个横方向(与传播方向垂

直)的自由度。自由空间的电磁波(光波)是横波,它有两个自由度,它们对应着两个独立的偏振状态。

波场的几何描述使用波面和波线的概念。波面也叫做等相面,它是扰动的等相位各点的轨迹。一般说来,波面是三维空间里的曲面族。能量传播的路径叫做波线,光在各向同性介质中波线是与波面处处正交的空间曲线族。光在各向异性介质中情况比较复杂,波线与波面一般不正交,详细情况留待第四章讨论。

波面为球面的波叫做球面波。波面为平面的波叫做平面波。球面波就是几何光学中所说的同心光束,平面波是平行光束,它也可看成是中心位于无穷远的同心光束。在多种形状波面的波动中,球面波和平面波占有特殊的地位。一方面是因为它们比较简单,从而也被研究得比较透彻;另一方面是因为任何形状的波面可看作是点源的集合。点光源对于光学,正像质点对于力学、点电荷对于电学一样,是建筑整个理论体系的基石。光束经过光学系统改造后形成的波场,一般是比较复杂的。现代光学的思想实际就是要在复杂的波场中分离出简单的成分——球面波或平面波。基于上述种种理由,球面波和平面波将是今后讨论的重点。要从各个角度去仔细研究它们,如研究它们的描述、识别和相互转化等问题。

2. 定态光波的概念

具有以下性质的波场叫做定态波场:

(1) 空间各点的扰动是同频率的简谐振荡(频率与振源相同)。

(2) 波场中各点扰动的振幅不随时间变化,在空间形成一个稳定的振幅分布。

严格的定态光波要求波列无限长。但任何实际光源的发光过程总是有限的,特别是从微观角度来看,发光过程是断断续续的。以后会看到,有限波列不可能是严格单色的。不过当波列的持续时间比扰动的周期长得多时,除了考虑某些特殊问题(如时间相干性)外,可把它当作无限长单色波列处理,这样的波在空间传播时形成定态波场。今后,如果没有特别的必要,一律以定态光波为讨论对象。

普遍的定态标量波的表达式为

$$U(P,t)=A(P)\cos[\omega t-\varphi(P)] \tag{1-1}$$

式中:P 代表场点;函数 $A(P)$ 为振幅的空间分布;$\varphi(P)$ 为相位的空间分布。二者都与时间 t 无关。波面数 $U(P,t)$ 中唯一与 t 有关的是相位因子中独立的一项 ωt(ω 为圆频率),这项又是与场点坐标无关的。

定态光波的波面也可以有各式各样的形状,将重点讨论定态平面波和球面波。

平面波波函数的特点是:振幅 $A(P)$ 是常数,它与场点坐标无关;相位 $\varphi(P)$ 是直角坐标系的线性函数,即

$$\varphi(P)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varepsilon=k_x\boldsymbol{x}_0+k_y\boldsymbol{y}_0+k_z\boldsymbol{z}_0+\varepsilon \tag{1-2}$$

式中:矢量 $\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}_0+k_y\boldsymbol{y}_0+k_z\boldsymbol{z}_0$ 是波矢,其大小 k 与波长 λ 的关系为 $k=2\pi/\lambda$,它的方向代表波的传播方向;$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{x}_0+y\boldsymbol{y}_0+z\boldsymbol{z}_0$ 是场点 P 的位置矢量;$\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$、$\boldsymbol{z}_0$ 为沿直角坐标轴的 3 个单位基矢;ε 为坐标原点 O 处的初相位。

球面波波函数的特点是:振幅 $A(P)=a/r$ 反比于场点到振源的距离 r,这是能量守恒的要求,相位分布的形式为

$$\varphi(P)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varepsilon \tag{1-3}$$

ε 是振源的初相位。不难看出，波面方程 $\varphi(P)$ = 常数，确实代表以振源为中心的一个球面。

光波是一种电磁波，它是矢量横波，定态电磁波需用两个矢量场来描述，即

$$\boldsymbol{E}(P,t)=\boldsymbol{E}_0(P)\cos[\omega t-\varphi(P)] \quad \boldsymbol{H}(P,t)=\boldsymbol{H}_0(P)\cos[\omega t-\varphi(P)] \tag{1-4}$$

式中：$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别为电场强度和磁场强度矢量；$\boldsymbol{E}_0(P)$ 和 $\boldsymbol{H}_0(P)$ 分别为它们的振幅分布。在一定的条件下，往往只需考虑光波中振动矢量的某一分量，这时矢量波可作标量波处理。大体说来，在各向同性介质中满足傍轴条件时，用标量理论处理光的干涉、衍射问题得到的结果基本正确。

3. *微分波动方程描述*

一列沿着弦运动的简单波具有很多与光波相同的性质。弦的位移垂直于扰动运动的方向，即波沿弦传播，而弦本身的每个元段只不过是在往复地运动。这种波称为横波。光恰好是这样一种横波，其电场和磁场均在垂直于传播的方向上变化。

微分波动方程是所有波动共同遵循的基本方程，其形式为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1-5}$$

微分波动方程描述上述这样的现象（当只有一个空间变量时）。$\psi(x,t)$ 称为波函数，它表示空间(x)和时间(t)的扰动，它可以是弦的位移或场强的大小。式(1-5)中，v 是波的传播速率。

微分波动方程某一解的形式为

$$\psi(x,t)=f(x-vt) \tag{1-6}$$

式中：f 为一个以($x-vt$)为变量的任意二次可微函数。换句话说，可以把($x-vt$)平方、立方取所需要的形式，但是它必须作为一个单元出现。扰动的形状（它的波形）可以用“拍照”给定时刻的波函数来获得。在数学上这相当于令 t 为一常数。例如，在 $t=0$ 时，$\psi(x,0)=f(x)$ 是波形。因此，若 $f(x)$ 是弦上隆起的形状，那么 $f(x-vt)$ 描述了沿 x 正方向以速率 v 运动的隆起。用同样方法，$g(x+vt)$ 是对应于沿负 x 方向传播的任一波形为 $g(x)$ 的波动方程的解。

4. *正弦波*

一列形状为正弦曲线（图 1-1）的波称为谐波。因为数学上通过傅里叶方法，可以用若干正弦函数的和来合成较复杂的波，所以这种波是有特别意义的。

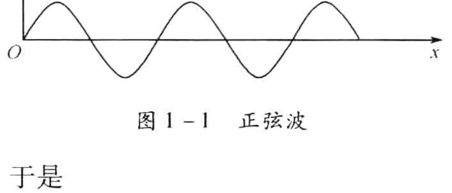

图 1-1　正弦波

如果 $\psi(x,0)=A\sin kx$ 于是

$$\psi(x,t)=A\sin k(x\pm vt) \tag{1-7}$$

式(1－7)是一列前进谐波。正弦函数的幅角是无单位的,为此引入正的常数 k 并称为传播数。$\psi(x,t)$的最大值是振幅 A。由于在一个空间周期或波长 λ 之后波函数本身可重复出现,即 $\psi(x,t)=\psi(x\pm\lambda,t)$。对于这种情况,传播数必须用 $k=2\pi/\lambda$ 给定。类似地,如果在一个时间周期 τ 之后,波函数本身可重复出现,即 $\psi(x,t)=\psi(x,t\pm\tau)$,从而 $\tau=\lambda/v$。周期是每个波的时间单位,它的倒数是频率 ν,或每单位时间的波数。因此 $v=\lambda\nu$,和力学类似,可以引入角频率 $\omega=2\pi/\tau$。虽然实际上这里没有任何东西在转动,但是使用像 ω 这样一类单位为 rad/s 的量是很方便的。因此波函数可改写为

$$\psi(x,t)=A\sin(kx\pm\omega t) \tag{1-8}$$

上述谐波在空间和时间上均从 $-\infty$ 变化到 $+\infty$,因此它们是数学上的抽象。因为它们只包含单一的频率,这种波称为单色波。虽然以不同程度接近它们的波存在并称为是准单色的,但没有实际的物理扰动具有这种形式。

5. 相位和相速度

下面将要研究的最重要概念之一是谐波的相位 φ,它简单地定义为正弦函数的幅角,即

$$\varphi=kx\pm\omega t \tag{1-9}$$

因为当 $t=0$ 和 $x=0$ 时,$\varphi(0,0)=0$,所以迄今为止写出的波函数实际上是一种特殊情况。为什么当 $t=0$,$x=0$ 时波的大小不能取所希望的任意值呢?这是毫无道理的。通过初相位 ε 的引入使得 $\varphi=kx\pm\omega t+\varepsilon$,可以用改变正弦函数来达到上述目的。初相位 ε 表示在波源中产生的、对相位的固定贡献,而与波究竟传播了多远的距离和多长时间无关。

对于更普遍的情况,可以将任何一个简谐波函数写成

$$\psi(x,t)=A\sin(kx\pm\omega t+\varepsilon) \tag{1-10}$$

或

$$\psi(x,t)=A\cos\left[kx\pm\omega t+\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{1-11}$$

即可以用正弦函数和余弦函数来描写同一个简谐波。

当想象一列波掠过时,通过观察扰动大小保持不变的某点的运动来确定其速率。对这样一个点,相位必定也是常数。因此波的速率就是相位不变的状态传播的速率,即

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\varphi=\frac{(\partial\varphi/\partial t)_\varphi}{(\partial\varphi/\partial x)_\varphi}=\pm\frac{\omega}{k}=\pm v \tag{1-12}$$

式中:v 为谐波的传播速率,也叫做相速度。

6. 复数表示

进一步分析波动现象时将会看到,用正弦函数和余弦函数来描述简谐波会给我们带来不便。当所表达的式子越复杂时,处理这些式子所需的三角函数运算就越麻烦。波的复数表示提供了另外一种描述方法,它在数学上用起来更为简便。实际上,波函数的复指数形式,在经典力学和量子力学中都用得很广泛,在光学中也是一样。

复数 z 的形式为

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{1-13}$$

式中：$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$；z 的实部和虚部分别是 x 和 y；x 和 y 本身都是实数。z 的复共轭用星号表示为 z^*，是把凡出现 i 的地方都换成 -i 而得。式(1-36)说明，任何一个复数可以表示成一个实部 Rez 和一个虚部 Imz 之和，即

$$z = \mathrm{Re}z + \mathrm{iIm}z$$

所以

$$\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(z+z^*),\ \mathrm{Im}z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-z^*)$$

由欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，可以把 z 写成极坐标形式，即

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta \tag{1-14}$$

式中：r 为 z 的长度；θ 为 z 的相角（单位是弧度）。长度常常用 $|z|$ 来代表，并且叫做复数的模或绝对值。

从极坐标表示式有：$\mathrm{Re}z = r\cos\theta$，$\mathrm{Im}z = r\sin\theta$。显然，不论是实部还是虚部都可以用来描写简谐波。但是，习惯上都选用实部。这时，一个简谐波可以写为

$$\psi(x,t) = \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx\pm\omega t+\varepsilon)}\right]$$

它等价于式(1-14)。

今后，只要它带来方便，就把波函数写成

$$\psi(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx\pm\omega t+\varepsilon)} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{1-15}$$

并把这种复数形式用到所需要的计算中，其目的是利用复指数运算的简便。只有在得出最后的结果之后，并且只有当要表示出实际波的时候，才需要取它的实部。因此，把 $\psi(x,t)$ 写成上述的形式是十分通用的，这时应当这样理解：实际的波是它的实部。

7. 三维波

根据空间变量应该对称出现的特征，可把微分波动方程推广至三维情况。即只要坐标系保持右手螺旋，如果把空间变量交换位置，方程应该不变。在任何情况下，都有

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1-16}$$

上式是笛卡儿坐标系中适用的三维形式。在光学研究中，最关心的是那些与平面波和球面波有关的特解。现在来写平面方程，此平面通过一任意点(x,y,z)且垂直于用传播矢量所描绘的给定方向，如图 1-2 所示。只要

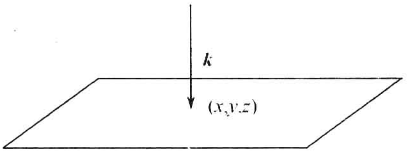

图 1-2　波矢的传播

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{k}=0 \tag{1-17}$$

或

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=\text{常量}$$

矢量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$将扫过所要求的平面。这是一个平面方程,从而 $\psi(\boldsymbol{r})=A\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$是一个由所有垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的平面族所定义的函数。在这些 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=$常量的每一个平面上,$\psi(\boldsymbol{r})$是一常量。当从一平面运动到另一平面时,$\psi(\boldsymbol{r})$正弦式地变化。像以前一样,为了把 $\psi(\boldsymbol{r})$变换为一个前进的平面谐波,要把它改写为

$$\psi(r,t)=A\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\pm\omega t) \tag{1-18}$$

式中:负号对应于 $\boldsymbol{k}$ 正方向的运动;正号对应于 $\boldsymbol{k}$ 负方向的运动。

通过解球坐标系的微分波动方程,球面谐波的形式是最容易得到的。这个过程导致

$$\psi(r,t)=\frac{A}{r}\sin k(r\pm vt) \tag{1-19}$$

式中:常数 A 为源强度。注意到振幅 A/r 和离开波源的距离成反比。这是能量守恒所要求的。另外,在相位中的负号和正号分别对应于离开波源的发散波和指向波源的会聚波。在任何情况下,上述表达式均表示一组同心球面,在每个球面上 r 为常量,因而 $\psi(r,t)$是常量。

8. 标量波与矢量波

至此,已研究了形式为 $\psi(x,t)=A\sin k(x\pm vt)$的标量波函数。假设实际上你试图建立这类横波,设想是弦上的一个扰动,很显然因为不知道位移的方向,标量波函数不能完全说明波的情况。①这些不足之处该如何修正?②如果扰动存在于一平面上(通称振动面),那么此波称为平面偏振波或线偏振波。

对于第一个问题,把振幅写成一个矢量,就可以确定横波中的位移方向

$$\psi(x,t)=\boldsymbol{A}\sin\boldsymbol{k}(x\pm vt) \tag{1-20}$$

此时把式中的 $\psi(r,t)$称为矢量波。矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 确定了任意瞬时的振动平面。

对于第二个问题,由于一个线偏振的简谐平面波 A 是时间常量,则有

$$\psi(r,t)=A\exp i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\pm\omega t+\varepsilon) \tag{1-21}$$

图 1-3 所示为几个垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的平面波振面。它描绘一列平面谐波,因此从一个平面至下一个平面 $\psi(r,t)$正弦式地变化。此外因为它是线偏振的,所以在任一平面波阵面各点上振幅矢量都是一样的,并且对应的振动平面全部是平行的。如果振幅矢量是时间的函数,它非常迅速和无规则地变化,那么这种波就称为非偏振波。在这种情况下,标量波函数一般就够用了,因此在这里它是有意义的。

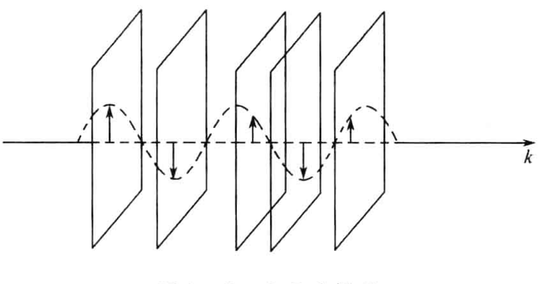

图 1-3 平面波振面

9. 波阵面

十分普遍地，若一曲面上波的相位是一常数，则此曲面称为波阵面。显然，平面波的波阵面是一 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=$ 常数的平面。类似地，球面波具有 $\boldsymbol{r}=$ 常数的球面波阵面。如果波阵面上波函数是一常数（如果振幅是常数），则此波称为均匀波。虽然常常如此，但有很多重要的实例（如在受抑全内反射中），在那里波阵面上的振幅是变化的，因而这种波是非均匀波。

二、典型例题

例 1－1 在下列情况下，能确定一个点波源的位置吗？

（1）已知 3 个特定位置的接收器记录到的强度。

（2）已知点源发振后 3 个接收器所记录的首波之间的时差和波速。

答 点源激发球面波，利用球面波的特点来确定一个点源的位置。

（1）如图 1－4 所示，设 P_1、P_2、P_3这 3 个场点接收到的强度分别为 I_1、I_2、I_3。根据球面波的强度反比于场点到振源的距离的平方，可得

$$\begin{cases}\dfrac{r_2}{r_1}=\sqrt{\dfrac{I_1}{I_2}}\\[2ex]\dfrac{r_3}{r_2}=\sqrt{\dfrac{I_2}{I_3}}\end{cases}$$

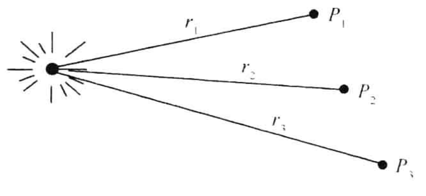

图 1－4　例 1－1 图

由此只能得到两个场点到源点距离的比值，还不能确定点源的位置。

（2）设首波之间的时差分别 Δt_{12} 和 Δt_{23}，波速为 v。根据球面波的球对称性，可得

$$r_2-r_1=\Delta t_{12}v,\quad r_3-r_2=\Delta t_{23}v$$

此时只能确定 3 个场点的距离差，仍不能确定点源的位置。

例 1－2 你能用什么简便的方法测定一个无法直接接近的点光源的位置吗？

答 先用一已知焦距的凸透镜对准点光源，使其成实像，测出像距，再用薄透镜的物像距公式算出物距，即可知点源的位置。

例 1－3 图 1－5(a)所示为一对传播方向平行于 Oxz 面，与 z 轴分别成倾角 θ 和 $-\theta$ 的一对共轭平面波；图 1－5(b)所示为一对轴上物点的共轭球面波，发散中心为 $O(0,0,-R)$，会聚中心为 $O^*(0,0,R)$；图 1－5(c)所示为一轴外物点的共轭球面波，发散中心为 $O_1(x_1,y_1,-R)$，会聚中心为 $O_1^*(x_1,y_1,R)$。上述每列波在 $-\theta$ 面上波前等相位点的轨迹都是什么样的曲线？描绘一下它们的主要特征，如取向、间隔等。

答 （1）在图 1－5(a)中，倾角为 θ 的斜入射平面波在 $z=0$ 面上波前的相位分布函数为 $\phi(x,y)=kx\sin\theta$，令 $\phi(x,y)$ 为常数，得波前上等相位点的轨迹 x 也是常数，即等相位

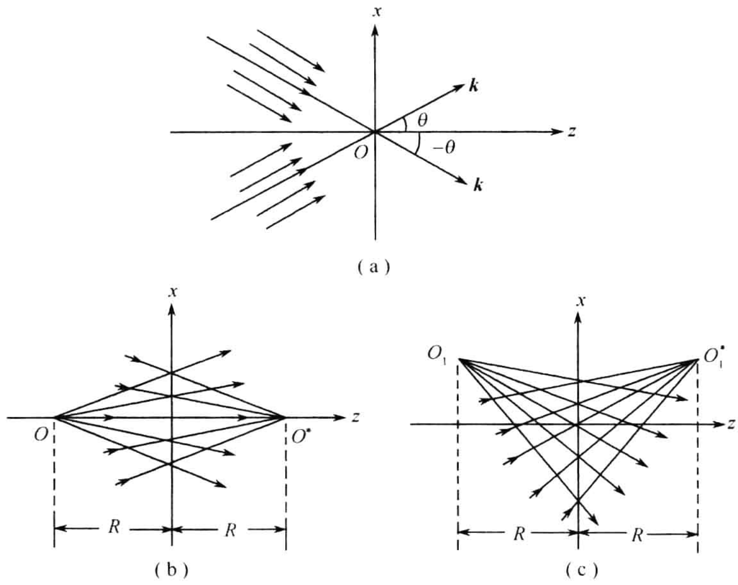

图 1－5　例 1－3 图

点的轨迹为平行于 y 轴的直线。当两等相位线的相位差为 $\Delta\phi$ 时，得其间隔为 $\Delta x=\Delta\phi/k\sin\theta$，说明等相位线的密度是均匀的。

同理分析可知，共轭平面波（倾角为 $-\theta$）在 $z=0$ 面上波前等相位线的特征相同。

(2) 在图 1－5(b) 中，发散球面波在 $z=0$ 面上波前的相位分布函数为

$$\phi(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2+R^2}=k\sqrt{r^2+R^2} \qquad ①$$

其中 $r^2=x^2+y^2$，等相位线的方程为

$$x^2+y^2=r^2=C$$

这说明等相位线是以坐标原点 O 为中心的一系列同心圆。对①式取微分得

$$\Delta r=\frac{\sqrt{1+(R/r)^2}}{k}\Delta\phi$$

上式说明，等相位线是中间稀外边密的，即随着半径增大而变密。

同理可得，会聚的共轭球面波在 $z=0$ 面上波前等相位线的特征与此相同。

(3) 在图 1－5(c) 中，发散球面波波前上的相位分布函数为

$$\phi(x,y)=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+R^2} \qquad ②$$

等相位线方程　　$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2=\mathrm{C}$（常数）

对②式取微分得

$$\Delta r=\frac{\sqrt{1+(R/r_1)^2}}{k}\Delta\phi$$

可见，等相位线是以 (x_1,y_1) 点为圆心的一系列同心圆，其分布也是中间稀外边密，随

着半径增大而变密。

同理可得，会聚的共轭球面波在 $z=0$ 面上波前等相位线的特征与此相同。

掌握上述各种波前等相位线的主要特征，对分析由于波前相干叠加而产生干涉条纹的性质很有用。

例 1-4 如图 1-6 所示，有 8 列球面波，其中 4 列是入射波[图 1-6(a)]，4 列是出射波[图 1-6(b)]。它们在波前 $z=0$ 平面上各有共同的光瞳(即窗口)，能流数值相同；波束中心 O_1、O_2、O_3、O_4点分别与 $z=0$ 和 $x=0$ 面成镜像对称。

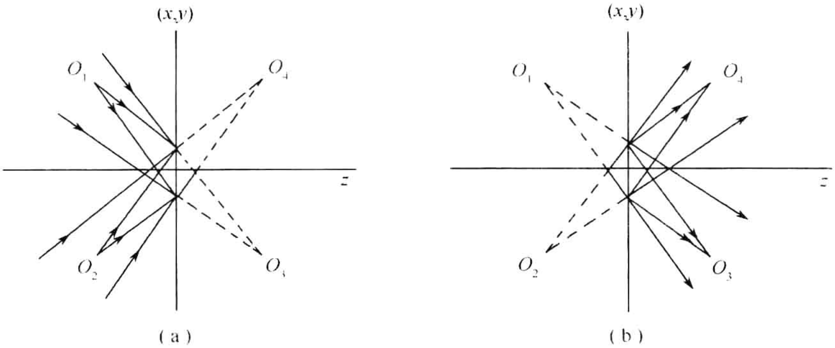

图 1-6 例 1-4 图

(1) 指明其中哪几列波在 $z=0$ 面上的复振幅分布相同?

(2) 哪几列波在 $x=0$ 面的复振幅互为共轭?

(3) 设 O_1点的坐标为$(x_1, y_1, -R)$，其他波束中心 O_2、O_3、O_4点的坐标如何? 具体写出图 1-6(a)、(b)中 1、2 两列波在 $z=0$ 面上的复振幅分布函数。

答 (1) 波束中心相同的两列入射波和出射波在 $z=0$ 面上的复振幅分布均相同。

(2) 波束中心与 $z=0$ 面成镜像对称的两列波均为共轭波(即复振幅分布互为共轭)。

(3) 设 O_1点的坐标为$(x_1, y_1, -R)$，则其他波束中心的坐标分别为 $O_2(-x_1, y_1, -R)$、$O_3(-x_1, y_1, R)$ 和 $O_4(x_1, y_1, R)$。

图 1-6(a)中，波束中心分别为 O_1、O_2点，其 1、2 两列波在 $z=0$ 面上的波前相应为

$$\tilde{U}_1(x,y)=\frac{a}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+R^2}}\times\exp\left[ik\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+R^2}\right]$$

$$\tilde{U}_2(x,y)=\frac{a}{\sqrt{(x+x_1)^2+(y-y_1)^2+R^2}}\times\exp\left[ik\sqrt{(x+x_1)^2+(y-y_1)^2+R^2}\right]$$

在图 1-6(b)中，波束中心为 O_1 和 O_2点的 1、2 两列波在 $z=0$ 面上的波前分别和图 1-6(a)中的 1、2 两列波相同。

例 1-5 通过检验相位，试确定由下面式子所表示的行波的运动方向。

$\psi_1(y,t)=A\cos2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{y}{\lambda}+\varepsilon\right)$，$\psi_2(z,t)=A\cos10^{15}\pi\left(t-\frac{z}{v}+\varepsilon\right)$。

解 因为 t 是正的而且在增大，所以要保持相位不变的状态[即 $\varphi=2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{y}{\lambda}+\varepsilon\right)=$常数]，要求 y 要减少。换句话说，由于 φ 是常数，ψ_1必然是沿负 y 方向运

动的波。同样地，ψ_2是沿 z 增加的方向或 z 正方向运动的波。ε 的符号同运动方向是无关的。

例 1－6 利用 $v=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\varphi$ 这一事实，计算波 $\psi(x,t)=10^3\sin\pi(3\times10^6x-9\times10^{14}t)$ 的速率，采用 SI 单位。

解 $\varphi=$常数的状态等效于

$$0=\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_x+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_t\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_x+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_t v$$

因此

$$v=-\frac{(\partial\phi/\partial t)_x}{(\partial\phi/\partial x)_t}=-\frac{-9\times10^{14}\pi}{3\times10^6\pi}=3\times10^8(\mathrm{m/s})$$

所以，v 是一个正量。

例 1－7 一列谐波沿 x 正方向运动，在 $x=0$ 处，$\psi=10$；在 $x=\lambda/6$ 处，$\psi=20$；而在 $x=5\lambda/12$ 处，$\psi=0$，试写出此谐波波形的表达式。

解 因为 $t=0$，$\psi(x,0)=A\sin(kx+\varepsilon)$；把题中数据代入，得到

$$\psi(0,0)=A\sin\varepsilon=10$$

$$\psi(\lambda/6,0)=A\sin(\pi/3+\varepsilon)=20$$

$$\psi(5\lambda/12,0)=A\sin(5\pi/6+\varepsilon)=0$$

把第一、第二式合并得出

$$A\sin(\pi/3+\varepsilon)=2A\sin\varepsilon$$

或

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos\varepsilon+\cos\frac{\pi}{3}\sin\varepsilon=2\sin\varepsilon$$

由此，

$$\tan\varepsilon=\frac{\sin\pi/3}{2-\cos\pi/3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

于是 $\varepsilon=\pi/6\mathrm{rad}$ 和 $A=20$。

因此

$$\psi(x,0)=20\sin(kx+\pi/6)$$

例 1－8 已求得 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=$常量是一垂直于 $\boldsymbol{k}$ 且通过某点(x_0,y_0,z_0)的平面方程。试确定常量的形式，并写出笛卡儿坐标的谐波波函数。

解 平面方程是$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{k}=0$

在笛卡儿坐标系中

$$\boldsymbol{r}=[x\quad y\quad z],\boldsymbol{r}_0=[x_0\quad y_0\quad z_0]\text{和}\boldsymbol{k}=[k_x\quad k_y\quad k_z]$$

因此

$$(x-x_0)k_x+(y-y_0)k_y+(z-z_0)k_z=0$$

或

$$xk_x + yk_y + zk_z = x_0k_x + y_0k_y + z_0k_z$$

这个最末方程的左边是 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}$,而右边是问题中的常量。

谐波函数

$$\psi(r,t) = A\sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} \pm \omega t)$$

成为

$$\psi(r,t) = A\sin(xk_x + yk_y + zk_z \pm \omega t)$$

例 1-9 试写出在笛卡儿坐标中以方向余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 表示的平面谐波波函数,其中:$k_x = k\cos\alpha, k_y = k\cos\beta, k_z = k\cos\gamma$ 和 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$。然后证明此函效是三维微分波动方程的一个解。

解 由下式着手

$$\psi(r,t) = A\sin(xk_x + yk_y + zk_z - \omega t)$$

对应的方向余弦项来代替 k_x、k_y、k_z,如图 1-7 所示。

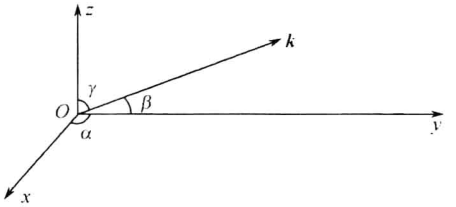

图 1-7 例 1-26 图

$$k_x = k\cos\alpha, k_y = k\cos\beta, k_z = k\cos\gamma$$

这里

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

因此

$$\psi(r,t) = A\sin[k(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) - \omega t]$$

现在取适当的导数来验证这是波动方程的一个解,即

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k^2\psi\cos^2\alpha \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -k^2\psi\cos^2\beta$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -k^2\psi\cos^2\gamma \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi$$

把前三个方程相加并利用

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

和

$$k = 2\pi/\lambda = \omega/v,$$

得到