ELECTRONIC ENGINEER
XIDIAN UNIVERSITY PRESS

Ten Lectures on Practical Wavelet Analysis

实用小波分析十讲

于凤芹　编著

西安电子科技大学出版社
XIDIAN UNIVERSITY PRESS

实用小波分析十讲

于凤芹　编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书从工科学生学习小波分析理论和方法的角度出发，采取新颖独特的十讲形式，介绍小波分析中普及和实用的，也是最基础和精华的核心内容。书中首先介绍作为预备知识的泛函分析的基本概念和时频分析的基本理论，然后讲述连续小波变换的意义及冗余性、离散小波级数与小波框架、多分辨率分析理论、二尺度方程与滤波器组、正交小波的设计方法、快速正交小波算法等内容，最后简要列举小波分析的奇异性检测、信号去噪、图像压缩等典型应用。

本书主线鲜明、自成体系，重点突出、层次分明，难点分散、便于自学，图文并茂、通俗易懂。本书可作为高等院校理工科高年级本科生、研究生的教材，也可作为相关专业技术人员学习小波分析基本理论和基本方法的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

实用小波分析十讲/于凤芹编著. 一西安：西安电子科技大学出版社，2013.7
ISBN 978-7-5606-3076-2

Ⅰ. ①实…　Ⅱ. ①于…　Ⅲ. ①小波理论　Ⅳ. ①O174.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 145724 号

策　　划　刘玉芳
责任编辑　王　瑛
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2013 年 7 月第 1 版　2013 年 7 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×960 毫米　1/16　　印　　张 9
字　　数　207 千字
印　　数　1～2000 册
定　　价　18.00 元
ISBN 978-7-5606-3076-2/O

XDUP 3368001-1

如有印装问题可调换

前　言

小波分析是20世纪80年代中期发展起来的一门数学理论和方法。小波分析理论和方法是数学家、物理学家和工程师们共同努力的结果。小波变换克服了傅里叶变换分析非平稳信号的局限性，提供了时域和频域同时局部化的自适应时频分析方法。小波分析中的多尺度分析能够聚焦到信号的任何时段与任何频段，因而小波分析被誉为“数学显微镜”。小波分析的Mallat快速算法为小波分析从理论到应用建立了桥梁，而小波分析MATLAB工具箱推动了小波分析方法应用的普及化。

小波分析因其数学思想精美、应用领域广泛而历经三十年不衰，其应用领域正在日益扩大，尤其是逐渐成为高等学校工科高年级本科生和研究生解决专业问题的一个有用工具。使用好小波分析这个工具需要理解和掌握小波分析理论。由于小波分析理论是建立在一定数学理论基础上的，对于缺少一定数学基础的工科学生来讲，理解和掌握小波分析理论还有一定的难度。

本书是作者在多年讲授小波分析及应用课程讲义的基础上，博采众多前辈著作之精华，将小波分析理论中最普及、最实用的部分，以图文并茂、通俗易懂的十次讲座形式展现给读者，在保持小波分析理论完整性的前提下，突出重点、分散难点、提示要点。作者采用比较容易理解的方式阐述主题内容，力争使读者有信心、有兴趣、有能力理解并掌握小波分析理论和方法。

本书的编写得益于许多前辈的著述，这些著述也是作者多年来学习小波分析理论的营养之源，在此表示深深的感谢！“小波分析及应用”课程是江苏省优秀研究生课程建设项目，本书是课程建设成果的一部分，得到了国家自然基金项目“汉语语音信号时频感知新特征提取的研究(No. 61075008)”的部分资助。在本书的编写过程中，得到了江南大学物联网工程学院领导和同事的关心与鼓励，作者的研究生参与了文字和图表的录入工作，西安电子科技大学出版社的阎永红总编辑、刘玉芳编辑为本书的出版做了大量认真细致的工作，在此一并表示感谢！

由于作者数学理论水平有限，书中不足之处敬请读者批评指正！

联系方式：yufq@jiangnan. edu. cn。

作　者

2012年12月22日于江南大学

目　录

第1讲 初识小波

本讲首先从傅里叶变换的局限性引出小波分析的必要性；然后给出连续小波变换的定义、计算过程及其意义；在了解小波函数应该具有的特点后，给出常用的几种小波。本讲的目的是使读者对小波有一个基本认识。在后续的各讲中，将分专题逐一呈现小波分析的核心内容。

1.1 傅里叶分析的局限性

从数学角度看，一个信号是自变量为时间 t 的函数 $f(t)$。现实中采集得到的信号一般都是能量有限的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty \tag{1.1}$$

满足式（1.1）条件的所有函数的集合形成平方可积函数空间 $L^2(\mathbf{R})$。对于属于 $L^2(\mathbf{R})$空间的任意一个信号 $f(t)$，可以用属于 $L^2(\mathbf{R})$空间的一组规范的正交的基本函数（简称标准正交基）展开。即如果 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，存在 $L^2(\mathbf{R})$空间的一组标准正交基$\{g_i(t),\ t\in\mathbf{R},\ i\in\mathbf{Z}\}$，使得

$$f(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i g_i(t) \tag{1.2}$$

而展开系数

$$c_i = \langle f(t),\ g_i(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_i^*(t) \mathrm{d}t \tag{1.3}$$

标准正交基$\{g_i(t),\ t\in\mathbf{R},\ i\in\mathbf{Z}\}$要满足以下条件：

$$\langle g_k(t),\ g_l(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g_k(t) g_l(t) \mathrm{d}t = \delta_{k,l} \qquad (k,\ l\in\mathbf{Z}) \tag{1.4}$$

对于给定的信号 $f(t)$，关键是选择合适的标准正交基$\{g_i(t),\ t\in\mathbf{R},\ i\in\mathbf{Z}\}$，使得信号 $f(t)$在这组基下的展开呈现出需要的特性。下面先看看信号分析中常用的两种信号展开形式。

一个信号 $f(t)$可用 $\delta(t)$函数展开为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau) \mathrm{d}\tau \tag{1.5}$$

信号的 $\delta(t)$函数展开可以确定信号 $f(t)$在任何时刻的值，即信号在时间上的定位是精确的。由于基函数 $\delta(t)$的时宽是无穷小而频宽是无穷大，故 δ 分析在时域上的定位是完全准

确的，但无法提供在频域的任何定位信息。

傅里叶变换使用 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 或 $e^{j\omega t}$ 作为基函数展开信号，即

$$F(\omega) = \langle f(t), e^{j\omega t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{1.6}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{1.7}$$

傅里叶变换反映的是整个信号在全部时间下的整体特征，由于 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 或 $e^{j\omega t}$ 这些基函数具有无穷大的时宽和无穷小的频宽，故傅里叶分析在频域上的定位是完全准确的，但不能提供任何局部时间段上的频率信息，即无法提供任何时间定位。

傅里叶分析与 δ 分析是两个完全不同的分析方法。现实中的信号往往是时变信号，例如，音乐信号、语音信号、生物医学信号、地震探测信号等，即它们的频谱特性都可能随时间而变化。要正确分析这种时变信号，需要同时从时域和频域共同定位，即需要寻找一种介于傅里叶分析和 δ 分析之间的、具有一定的时间分辨率和频率分辨率的基函数来展开时变信号，以便得到有用的分析结果。

例 1.1　已知信号

$$f_1(t) = \cos 20\pi t + \cos 40\pi t + \cos 120\pi t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

$$f_2(t) = \begin{cases} \cos 20\pi t & (0 \leqslant t < 0.35) \\ \cos 40\pi t & (0.35 \leqslant t < 0.65) \\ \cos 120\pi t & (0.65 \leqslant t \leqslant 1) \end{cases}$$

画出信号 $f_1(t)$、$f_2(t)$的时域波形和频谱图。

解　信号 $f_1(t)$、$f_2(t)$的时域波形和频谱图如图 1.1 所示。由于信号 $f_1(t)$和 $f_2(t)$都含有三个相同的频率成分，尽管这三个频率成分出现的时刻不同，但这两个信号的傅里叶变换的频谱却是相同的。

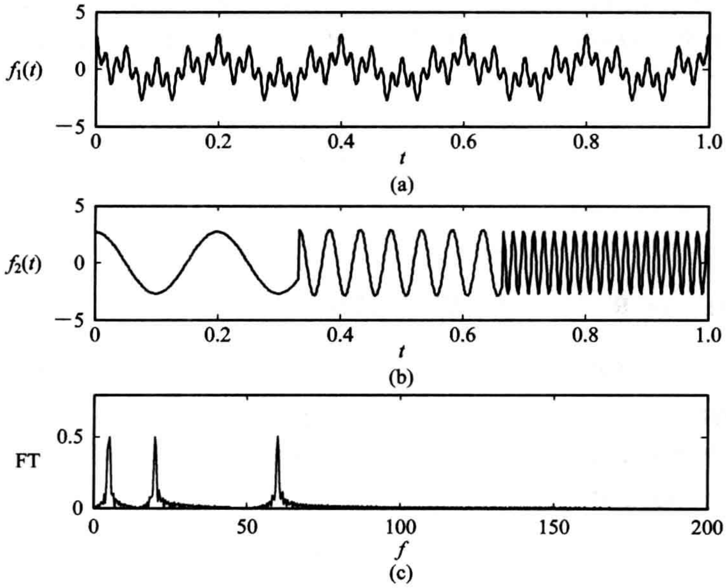

图 1.1　信号 $f_1(t)$、$f_2(t)$的时域波形和频谱图

(a) $f_1(t)$的时域波形；(b) $f_2(t)$的时域波形；(c) 频谱图

从图 1.1 可以看出，由于傅里叶变换提取信号的频谱需要利用信号的全部时域信息，只能看到信号整体的频谱构成，不能给出这些频率成分出现的时刻，也不能够反映信号频率成分随时间的变化过程；傅里叶变换的积分作用平滑了非平稳信号的突变成分。

为了形象地说明傅里叶变换的局限性和小波变换的优越性，可以将这两种变换的结果想象为是两种不同形式的“乐谱”。音乐信号是一种典型的非平稳的声音信号，其傅里叶变换就是将这个时间波形转化成某种乐谱。一首随时间高低起伏变化的乐曲，经过傅里叶变换得到了这段乐曲含有的高低音符，即频率信息。但遗憾的是，傅里叶变换提供的乐谱是将所有的音符都挤在了一起，如图 1.2 所示，这个乐谱只反映了音乐信号中存在哪些高音和低音，却无法提供音乐信号在哪一时刻有高音，在哪一时刻有低音，即傅里叶变换乐谱只能提供频率信息而不能提供时间信息。

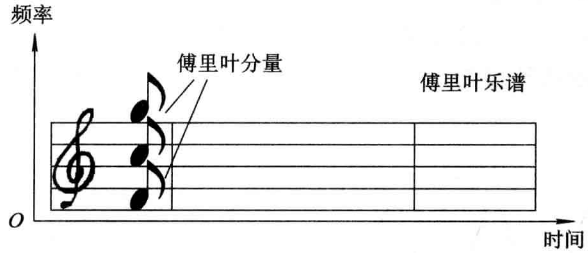

图 1.2 傅里叶变换得到的“乐谱”

小波变换能够有效地克服傅里叶变换缺少时间定位的缺点。音乐信号经过小波变换到小波域，如图 1.3 所示。这种小波变换得到的“乐谱”不仅能检测到歌声中存在的高音与低音，而且还能将高音与低音出现的位置与原始信号相对应。即小波变换不仅能够给出信号的频率信息，而且能够说明这些频率成分发生的时刻。

图 1.3 小波变换得到的“乐谱”

1.2 什么是小波

傅里叶变换之所以无法提供时间定位信息，完全是由于傅里叶变换使用了具有无限时宽的 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 作为基本函数。为了提供频率信息，必须使用“波”(Wave)函数；为了提供时间信息，必须使用“有限时宽的波”。数学上，在有限时间内不为零的函数，称之为在时域上具有紧支集或近似紧支集特性，也就是“小”(let)的含义。两者同时具备就是小波(Wavelet)。“波”和“小波”的异同如图 1.4 所示。

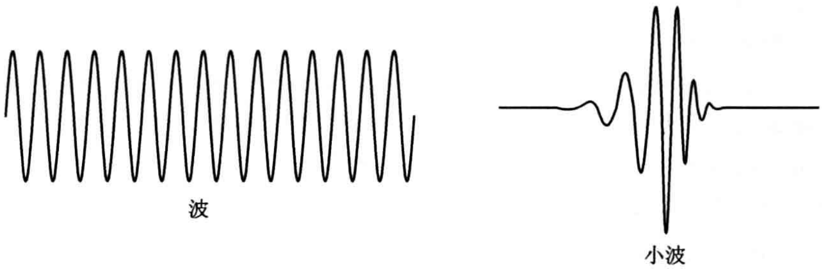

图 1.4 “波”和“小波”的异同

由图 1.4 可见，小波必须具有正负交替的波动性，也即直流分量为零。同时，小波在时域具有有限的持续时间，是一种在时域能量非常集中的波，即它的能量是有限的，而且集中在某一点附近。如果不同时具备这两个条件，则不能称其为小波。例如，图 1.5(a)具有波动性，但具有无限的持续期，即“波而不小”；图 1.5(b)具备有限持续期，但不呈现波动性，即“小而非波”。

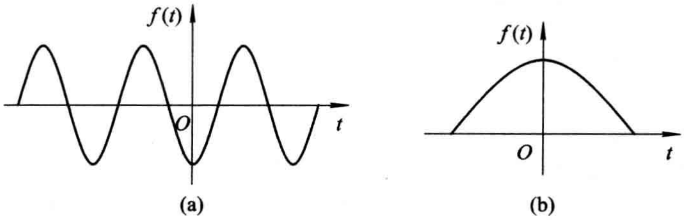

图 1.5 不是小波的两个例子

那么，从数学上讲，小波到底是什么呢？小波是一种函数，这个函数具有有限的持续时间；具有突变的频率和振幅，在整个时间范围里的幅度平均值为零；其波形可以是不规则的，也可以是不对称的。目前，可简单地将小波理解为满足以下两个条件的特殊信号：

(1) 小波必须是振荡的；

(2) 小波的振幅只能在很短的一段区间上非零，即是局部化的。

原则上讲，$L^2(\mathbf{R})$函数空间的函数都可作为小波函数，包括实数函数或复数函数，具有紧支集或非紧支集函数，正则或非正则函数等。一般情况下，常选取紧支集或近似紧支集的且具有正则性(具有频域的局部性)的实数或复数函数作为小波函数，以使小波函数在时域和频域都具有较好的局部特性。

了解了小波函数，就可以对小波函数进行尺度缩放，以满足不同时间分辨率的要求。如图 1.6 所示为小波函数 $\psi\left(\frac{t}{a}\right)$在 $a=\frac{1}{2}$，$a=1$，$a=2$ 不同时宽的波形和其对应的不同频宽的频谱，目的是说明小波的尺度缩放与其频谱变化的对应关系，时域的尺度参数隐含着频域信息。

除了缩放运算，还可以对小波进行时间平移，简称时移。时移就是指小波函数在时间轴上的波形平行移动，如图 1.7 所示。

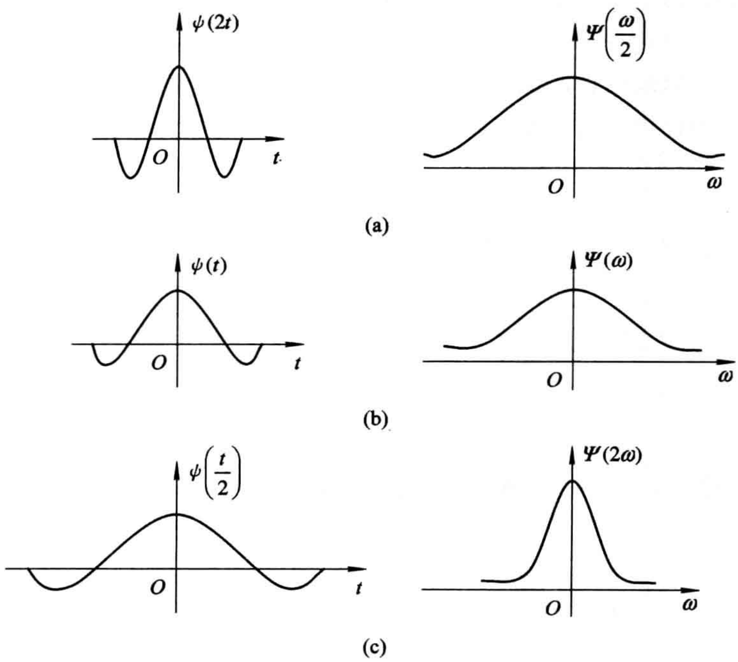

图 1.6　小波函数尺度缩放与其频谱变化的对应关系

(a) $a=\frac{1}{2}$；(b) $a=1$；(c) $a=2$

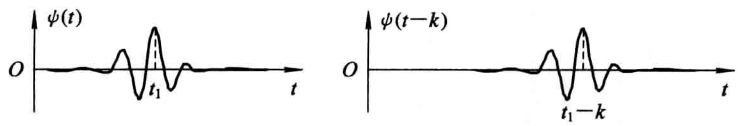

图 1.7　小波的时间平移

例 1.2　小波函数随尺度 a 和位移 b 同时变化的情形如图 1.8 所示。

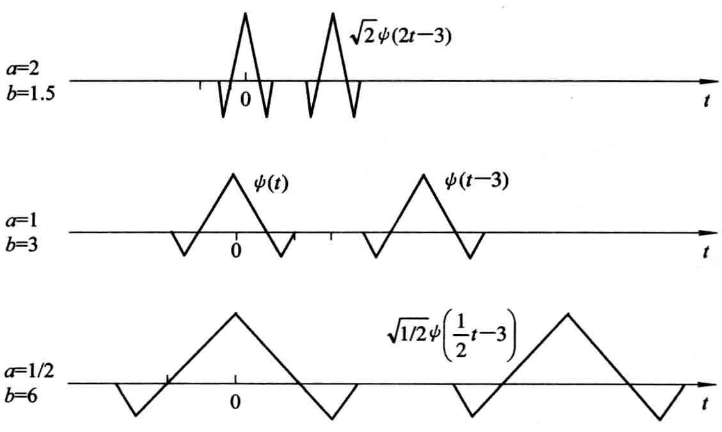

图 1.8　小波随尺度 a 和位移 b 同时变化

尺度缩放和时间平移这两种操作对于分析瞬时时变信号非常有用。通过尺度缩放可以对信号进行多尺度细化分析；而通过时间平移能够定位信号分析的时段，从而使小波分析能有效地从信号中提取信息，解决傅里叶变换不能解决的问题。

图 1.9 所示为使用不同尺度和不同时移的小波进行信号分析的示意图。

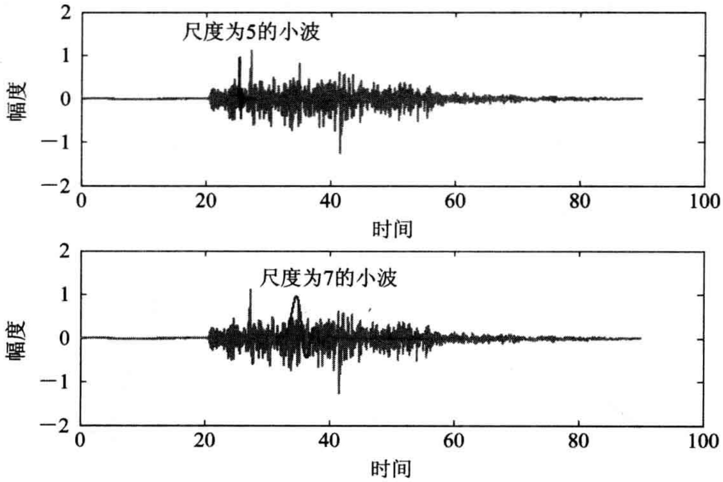

图 1.9　使用不同尺度和不同时移的小波进行信号分析

图 1.9 中的两个不同尺度的小波放大后如图 1.10 所示，从中可以进一步认识和理解小波多尺度分析的含义。

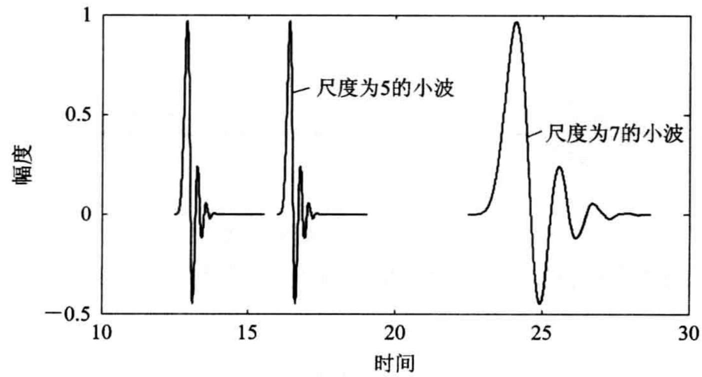

图 1.10　放大后的图 1.9 中的不同尺度和不同时移的小波

1.3　连续小波变换定义

认识了小波并了解了小波的尺度缩放和时间平移的概念后，下面给出小波变换的定义：

$$WT_f(a,\tau)=\langle f(t),\psi_{a,\tau}(t)\rangle=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\mathrm{d}t \tag{1.8}$$

式中：$\psi(t)$为小波函数，又称为基本小波或母小波；$\psi^*(t)$表示对小波函数$\psi(t)$取共轭运算；a为缩放因子，对应于频率信息；τ为平移因子，对应于时间信息。

下面用图 1.11 来说明小波变换的计算过程，进一步理解式(1.8)给出的小波变换的意义。

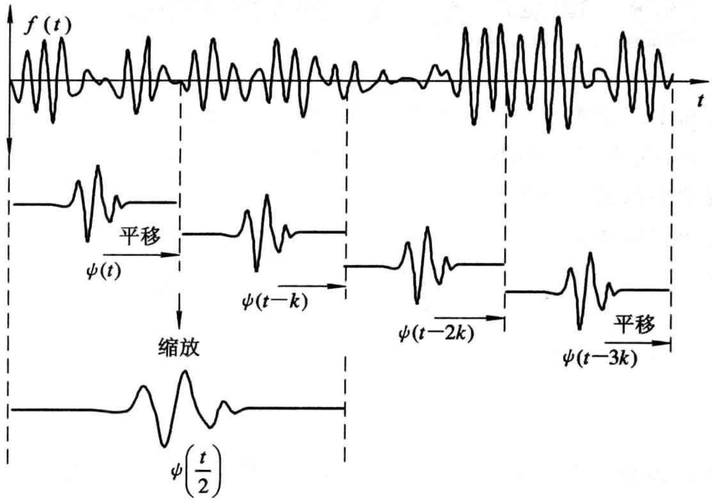

图 1.11　小波变换的计算过程

步骤 1　把小波 $\psi(t)$ 与原始信号 $f(t)$ 的开始部分进行比较，计算相关系数 C，$C=\mathrm{WT}_f(a, \tau)=\langle f(t), \psi_{a,\tau}(t)\rangle$，此时，$a=1$，$\tau=0$，这个相关系数 C 表示信号与尺度为 1、位移为 0 的小波 $\psi_{1,0}(t)$ 的近似程度。相关系数 C 的值越高，表示这段信号与小波 $\psi_{1,0}(t)$ 越相似，因此相关系数 C 可以反映出两种波形的相关程度。

步骤 2　把小波向右移动，移动的距离为 k，得到的小波函数为 $\psi(t-k)$，计算相关系数 C，$C=\mathrm{WT}_f(a, \tau)=\langle f(t), \psi_{a,\tau}(t)\rangle$，此时，$a=1$，$\tau=k$。

步骤 3　再把小波向右移 $2k$，得到的小波函数为 $\psi(t-2k)$。重复步骤 1 和步骤 2，按上述步骤一直进行下去，直到信号结束。

步骤 4　扩展小波，例如扩展一倍，得到的小波函数为 $\psi\left(\frac{t}{2}\right)$。

步骤 5　重复步骤 1～步骤 4，计算完所选尺度下所有移位下的小波变换系数。

以上只是一种对小波变换的粗略解释。事实上，小波变换的实质是计算一个个小波分量与信号的相关系数，其直观意义是先用一个时窗最窄、频窗最宽的小波作为尺子去一步步地“丈量”信号，也就是比较这段信号与小波的相似程度。如果所用的小波波形与信号的局部匹配，其相关系数 C 值就越大；反之，如果小波波形与信号的局部相去甚远，则相关系数 C 值就较小，如图 1.12 所示。当一个尺度比较完成后，再将尺子拉长一倍，再去一步步地比较，从而得出一组组数据，如此这般循环，最后得出的就是信号在不同尺度、不同位移下的全部小波变换系数。

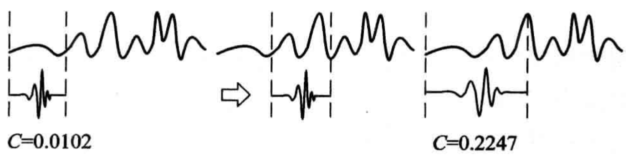

图 1.12　小波波形与信号局部的相关性示意图

1.4　傅里叶变换和小波变换的对比分析

傅里叶变换和小波变换是信号分析与处理中的两类重要变换。为了进一步理解小波分析的意义，本节从信号作为基函数的展开角度，将两者进行对比分析。

利用高等数学中的关于级数展开知识，任何一个复杂的周期信号 $f(t)$ 都可以用简单的三角函数表示成如下形式：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t) \tag{1.9}$$

利用 $e^{jx}=\cos x+j\ \sin x$ 的关系，周期信号 $f(t)$ 还可以用复指数函数表示为

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t} \tag{1.10}$$

信号的傅里叶级数展开示意图如图 1.13 所示。信号的傅里叶级数表示就是将信号中含有的不同频率、不同幅度的正弦或余弦分量逐一析出，并将这些正弦或余弦波形用谱线来表示。

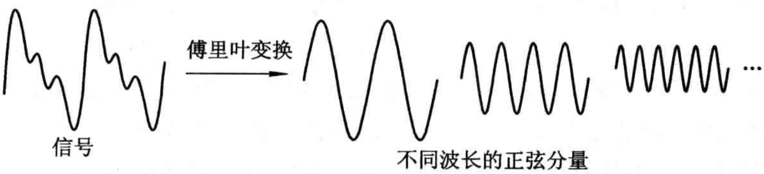

图 1.13　傅里叶级数展开示意图

利用傅里叶级数展开或者傅里叶变换可以很容易地将时域信号 $f(t)$ 转换到频域上，使信号的频率特性一目了然，并且傅里叶变换将信号 $f(t)$ 的主要能量都集中在频率较低的低频分量上，这种能量集中性有利于在频域进一步对信号进行处理。

傅里叶变换在频域中具有较好的局部化能力，特别是对于那些频率成分比较简单的确定性信号，傅里叶变换可以很容易地把信号表示成各种频率成分叠加的形式；但傅里叶变换在时域没有局部化能力，无法从傅里叶变换中看出原信号在任一时间点附近的频率形态。因此需要这样一个数学工具：既能在时域很好地刻画信号的局部性，同时也能在频域反映信号的局部性，这种数学工具就是“小波变换”。从函数分解的角度出发，希望能找到一个基函数，即小波函数 $\psi(t)$ 来代替傅里叶变换中用到的基函数 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$，这样，任何复杂的信号 $f(t)$ 都能由一个母小波 $\psi(t)$ 经过尺度伸缩和时间平移产生的小波基函数 $\psi_{a,\tau}(t)$ 的线性组合来表示，而信号用小波基函数展开的系数能够反映信号在时域和频域上的局部化特性，同时小波基函数 $\psi(t)$ 及其伸缩平移要比三角函数基 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 更好地匹配非平稳信号。

小波变换的本质和傅里叶变换类似，也是用精心挑选的小波基函数来表示信号。小波变换的基函数就是对这个母小波的尺度缩放和时间平移后的集合。信号的小波变换就是用这些小波函数的集合来展开信号。或者说，小波变换就是将信号中含有的不同尺度、不同移位的小波波形逐一析出，如图 1.14 所示。

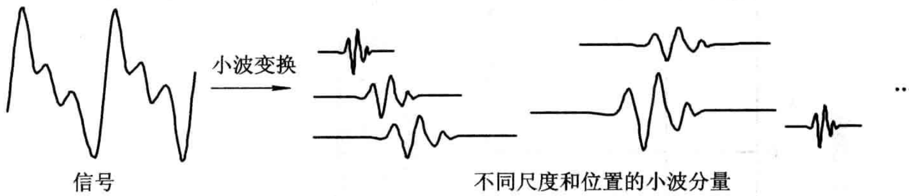

图 1.14 小波变换示意图

小波分析是傅里叶分析方法的继承与发展，主要表现在以下两个方面：

① 傅里叶变换用到的基本函数只有 $\sin\omega t$、$\cos\omega t$ 和 $e^{j\omega t}$，即傅里叶变换的基函数是唯一的；而小波分析所用到的函数则具有不唯一性，即同一个信号可以采用不同的小波函数进行分析。采用不同的小波，分析效果可能相差很远。所以，针对不同的分析问题，选择合适的小波基函数是一个重要问题。

② 傅里叶分析的基函数 $\sin\omega t$、$\cos\omega t$ 和 $e^{j\omega t}$ 构成一个标准正交基，因而傅里叶变换是最佳信号变换之一，其反变换也是唯一的；而小波变换中的小波基函数往往不是正交的，甚至小波基函数之间是线性相关的，所以，连续小波变换是极度冗余的，冗余度增加了分析和解释小波变换结果的困难，因此，希望小波变换冗余度尽可能小。此外，从信号重构精度方面考虑，正交基是信号重构最理想的基函数，所以更希望小波是正交小波。小波分析的核心内容也就是如何构造具有光滑性、紧支性、正则性、对称性的正交小波，以及正交小波变换及其快速算法。

1.5 常用的几种小波

在学习小波分析理论之前，先认识一些常用的小波函数，了解小波函数的定义和波形特点。有关小波函数的其他要求，将在后续的学习中逐渐介绍。

1. Haar 小波

Haar 小波是 1910 年由 Haar 提出的，它是最早、最简单、最容易理解的小波基函数，其定义和对应的频谱函数如下：

$$\psi(t)=\begin{cases}1 & \left(0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2}\right)\\ -1 & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\right)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases} \tag{1.11}$$

$$\Psi(\omega)=\frac{1}{4}\left(e^{-j\frac{\omega}{4}}-e^{-j\frac{3\omega}{4}}\right)\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{4}\right) \tag{1.12}$$

图 1.15 所示为 Haar 小波的时域波形和频谱图。从波形可以看出，Haar 小波在时域有短的支集[0，1]，但它是一个具有间断点的函数，即时域光滑性很差，时域存在的间断点导致其频域的局部化性质很差。容易验证，Haar 小波是一种实的、正交的、反对称的小波。

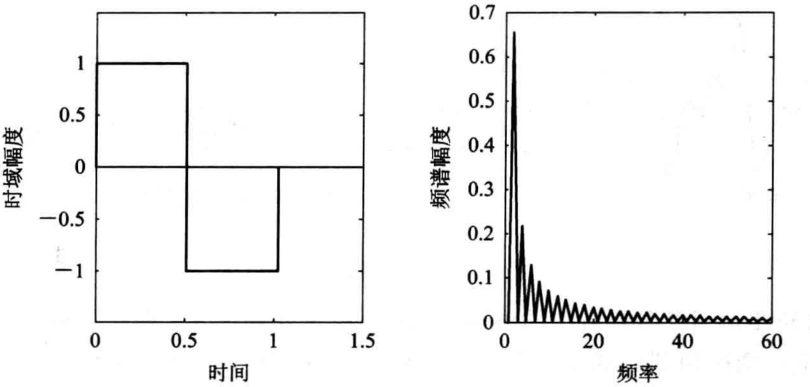

图 1.15　Haar 小波的时域波形和频谱图

2. 高斯小波

高斯小波用高斯函数表示，即

$$\psi(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \tag{1.13}$$

由于高斯函数的傅里叶变换仍然是高斯函数，所以其频谱函数为

$$\Psi(\omega) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}} \tag{1.14}$$

图 1.16 所示为高斯小波的时域波形，其频谱图和时域波形相同。高斯小波在时域和频域同时具有最小的支集，即在时频平面具有最小的时频支撑区，所以，在信号分析与处理中，一般常选高斯函数作为窗函数使用。高斯小波是实的非正交小波。

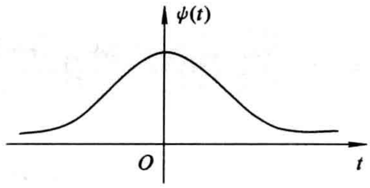

图 1.16　高斯小波的时域波形

3. 墨西哥草帽小波

高斯小波的二阶导数称为墨西哥草帽小波，其时域表达式和对应的频谱函数分别为

$$\psi(t) = (1 - t^2)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \tag{1.15}$$

$$\Psi(\omega) = \sqrt{2\pi}\omega^2\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}} \tag{1.16}$$

图 1.17 所示为墨西哥草帽小波的波形和频谱图，因波形酷似墨西哥草帽而得名。墨西哥草帽小波是一种实的非正交小波，具有良好的对称性，支撑区是有限的，在视觉信息分析处理和边缘检测方面得到了广泛应用，也称之为 Marr 小波。

用高斯函数的差形成的小波称为 DOG(Difference of Gauss)小波。DOG 小波是墨西哥草帽小波的良好近似。DOG 小波的时域和频域表示如下：

$$\psi(t) = \mathrm{e}^{-|t|^2/2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|^2/8} \tag{1.17}$$