

普通高等学校“十二五”规划教材

电路实验 与认识实习

主 编 周 蕾
编 著 刘玉英 卢学民 刘晓洁



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

普通高等学校“十二五”规划教材

电路实验与认识实习

主编 周 蕾

编著 刘玉英 卢学民 刘晓洁

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是依据教育部高等学校电子信息科学与电气信息类基础课程教学指导分委员会修订的《电子信息科学与电气信息类平台课程教学基本要求》编写的,内容符合教学指导委员会关于电路课程实验教学和认识实习实践环节的教学基本要求。

全书共分三章,内容包括电气测量方法、电路实验基础知识、常用电子元器件的认识、常用电路实验仪器仪表的使用、电路仿真软件 Multisim10.0 介绍、焊接技术、基本电路实验、仿真实验、拓展实验和电气安全常识。

本书内容全面、注重基础、兼顾实用,可作为高等院校工科电子信息科学与电气信息类各专业本科/大专学生的电工电子实践课程和电路课程的实验教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电路实验与认识实习/周蕾主编. —西安:西安电子科技大学出版社,2012.10

普通高等学校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5606-2926-1

I. ① 电… II. ① 周… III. ① 电路—实验—高等学校—教材 IV. ① TM13-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 221691 号

策 划 云立实

责任编辑 云立实

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西华沐印刷科技有限责任公司

版 次 2012年10月第1版 2012年10月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印 张 15

字 数 356千字

印 数 1~3000册

定 价 26.00元

ISBN 978 - 7 - 5606 - 2926 - 1/TM · 0101

XDUP 3218001-1

如有印装问题可调换

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

前 言

电路实验和认识实习是电类专业学生两个必不可少的实践环节。为了适应当前电气、电子信息科学技术的迅猛发展,以及高等院校对高素质工程类人才培养的新要求,我们根据教育部高等学校电子信息科学与工程类基础课程教学指导分委员会关于电路课程实验教学和认识实习实践环节的教学基本要求,以现有的教学资源为基础,结合多年来的教学实践与尝试,编写了本书。

作为电气、电子信息类专业学生先导性实践课程的教学用书,在本书的编写过程中,我们力求其内容全面、紧凑、清楚,并注意强调以下几个方面:

(1) 注重学生专业素质和工程意识的培养,使学生了解和掌握电气测量方面的基础知识。书中不仅介绍了电气测量方法的基础知识,包括一些基本概念、基本方法与要求,以及测量数据的处理及误差分析等,还对现代数字式电气测量系统及复杂测量系统的多变量测量误差分析方法作了概述,为学生在电路实验或今后的工程试验中制定测量方案、处理测量数据、分析测量误差、总结试验结果等提供了完整的基本概念和基本方法。

(2) 强调实验内容与电路理论之间的相互支持,用实验来加深对基础理论的理解,用理论来指导实验。电路实验是与“电路分析”课程配套的实践环节,书中围绕课程教学重点,共编排了14个基本实验、4个仿真实验和3个拓展实验,希望通过实验培养学生严肃认真的科学态度、理论联系实际的工程观点,培养学生的实验技能,提高学生实际分析问题和解决问题的能力。

(3) 认识实习内容全面,强调循序渐进,立足于为学生的实践能力的培养打好基础。其内容包括了基本元器件的认识、常用电子仪器仪表的认识及使用方法、焊接技术介绍及安全用电知识。在每部分内容后都安排有相应的实践环节。

(4) 介绍了目前最新的虚拟电子工作台 Multisim10.0 的使用。利用仿真软件进行电路的设计和研究,在很多方面和实际操作实验相比具有无可比拟的优点。掌握仿真软件的使用,也是工科电类专业学生将来从事设计、研究和开发所需要的重要技能。

(5) 结合教育部关于卓越工程师培养的要求,鼓励学生主动学习,主动思考,动手实践,书中编排了除基本实验之外的拓展实验(实验中标有*部分),供学生选做。

本书由周蕾、刘玉英、卢学民、刘晓洁编写。刘玉英参与了第 1 章的编写；卢学民、刘晓洁参与了第 2 章和附录的编写；卢学民编写了第 3 章的拓展实验部分(实验中标有*部分)，并为本书绘制、拍摄了大量图片；全书由周蕾主编并统稿。杨上河老师对本书的编写提出了许多有益的建议。钱剑敏副教授、赵曙光教授对全书作了仔细的审阅，并提出了很多非常宝贵的意见。在编写过程中我们还参考了兄弟院校的教材和文献，得到了东华大学电工电子中心崔葛瑾、李伟民等老师的帮助，并得到了西安电子科技大学出版社云立实等老师的大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者学识和能力有限，书中一定还存在一些疏漏和不妥，期待各位读者的批评和指正。

编 者

2012 年 6 月

目 录

第 1 章 电气测量方法	1	2.3.2 Multisim10.0 的基本操作方法	84
1.1 电气测量的基本知识与方法	1	2.3.3 Multisim10.0 的常用操作	99
1.1.1 电气测量的基本概念	1	2.3.4 Multisim10.0 的分析功能	114
1.1.2 常用电气量	1	认识实习 3 仿真工具的使用	119
1.1.3 电气测量的方法与要求	2	2.4 焊接技术	121
1.2 实验数据处理及误差分析	4	2.4.1 焊接技术简介	122
1.2.1 有效数字	4	2.4.2 手工烙铁焊接技术	123
1.2.2 测量数据的读取与表示	4	认识实习 4 焊接与制作	129
1.2.3 误差分析与测量数据处理	9		
1.2.4 实验报告要求	12		
1.3 电气测量系统	13	第 3 章 电路实验	131
1.3.1 电气测量系统及其组成	13	实验一 元件的伏安特性	131
1.3.2 电气测量系统的误差估计	16	实验二 基尔霍夫定律与电位测量	135
1.4 电气测量中的常见问题及处理方法	18	实验三 电源的外特性和电源的等效变换	137
1.4.1 电气测量中的常见问题	18	实验四 含受控源的直流电路	141
1.4.2 故障出现时的处理方法及故障排查	19	实验五 叠加定理和戴维南定理	147
		实验六 交流阻抗参数的测量	150
第 2 章 认识实习	21	实验七 电路功率因数的提高	153
2.1 常用电子元件	21	实验八 串联谐振电路	156
2.1.1 电阻器和电位器	21	实验九 一阶电路和二阶电路的响应	159
2.1.2 电容器	26	实验十 互感电路	163
2.1.3 电感器	31	实验十一 三相电路电压与电流的测量	167
2.1.4 晶体管	33	实验十二 三相电路功率的测量	171
2.1.5 集成电路	48	实验十三 二端口网络的传输参数	175
认识实习 1 常用电子元件的测试	50	实验十四 回转器	179
2.2 常用电路实验仪器	52	实验十五 网络定理仿真	183
2.2.1 常用仪器仪表的分类	52	实验十六 受控源特性的研究仿真	189
2.2.2 电源与常用信号源	52	实验十七 电路频率特性的研究仿真	197
2.2.3 常用仪表与示波器	58	实验十八 电路的时域响应仿真	202
认识实习 2 常用电子仪器仪表的使用	80	*实验十九 光敏电阻特性测试及其应用	207
2.3 电路仿真工具 Multisim 10.0 简介	83	*实验二十 利用双踪示波器显示二极管 伏安特性曲线	211
2.3.1 Multisim10.0 概述	83	*实验二十一 电感、电容的测量方法	213

附录 A 日常安全用电知识	218	A.2.2 人体触电及急救	225
A.1 交流电的概念	218	A.2.3 日常安全用电知识	227
A.1.1 交流电的产生与传输	218		
A.1.2 低压供配电系统	220	附录 B 实验装置介绍	229
A.2 安全用电	222	B.1 多功能电路装置	229
A.2.1 电气安全	222	B.2 九孔板	234

第 1 章 电气测量方法

1.1 电气测量的基本知识与方法

1.1.1 电气测量的基本概念

电路实验是帮助人们认识电路原理、掌握电路特性直接而有效的方法。通过实验还可以验证电路工作的正确性及其实际工程应用的可靠性。对电路中电气量的测量则是电路实验的必要手段。通过测量可以获得电路中某被测电气量的稳态及暂态特性，形成对该电气量定性或定量的认识，掌握其变化规律，使电路实验达到设定的目标与要求。

电气量测量方案的制定，测量仪器或仪表的选用，以及对测量数据的处理是构成测量有效性的三个重要因素。例如，需要测量电路中某一电阻的阻值，首先需要确定测量的方案。可以采取的方案有三个：一是将电路断电，取出被测电阻，然后用欧姆计或万用表的欧姆挡测量电阻的阻值；二是测量电路中该电阻两端的电压和流过电阻的电流，通过欧姆定律来计算；三是将被测电阻放入惠斯通电桥，利用电桥的平衡原理来测量。确定了测量方案后，需要根据被测电量的性质，选择具有合适的量程及精度的测量仪器；最后，需要对测量数据进行处理，得到测量结果。该测量结果可以用一个数据或一组数据或曲线等来表示。不正确的测量方案、过大的测量误差及错误的数据处理，会使人们对被测电气量变化规律的认识产生极大的偏差。当该电路被实际应用时，会使应用系统工作不正常，甚至带来严重的故障或事故。

1.1.2 常用电气量

表 1.1.1 列出了电路分析中经常涉及的电气量及对应的单位。目前，我国采用的是国际单位制(SI)。

表 1.1.1 常用电气量及国际单位制

电 气 量		单 位	
名 称	符 号	中 文	符 号
电 流	I	安[培]	A
电 压	U	伏[特]	V
有功功率、无功功率、视在功率	$P、Q、S$	瓦[特]、乏、伏安	W、var、V·A
频 率	f	赫[兹]	Hz
电 阻	R	欧[姆]	Ω
电 感	L	亨[利]	H
电 容	C	法[拉]	F
时 间	t	秒	s

在实际应用中有时会感到表 1.1.1 中这些单位太大或太小, 使用不便, 因此在这些单位前加上了一些词头, 用来表示这些单位与一个以 10 为底的正次幂或负次幂相乘后所得到的辅助单位, 见表 1.1.2 所示。

表 1.1.2 常用词头

词 冠	名 称		倍 数
	中文	符号	
giga	吉或千兆	G	10^9
mega	兆	M	10^6
kilo	千	k	10^3
milli	毫	m	10^{-3}
micro	微	μ	10^{-6}
nano	纳	n	10^{-9}
pico	皮	p	10^{-12}

1.1.3 电气测量的方法与要求

1. 电气测量的方法

电路实验或实际工程试验中, 在满足测量要求的前提下, 电气量的测量方法要考虑方案的合理性和可实施性。常用的电气测量方法有直接测量、间接测量和比较测量三种。

在 1.1.1 节中提到的电阻的三种测量方法分别代表了电气测量中三种典型的测量方法。

1) 直接测量

直接测量是指通过直接使用专用测量仪表来获得被测电气量的测量结果的测量方法。如 1.1.1 节中提到的用欧姆计测量电阻的阻值, 又如用直流电流表测量直流电流, 用交流电压表测量交流电压等。直接测量的结果可用下式表示:

$$y = x \tag{1-1}$$

式中: y 为被测电气量; x 为测量仪表显示结果。这是最简单易行的测量方法。直接测量具有操作简便、测量时间短等优点, 广泛应用于实际工程测量中, 条件是必须有可用的测量仪表。

2) 间接测量

如果几个物理量间有确切的函数关系, 可以先直接测量几个相关量, 然后用函数关系式计算出无法直接测量的被测量。该方法称为间接测量, 通常用下式表示:

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_m) \tag{1-2}$$

式中: y 为被测电气量; $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为与被测量相关的物理量, 它们可通过直接测量(或其他方法)来获取。如上述提到测量电阻时, 通过测量电路中被测电阻两端的电压和流过电阻的电流, 再由欧姆定律来计算电阻的阻值; 又如, 正弦交流电路中某电感的电感量可表示为

$$L = \frac{U}{2\pi f \times I} \quad (\text{亨利}) \tag{1-3}$$

式中: U ——电感两端的交流电压, 单位: 伏特;

I ——通过电感的交流电流, 单位: 安培;

f ——正弦交流电频率, 单位: 赫兹。

要测量电感 L , 可先用直接测量法测得 I 、 U 和 f , 然后按式(1-3)计算 L 值。

间接测量常用于以下三种情况：① 被测量无法直接测量；② 条件不允许，如测量仪器过于昂贵、庞大等；③ 间接测量能获得更高的精度。

3) 比较测量

被测电气量还可以通过与某标准量(精度较高的已知量)作比较获得，这种方法称为比较测量法。例如，用电桥法测量电阻。其原理如图 1.1.1 所示，其中 G 为检流计， R_1 、 R_2 为比率臂电阻， R_S 为标准臂电阻， R_X 为被测电阻。根据电桥平衡的条件，当检流计 G 中电流为 0 时，可得到被测电阻为

$$R_X = \frac{R_1}{R_2} R_S \quad (1-4)$$

测量时通过单独调节 R_S 可使流过检流计 G 的电流为 0，使电桥达到平衡。

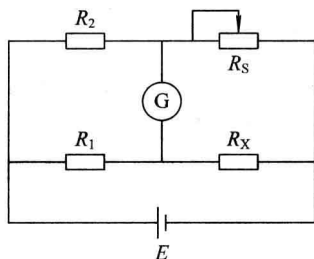


图 1.1.1 惠斯通电桥

2. 电气测量的要求

测量要求是根据实际工程及实验要求提出的。它规定了测量目的、初步测量方案、精度或准确度要求及测试条件(包括环境条件)，所以在进行测量之前应该明确以下几点。

1) 了解被测量的特点，明确测量目的

了解被测量是直流量还是交流量。如果是直流量，应预先估计其内阻的大小；如果是交流量，那么它是低频量还是高频量，是正弦量还是非正弦量，是线性变化量还是非线性变化量，是测量有效值、平均值还是峰值，等等，需充分了解。如测量高频量或脉冲量应选择宽频带测量仪器或仪表；非正弦电压测量要进行波形换算；非线性变化量(如二极管的内阻、具有气隙的铁心电感等)的测量要注意实际工作状态等。

2) 确定测量原理，制定初步方案

根据被测对象的性质，估计误差范围，分析主要影响因素，初步拟定可选的几个方案，再进行优选。对于复杂的测量任务，可采用间接的测量方法，预先绘制测量框图，搭接测量电路，制定计算步骤及计算公式等。

在拟定测量步骤时，要注意以下几点：

- (1) 应使被测电路系统及测试仪器等均处于正常状态。
 - (2) 应满足测量原理中所要求的测量条件。
 - (3) 尽量减小系统误差，设法消除随机误差的影响，合理选择测量次数及组数。
- ### 3) 明确准确度要求，合理选择仪器类型

在测量中为了得到准确的结果，初学者通常会认为使用仪表的等级越高，测量的结果越准确，但实际上测量的结果是否准确，不仅仅取决于仪表的等级，还与量程有关。不同等级的仪表由于量程不同，有时可以达到相同的测量准确度。如当选择指针式仪表测量时，在量程的选择上，应使仪表指针偏转至满刻度的 $2/3$ 处最佳；选用数字仪表量程时，测量值应尽量接近量程。

仪表的准确度一般标注在刻度标尺或铭牌上，习惯上也称为精度，准确度等级习惯上称为精度等级。参照国家标准，工业仪表准确度等级共分 7 级，分别是 0.1、0.2、0.5、1.0、1.5、2.5 和 5.0。

$$\text{仪表精度 } s = \frac{\text{仪表绝对误差的最大值}}{\text{仪表量程}} \times 100\% \quad (1-5)$$

若仪表精度百分比 ≤ 0.1 , 则为 0.1 级表, $0.1 < \text{精度百分比} \leq 0.2$, 为 0.2 级仪表, 以此类推。其中, 仪表量程为仪表的最大测量范围, 绝对误差的最大值是在仪表量程范围内出现的最大误差值。

4) 环境条件要符合测量要求

测量现场的温度、湿度、电磁干扰、仪器的安放、接地等, 均应符合测量任务的要求。必要时应采用空调、屏蔽和减震等措施使环境条件符合测量要求。

1.2 实验数据处理及误差分析

1.2.1 有效数字

1. 有效数字的概念

在记录实验测量数据时, 通常用有效数字来表示, 它是一串测量得到的数字, 其最后一位是估计的不确定的数字。通过直接读取获得的准确数字叫做可靠数字; 通过估读得到的那部分数字叫做欠准数字。把测量结果中能够反映被测量大小的带有一位欠准数字的全部数字叫做有效数字。

如用 100 mA 量程的电流表测量某支路中的电流, 读数为 85.6 mA, 则前面两个数“85”是准确的可靠读数, 称为“可靠数字”, 而最后一数字“6”是估读的, 称为“欠准数字”, 两者合起来称为“有效数字”, 其有效数字的位数为 3 位。

2. 有效数字的正确表示

当按照测量要求确定了有效数字的位数后, 每一测量数据只应有一位欠准数字, 即最后一位是欠准数字, 而它前面的各位数字必须是准确的“可靠数字”。有效数字的位数与小数点的位置无关。例如, 456、45.6、4.56 均为 3 位有效数字。“0”在数字中间和末尾都算有效数字, 而在数字的前头则不算有效数字。206、6.70、0.0825 和 0.193 等, 它们都是 3 位有效数字。

1.2.2 测量数据的读取与表示

1. 测量数据的读取

通常采用的测量仪表有指针式仪表和数字式仪表两种。

在使用指针式仪表时, 应注意不要用小量程去测量大信号, 否则会有烧表的危险。如果用大量程去测量小信号, 那么指针偏转太小, 可能无法读数或使读取的有效数字减少。量程的选择应尽量使指针偏转到满刻度的 $2/3$ 左右。如果事先不清楚被测电压的大小, 应先选择最高量程挡, 然后逐渐减小到合适的量程。

数字式测量仪表采取将被测的连续物理量经过取样和量化, 转变为离散的物理量, 以

数字的形式进行编码、传输、处理和显示的测量方法。随着计算机技术和集成电路的发展,数字式测量仪表已成为主流。与模拟式仪表相比,数字式仪表灵敏度高,精确高,显示清晰,过载能力强,并且便于携带,使用简单,因此得到了越来越广泛的应用。使用数字式仪表时应尽量选择与被测量值接近的量程,避免因丢失有效数字而造成较大误差。

此外,在读取测量数据时还应注意以下几点:

- (1) 仪表应先进行预热(需要时)和调零。
- (2) 在选用多功能仪表(如万用表)时,不同的测量项目应在相应的刻度线上读取数值。
- (3) 用指针式仪表时要注意读取数据的正确姿势。操作者的视线应正视表针,以减小操作者视线偏左或偏右引起的读数误差。当仪表指针与刻度线不重合时,应凭目测估读一位欠准数字(欠准数字一般为仪器最小刻度的下一位)。

2. 测量数据表示法

实验得到的测量数据可帮助我们归纳和验证某种物理联系。用直观、科学的数据表示方法可使我们更易于发现这些物理联系。

1) 数据表格法

数据表格法是将测量结果填写在一个表格中,数据表格能清楚地表达不同测量条件下各测量数据的相互关系。例如,表 1.2.1 是某电路中一电阻两端电压与流过该电阻的电流之间的对应关系(电阻的伏安特性)。

表 1.2.1 电阻的伏安特性

I/mA	0.210	0.426	0.639	0.852	1.06	1.28
U/V	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00

2) 图解表示法

测量结果除用数据表格表示外,还经常用曲线表示。图 1.2.1 在同一坐标系中画出了由两组数据得到的两根曲线。其中曲线①为由表 1.2.1 得到的线性电阻的伏安特性曲线,曲线②为某一非线性电阻的伏安特性曲线。显然,用曲线表示的测量结果比数据表格更加形象直观。尤其在对多个测量对象进行对比研究时,可以清晰地反映测量对象的特性差异与大小关系。

曲线图通常是用直线连接各测量点绘制成的。有时为了达到更高的准确性,还会要求对曲线进行拟合,从拟合的曲线上可以找出被测量在非测量点的数值。曲线图表示法是图解表示法中最常用的一种,在绘制时要注意以下几点:

- (1) 建立完备的坐标系。坐标系有直角坐标系、极坐标系和对数坐标系。必须建立坐标的方向、原点。横坐标通常为自变量,纵坐标为因变量。
- (2) 标明坐标系的名称与单位,标好坐标分度。分度的大小要根据测得的数据来合理选择,如图 1.2.1 所示。
- (3) 合理地选取测量点。在测量中为了提高精度,测量的最大值和最小值必须测出,

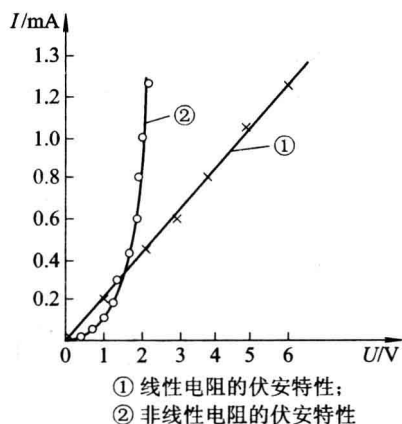


图 1.2.1 测量值的曲线图

另外,在曲线变化陡峭部分要多测几个点,在曲线变化平缓部分可少取一些点,如图 1.2.1 曲线②所示。

(4) 标明测试点。根据测量数据,在坐标图中标明测试点,测试点的符号可用“×”、“。”“•”、“△”等表示,同一条曲线的测试点符号要相同,而不同类别的数据,则应以不同的记号加以区别,如图 1.2.1 所示。

(5) 绘制曲线。把坐标图上各测试点用直线连接起来或采用拟合曲线表示。

3) 曲线的拟合

曲线拟合是一种常用的数据处理方法,它用连续曲线来近似表达一组离散点的函数关系。表 1.2.1 是电阻中流过 6 种不同电流时电阻两端电压的一组测量值。它们在表示伏安特性的坐标系中,只是一组离散点(图 1.2.1 中“×”表示的点)。通过拟合,可以找到一条曲线使得大部分离散点逼近该曲线,如图 1.2.1 曲线①。不难得得到该曲线的函数关系式为

$$U = 4.7 \times 10^3 \times I \quad (1-6)$$

在实验数据处理中,采用曲线拟合有很多优点:① 可得到更准确的测量结果。表 1.2.1 可得到电阻的 6 种结果,而式(1-6)中 $4.7 \text{ k}\Omega$ 更接近实际值;② 函数关系式使测量结果公式化,更能表达物理量之间的内在联系;③ 对于非测量点的数据可以用函数关系式进行估算。

在数学中,设给定离散数据为

x	x_0	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_m
y	y_0	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_m

或

$$(x_k, y_k) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, m) \quad (1-7)$$

其中 x_k 为自变量 x 的 k 次取值; y_k 为因变量 y 的相应测量值。曲线拟合要解决的问题是寻求与式(1-7)内在规律相适应的函数表达式:

$$y = f(x, a_0, a_1, \cdots, a_n) \quad (1-8)$$

使它在某种意义下最佳地逼近或拟合式(1-7)。 $f(x, a_0, a_1, \cdots, a_n)$ 称为拟合模型; $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为待定参数,当 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 仅在函数 f 中线性地出现时,称模型为线性的,否则为非线性的。

$$e_k \equiv [y_k - f(x_k, a_0, a_1, \cdots, a_n)] \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, m) \quad (1-9)$$

称为在 x_k 处拟合的残差。衡量拟合优劣的标准通常是:

$$I = \sum_{k=0}^m e_k^2 = \sum_{k=0}^m [y_k - f(x_k, a_0, a_1, \cdots, a_n)]^2 = \text{最小值} \quad (1-10)$$

由此可以计算出 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的值。这种方法也称为最小二乘法。

若式(1-7)表示的拟合曲线的模型为一次多项式,则其一般表达式为

$$y = a_0 + a_1 x \quad (1-11)$$

用式(1-11)一次多项式拟合离散测量点的方法称为一次(或线性)拟合。

拟合曲线模型还可以用二次多项式表示,其一般表达式为

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (1-12)$$

用二次多项式来拟合物理量之间的非线性关系会更准确,称此拟合为二次拟合。工程实际

中, 还可能会用高次函数作高次拟合, 但不多见, 其一般表达式为

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k \tag{1-13}$$

式(1-10)是多元函数 $I = I(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ 的极值问题。若拟合模型为多项式, 根据极值存在的必要条件可知, 最小值出现在下列条件中:

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=0}^m \left(\sum_{k=0}^n a_k x_i^k - y_i \right) x_i^j = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{1-14}$$

可得求 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的线性方程组, 用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} m+1 & \sum_{i=0}^m x_i & \cdots & \sum_{i=0}^m x_i^n \\ \sum_{i=0}^m x_i & \sum_{i=0}^m x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^m x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^m x_i^n & \sum_{i=0}^m x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=0}^m x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m y_i \\ \sum_{i=0}^m x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^m x_i^n y_i \end{bmatrix} \tag{1-15}$$

方程组(1-15)又称为正规方程组或法方程组。由于其系数矩阵为对称正定矩阵, 只要 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ 互异, 方程组即有唯一解。

例 1 测得铜导线在温度 $T_i(^{\circ}\text{C})$ 时的电阻 $R_i(\Omega)$ 如表 1.2.2 所示, 求电阻 R_i 与温度 T 的近似函数关系。

表 1.2.2 电阻与温度的关系

i	0	1	2	3	4	5	6
$T_i/^{\circ}\text{C}$	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0	40.0
R_i/Ω	103.90	106.05	107.49	110.23	111.37	113.61	116.04

解 由测得的离散数据点得知, 电阻 R_i 与温度 T 的关系接近一条直线, 故取 $n=1$, 拟合函数为

$$R_i = a_0 + a_1 T \tag{1-16}$$

对测量数据进行列表计算(见表 1.2.3)。

表 1.2.3 一次拟合计算列表

i ($m=6$)	T_i	R_{ti}	T_i^2	$T_i R_{ti}$
0	10.0	103.90	100	1039.0
1	15.0	106.05	225.0	1591.0
2	20.0	107.49	400.0	2150.0
3	25.0	110.23	625.0	2756.0
4	30.0	111.37	900.0	3341.0
5	35.0	113.61	1225.0	3976.0
6	40.0	116.04	1600.0	4642.0
Σ	175.0	768.69	5075.0	1949×10^4

正规方程组为

$$\begin{bmatrix} 7 & 175.0 \\ 175.0 & 5075.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 768.69 \\ 1949 \times 10^4 \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

解方程组求得: $a_0 = 99.916$, $a_1 = 0.396$, 故得 R_t 与 T 的近似函数关系可用如下拟合直线表示:

$$R_t = 70.57 + 0.92T \quad (1-18)$$

相应的拟合曲线如图 1.2.2 所示。

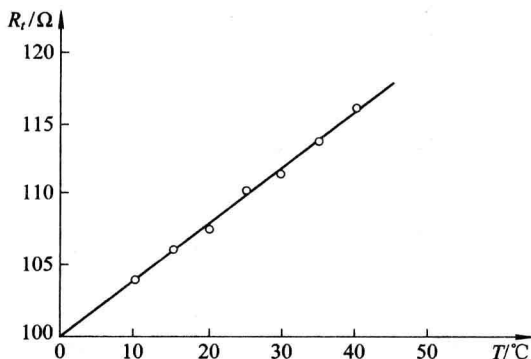


图 1.2.2 一次拟合曲线

例 2 已测得某一电阻和二极管串联电路的电流、电压实验数据如表 1.2.4 所示, 试用最小二乘法求它的二次拟合多项式。

表 1.2.4 电压、电流关系

k ($m=8$)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_k	0.010	0.325	0.797	0.988	1.153	1.529	1.956	2.236	2.623
i_k	0.014	0.162	0.804	1.788	2.732	5.536	8.701	11.81	18.05

解 设拟合曲线方程($n=2$)为

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

列表如表 1.2.5 所示。

表 1.2.5 二次拟合计算列表

k	u_k	i_k	u_k^2	u_k^3	u_k^4	$u_{ik} i_k$	$u_k^2 i_k$
0	0.010	0.014	0.0001	0	0	0.001	0
1	0.325	0.162	0.106	0.034	0.011	0.053	0.017
2	0.797	0.804	0.635	0.506	0.403	0.641	0.511
3	0.988	1.788	0.976	0.964	0.953	1.767	1.745
4	1.153	2.732	1.329	1.533	1.767	3.150	3.632
5	1.529	5.536	2.338	3.575	5.466	8.465	12.942
6	1.956	8.701	3.826	4.748	14.638	17.019	33.289
7	2.236	11.81	4.999	11.179	24.997	26.407	59.046
8	2.623	18.05	6.880	18.047	47.336	47.345	124.186
Σ	11.617	49.597	21.09	43.322	95.571	104.846	235.370

得正规方程组为

$$\begin{bmatrix} 9 & 11.617 & 21.09 \\ 11.617 & 21.09 & 43.322 \\ 21.09 & 43.322 & 95.571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49.597 \\ 104.846 \\ 235.37 \end{bmatrix}$$

(1-19)

解方程组求得： $a_0 = 0.189$ ， $a_1 = -1.537$ ， $a_2 = 3.118$ ，故拟合多项式为

$$i = 0.189 - 1.537u + 3.118u^2$$

(1-20)

相应的拟合曲线如图 1.2.3 所示。

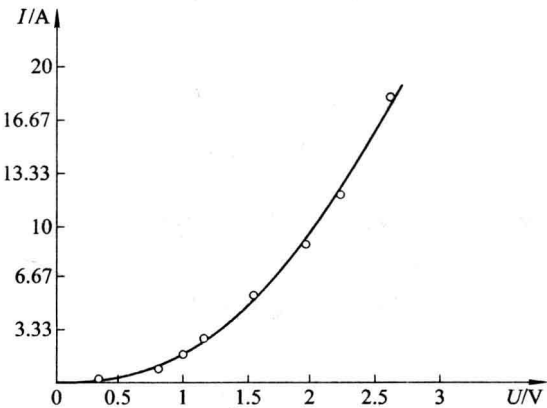


图 1.2.3 二次拟合曲线

1.2.3 误差分析与测量数据处理

1. 测量误差的基本概念

被测物理量 x 的实际大小是客观存在的，称为客观真值，或简称真值 x^* 。而每次(或 $m+1$ 次测量中的某次)测量所得的值 $x_i (i \in [0, 1, 2, \cdots, m])$ 与真值往往不同，它们的差

$$\Delta x_i = x_i - x^*$$

(1-21)

称为测量误差，简称误差。

1) 绝对误差

绝对误差就是指被测物理量的测量值与真值之差。但现实中客观真值是未知的，为了能够评估或衡量误差的大小，真值通常用可得知的类真值代替，它们是：

- (1) 约定真值：参照国际公认的几何量和物理量的最高基准的量值(如：把与光在真空中 1 秒钟内传播距离的 1/299 792 485 相同的距离称为 1 米，等等)。
- (2) 理论真值：设计时给定或用数学、物理公式计算出的给定值。
- (3) 相对真值：标准仪器(高精度等级的仪器)的测量值。

绝对误差作为可计算的值，是指被测物理量的测量值 x_i 与类真值 x_0 之差，即

$$\Delta x_i = x_i - x_0$$

(1-22)

绝对误差与被测物理量具有相同的单位。

2) 相对误差

绝对误差的表示方法一般不便于描述测量结果的准确程度，因此提出了相对误差的概

念。例如,测量两个电压的大小:一个是 100 V 左右,其绝对误差为 1 V;另一个是 20 V 左右,绝对误差为 0.5 V。仅从绝对误差来看,无法比较这两个测量结果的准确程度。前者绝对误差大,但只占给出值的 1%;后者绝对误差小,却占给出值的 2.5%。因此提出了相对误差的概念。相对误差通常有以下两种定义方式。

(1) 真值相对误差。

真值相对误差是测量的绝对误差与真值之比,通常用百分数来表示:

$$\gamma_0 = \frac{\Delta x_i}{x_0} \times 100\% \quad (1-23)$$

(2) 示值相对误差。

示值相对误差是测量的绝对误差与测量值的比值,即

$$\gamma_i = \frac{\Delta x_i}{x_i} \times 100\% \quad (1-24)$$

因为测量值本身有误差,所以这种表示方法不是很严格,而是在误差小时的一种近似计算,不适用于误差较大时的情况。

相对误差只有大小和符号,无量纲,一般用百分数表示。

3) 引用误差与最大引用误差

引用误差是指测量的绝对误差与仪表的满量程值之比。它是仪表中通用的一种误差表示方法,常以百分数表示:

$$\gamma_q = \frac{\Delta x_i}{X_m} \times 100\% \quad (1-25)$$

引用误差是相对误差的一种特殊形式,用满量程值 X_m 代替真值,在使用上方便很多。然而,在仪表测量范围内的每个示值的绝对误差 Δx_i 都是不同的,很难加以确定。为此,又引入最大引用误差的概念。最大引用误差为仪表测量绝对误差的最大值与仪表的满量程值之比,即式(1-5)。它更好地说明了仪器的测量准确度(或精度),是测量仪器的重要质量指标,所以被用来确定仪表的精度等级。当一个仪表的等级 s 选定后(见式(1-5)),用此表测量某一被测量时,所产生的最大绝对误差就可以由最大引用误差(或仪表精度) s 求得:

$$\delta_x = \pm X_M \times s\% \quad (1-26)$$

式中 X_M 为仪表最大量程。

2. 测量误差的性质及原因

测量误差的存在是无法避免的。它受到诸多因素的影响,如实验方法的正确性,仪器灵敏度和分辨能力的局限性,周围环境的不稳定性,测试人员操作的随意性等等。参照造成测量误差的不同因素,可将其分为系统误差、随机误差和过失误差三种。不同种类的测量误差表现出的特性也不同,掌握这些特性能帮助我们降低测量误差。

1) 系统误差

系统误差通常由于测量仪器不够精确,周围环境发生改变而引起。它的特点是:

- (1) 测量值总往一个方向发生偏差。
- (2) 误差的大小和符号在重复多次测量中几乎相同。
- (3) 经过校正和补偿可以消除误差。