高等学校理工科
公共基础类课程
学习辅导丛书

线性代数辅导讲义

杨　威　编著

- 知识结构网络图
- 主要公式全面提炼
- 重要定理及结论深度分析
- 抽象概念形象解释
- 典型例题三维剖析

同步学习帮手　考研复习参谋

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高等学校理工科公共基础类课程学习辅导丛书

线性代数辅导讲义

杨威 编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书是高等院校理工类及经济类各专业学生学习线性代数课程的辅导书。与国内通用各类《线性代数》教材相匹配。全书分为六章，每章由五个板块组成，分别为：知识结构网络图，基本内容与重要结论，常考题型精解，练习题精选，练习题详解。

本书对线性代数大量抽象内容进行了形象和通俗的解释；对每一章内容的知识体系进行了深度的总结和概括。全书针对每一道例题，都从三个角度进行了讨论：1. 分析解题突破口及解题思路；2. 详细的解题过程；3. 评注该题的特点、归纳考查知识点及考生应注意的问题。

本书可以作为学习线性代数的同步辅导教材，更可以作为考研学生考前强化训练的自学指导书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导讲义 / 杨威编著. —北京：电子工业出版社，2011.1
(高等学校理工科公共基础类课程学习辅导丛书)
ISBN 978-7-121-12503-4

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 240200 号

责任编辑：陈晓莉
印　　刷：北京市顺义兴华印刷厂
装　　订：三河市双峰印刷装订有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×980　1/16　印张：12.75　字数：326 千字
印　　次：2011 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：4000 册　定价：28.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系。联系及邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

前 言

线性代数是理工类及经济类各专业学生必修的重要基础课程，同时也是全国硕士研究生入学统一考试数学科目的一个重要组成部分。线性代数是一门逻辑性很强的课程，它具有概念多，定理多，内容抽象等特点。学生在学习这门课程中常常出现“知其然，而不知其所以然”的现象。

本书是在研究线性代数课程的特点，总结学生在学习这门课程的过程中出现的各种问题，以及归纳多年来考研试题的基础上编写而成的。每章均由知识结构网络图，基本内容与重要结论，常考题型分类及精解，练习题精选，练习题详解等组成。

本书有以下特色：

(1)每一章都有一个详细的知识结构网络图，它可以帮助考生了解这一章的重要知识点，并掌握知识点间的逻辑关系及体系结构。

(2)对线性代数的重要概念，重要定义，重要定理，重要公式，重要结论，易混淆问题，难理解问题等进行了纵向的深入讨论与横向的相关分析。对一些难理解的抽象概念进行了形象的解释与描述；对行列式及矩阵运算的众多公式进行了分类归纳；对易错易混淆内容进行了针对性讨论。

(3)本书的例题与练习题是根据题目的“典型性”、“综合性”、“启发性”及“新颖性”来选取的。本书不提倡“题海战术”，而是注重做题效率，即会做一道例题，就掌握了一种类型的题目。

本书所有例题的讲解都分为三个部分：“分析”、“详解”与“评注”。“详解”给出了例题的整个解题过程，就是告诉学生题目具体怎样做；“分析”给出了例题的解题突破口及解题思路，就是告诉学生为什么要这样做，是如何想到要这样做；“评注”归纳了此类题型的特点，总结了考查知识点及考生应注意的问题，就是告诉学生做了这一个题，要掌握这一类题型。

本书可以作为理工类及经济类各专业学生同步学习线性代数的辅导书；更可以作为硕士研究生入学考试的考前强化训练自学辅导书；同时也可以作为线性代数授课教师的教学参考书。

电子工业出版社陈晓莉老师对本书的出版给予了热情的关心和帮助，谨向她表示衷心感谢！

由于作者水平有限，书中难免有疏漏或不妥之处，恳请读者及同行批评指正。

作者电子邮箱：weiyang@mail. xidian. edu. cn

作　者

2010 年 8 月

目　录

第 1 章　行列式

1.1　知识结构网络图

- 行列式
  - 基本含义
    - n 行 n 列元素按某种运算规则计算得到一个值
  - 定义
    - $D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$
    - (1) n 阶行列式为 $n!$ 项之和
    - (2) 每一项都是 n 个不同行不同列元素之乘积
      （或者说：这 n 个元素来自于行列式的每一行和每一列）
    - (3) 每一项的正负由该项的行标及列标排列的逆序数决定
  - 性质
    - (1) 转置相等 (2) 换行（列）反号 (3) 数乘乘行（列）
    - (4) 拆分拆行（列）(5) 倍加不变 (6) 零性质
  - 展开及代数余子式
    - $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$，或 $\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$
  - 计算方法
    - (1) 定义法 (2) 三角化法 (3) 展开法 (4) 加边法 (5) 公式法
    - (6) 递推法 (7) 数学归纳法 (8) 特征值法（见第 5 章）
  - 特殊行列式
    - (1)“一杠一星”(2)“两杠一星”(3)“爪形”(4)“三角形”
    - (5)“类爪形”(6)“行（列）和相等”(7)“同行（列）同数”
    - (8)“三对角”(9)“X 形”
  - 克莱姆法则及延伸
    - (1) $|A|\neq 0 \Leftrightarrow Ax=b$ 有唯一解
    - (2) $|A|=0 \Leftrightarrow Ax=b$ 无解或多解
    - (3) $|A|\neq 0 \Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解
    - (4) $|A|=0 \Leftrightarrow Ax=0$ 有非零解
  - 后续应用
    - (1) 利用伴随矩阵求矩阵的逆 (2) n 个 n 维向量线性相关性的判断
    - (3) 矩阵可逆与不可逆的判断 (4) 方阵满秩与降秩的判断
    - (5) 矩阵特征值的计算 (6) 二次型正定与负定的判断

1.2　基本内容与重要结论

1.2.1　行列式的概念

关于行列式的定义，部分教材是从逆序数的概念出发，引入行列式的定义，但也有部分教材避开逆序数的概念，利用递归法引入行列式的定义。本书是按前者来定义行列式的。

排列

由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n 阶排列。通常用 $p_1p_2\cdots p_n$ 来表示。

逆序

一个排列中，如果一个大的数排在一个小的数之前，称这两个数构成一个逆序。

逆序数

一个排列中所有逆序的总数称作这个排列的逆序数。通常用 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 来表示排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数。

例如，$\tau(n(n-1)\cdots 21)=\mathrm{C}_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$。

偶排列

逆序数为偶数的排列称作偶排列。

奇排列

逆序数为奇数的排列称作奇排列。

例如，5 阶排列 35214 中，有逆序 32，31，52，51，54，21，因此排列 35214 的逆序数为 6，该排列是偶排列。

二阶行列式

用符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示算式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称这个符号为二阶行列式。

例如，$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=3\times 7-2\times 5=11$。

三阶行列式

用符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示算式 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$，称这个符号为三阶行列式。该算式包含 6 项，而每一项都是 3 个元素的乘积，其中三项为正，另外三项为负。为了便于记忆，图 1.1 给出了它的具体计算方法（称为**沙路法**）。

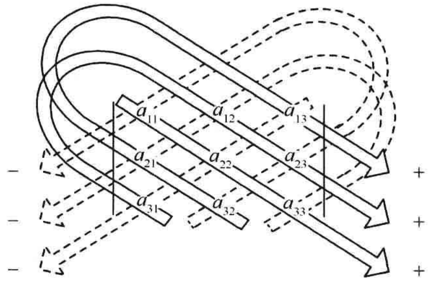

图 1.1　沙路法示意图

例如，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 1\times5\times9+2\times6\times0+3\times4\times7-3\times5\times0-2\times4\times9-1\times6\times7$ $=15$。

n 阶行列式

由 n^2 个数排成 n 行 n 列，两边用一对竖线括起，表示一个算式，记为 D，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式。n 阶行列式表示的算式由 n！项组成，每一项都是 n 个元素的乘积，这 n 个元素要满足“不同行不同列”的条件，或者说：“这 n 个元素要来自于行列式的每一行和每一列”；把这 n 个元素按第 1 行、第 2 行、…、第 n 行的次序排列，那么这 n 个元素的列标排列的逆序数 $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 就决定了这一项的正负。

例如，一个五阶行列式表示的算式一共有 5！项，若已知 $a_{15}a_{53}a_{21}a_{4j}a_{34}$ 是其中的一项，那么分析其列标，可以发现缺少第二列，因此必有 $j=2$。现在把该项 5 个元素按第 1 行、第 2 行、…、第 5 行的次序重新放置为 $a_{15}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}$，由于此时的列标排列的逆序数为 $\tau(51423)=6$，则该项所带符号为正号。

余子式

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}。

代数余子式

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij} 称作元素 a_{ij} 的代数余子式。

例如，若已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -9 & 3 \\ a & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{32}=1$，那么即有

$$(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ a & 5\end{vmatrix}=1$$

求得 $a=2$。

1.2.2 行列式的性质

关于行列式的性质，不同教材给出的描述并不相同，但其基本含义相同。

性质 1 “转置相等”(行列式与它的转置行列式相等)。

性质 2 “换行反号”(互换行列式的两行(列)，行列式变号)。

性质 3 “数乘乘行”(用数 k 乘行列式，等于用数 k 乘行列式的某一行(列)的所有元素)。

性质 4 “拆分拆行”(行列式的某行(列)均是两数之和，则可以拆分为两个行列式之和)。

初学者在应用该性质做题时往往会出现错误。若根据该性质，把行列式 D 拆分为 D_1 与 D_2 之和，那么，考生应该注意，D、D_1 与 D_2 3 个行列式，其中只有一行(列)的元素可能不同，而其他行(列)的元素必须完全相同。

性质 5 “倍加不变”(将某行(列)的 k 倍加到另一行(列)，行列式值不变)。

性质 6 “零性质”(①行列式某行(列)元素全为零，则行列式为零；②行列式有两行(列)完全相同，则行列式为零；③行列式有两行(列)元素成比例，则行列式为零)。

行列式的性质主要应用于行列式的化简和计算。通过行列式的各种性质往往可以把一个复杂的行列式化为某种特殊形式的行列式，从而进行求解。

1.2.3 行列式的重要定理

行列式按行(列)展开定理：n 阶行列式 D 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

利用本定理，在计算行列式时，可以选择有较多零元素的行(列)展开，使计算简单。

例如，计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 6\\ 3 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 5 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$ 时，观察发现第三列只有一个非零元素，所以

把行列式按第三列展开，此时一个四阶行列式就化简为一个三阶行列式，即

$$D=5\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1&6\\3&2&0\\-1&1&0\end{vmatrix}=5\times6\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&2\\-1&1\end{vmatrix}=30\times(3\times1-2\times(-1))=150$$

行列式按行(列)展开定理推论：n 阶行列式 D 的任一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0\qquad(i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0\qquad(i\neq j)$$

综合定理及推论，可以得出关于代数余子式的**重要结论**：

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$$

1.2.4 克莱姆法则

克莱姆法则：若 n 个未知数 n 个方程的非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq0$$

则该方程组有唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中,$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{2j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 j 列

推论 1 若 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$ 时,方程组只有零解。

推论 2 若 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

有非零解,则系数行列式 $D=0$。

针对 n 个未知数 n 个方程的线性方程组,其解的情况有以下**重要结论**:

(1)非齐次方程组的系数行列式 $D\neq0\Leftrightarrow$ 非齐次方程组有唯一解;

(2)非齐次方程组的系数行列式 $D=0\Leftrightarrow$ 非齐次方程组无解或有多解;

(3)齐次方程组的系数行列式 $D\neq0\Leftrightarrow$ 齐次方程组只有零解;

(4)齐次方程组的系数行列式 $D=0\Leftrightarrow$ 齐次方程组有非零解。

1.3 常考题型精解

1.3.1 计算行列式的基本方法

关于行列式的计算方法,在不同的教材及辅导资料里列举的内容并不相同,大体上可

以分为以下几种。

(1)定义法:根据行列式定义直接得到行列式的值。该方法常常适用于具有很多零元素的行列式。

(2)化三角行列式法:利用行列式的性质,把行列式化为上(下)三角行列式。

(3)展开法:可以把一个 n 阶行列式展开成 n 个 $n-1$ 阶行列式,当某行(列)有很多零元素时,该方法就比较适用。

(4)加边法:针对某些特殊结构的行列式,可以把 n 阶行列式转化为 $n+1$ 阶行列式,再利用行列式性质对行列式进行化简。该方法适用于"行和相等"行列式、"同行(列)同数"行列式等。

(5)公式法:利用特殊行列式的基本公式来计算行列式。

(6)递推法:利用行列式的性质及展开定理,建立 n 阶行列式 D_n 与同样结构的 $n-1$ 阶行列式 D_{n-1}(或 $n-2$ 阶行列式 D_{n-2})之间的递推关系,找到递推公式,最终求出 n 阶行列式的值。

(7)数学归纳法:当已知一个 n 阶行列式的结果时,往往可以用数学归纳法来证明。

在具体求解一个行列式时,往往要分析行列式中元素间的特点,要充分利用这些特点,选择适当的方法计算行列式。

1.3.2 行列式的基本公式

(1)上(下)三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(2)"关于副对角线的上(下)三角行列式"

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \vdots & ⋰ & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & & \\ a_{n,1} & & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & & a_{1n} \\ & & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & ⋰ & \vdots & \vdots \\ & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(3)分块上(下)三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{11} & \cdots & d_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

(4)“关于副对角线的分块上(下)三角行列式”

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & d_{n1} & \cdots & d_{nm} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

公式(3)和公式(4)都是拉普拉斯展开定理的应用。

(5)范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

从范德蒙行列式的计算结果,可以看出,当第二行(列)元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 两两不相等时,行列式的值不为零。利用这一结论往往可以判断线性方程组解的情况。

例如,齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 9x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_2 - x_3 + 27x_4 = 0 \end{cases}$ 的系数行列式是一个范德蒙行列式,

其中，第二行的 5 个元素分别为 1,2,−1,3，它们两两不相等，则系数行列式不等于零，该方程组只有零解。

1.3.3 特殊行列式的分类及解题方法

本书把考试中常见的特殊行列式分为若干种类，为了方便考生记忆，把行列式定义了一个形象化的名字。

(1)“一杠一星”行列式

例 1.1 计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$。

分析：思路 1，行列式中有大量的零元素，则考虑可以用行列式定义直接写出答案；

思路 2，分析行列式中元素特点，可以发现该行列式属于分块对角行列式。

解 方法一：根据行列式定义知，4 阶行列式由 4! 项组成，其中每一项都是 4 个元素的乘积，而该行列式总共只有 4 个非零元素，这 4 个元素刚好满足“不同行不同列”的条件，其中元素 2,3,6,1 的列标排列为 3214，该排列的逆序数为 3，则行列式值为：$(-1)^3\times 2\times 3\times 6\times 1=-36$。

方法二：根据分块对角行列式公式有

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} |1| = -36$$

不同考生对不同知识点的理解深度和掌握情况是不同的，没有必要在一题多解上下工夫，只要能很好地掌握一种解题方法就可以了。

评注：该类行列式共有 4 种不同的形状，如图 1.2 所示。所谓“一杠”是指与主(副)对角线平行且相邻的一条直线，“一星”是指离该直线距离最远的行列式的一个角，该类行列式元素的特点是在“一杠”和“一星”处的元素不为零，其余元素都为零。

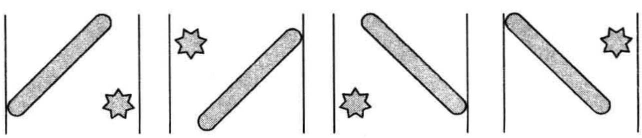

图 1.2 “一杠一星”行列式

(2)“两杠一星”行列式

例 1.2 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & & & \\ & a & b & & \\ & & a & \ddots & \\ & & & \ddots & b \\ b & & & & a \end{vmatrix}$。

分析:该行列式中的零仍然较多,自然联想到两种方法:定义法和展开法。

解 方法一:根据行列式定义,可以分析出,在行列式 D_n 的 $n!$ 项中,只有两项为非零,一项是 a^n,另一项是 b^n,a^n 符号为正,b^n 的符号为 $(-1)^{\tau(23\cdots n1)}=(-1)^{n-1}$,答案为 $a^n+(-1)^{n-1}b^n$。

方法二:根据行列式的展开定理,有

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & & & \\ & a & b & & \\ & & a & \ddots & \\ & & & \ddots & b \\ b & & & & a \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第1列展开}} a\begin{vmatrix} a & b & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & b \\ & & & a \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & & & \\ a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & b \end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n。$$

两种方法得到的答案虽然形式上有所差异,但实质上是相同的。

评注:该类行列式也有 4 种不同的形状,如图 1.3 所示。

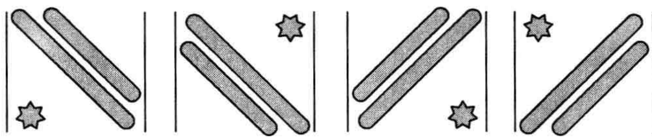

图 1.3 “两杠一星”行列式

(3)“爪形”行列式

例 1.3 已知 $\prod_{i=2}^{n} a_i \neq 0$,计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & & & \\ b & & a_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b & & & & a_n \end{vmatrix}$。

分析:根据行列式的“倍加不变”性质,利用主对角线元素 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 把第一列的所有元素 b 都消为 0,从而把原行列式化简为上三角行列式。

$$\text{解}\quad D=\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & & & \\ b & & a_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b & & & & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1-\frac{b}{a_i}c_i} \begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{b^2}{a_i} & b & b & \cdots & b \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{b^2}{a_i}\right)\prod_{i=2}^{n}a_i$$

评注:"爪行"行列式也称为"箭形"行列式,它也有 4 种不同形状,如图 1.4 所示。求解的方法都是利用主(副)对角线元素消去非零列(行)的 $n-1$ 个元素,最后化简为上(下)三角行列式。

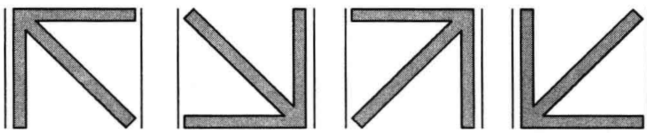

图 1.4 "爪形"行列式

(4)"三角形"行列式

例 1.4 已知 $\prod\limits_{i=2}^{n}a_i\neq 0$,计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & & & & a_2 \\ b & & & a_3 & \\ \vdots & & \iddots & & \\ b & a_n & & & \end{vmatrix}$。

分析:根据行列式的"倍加不变"性质,利用元素 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 把行列式第一列的第 2,3,…,n 元素都消为 0。从而把原行列式化简为"分块上三角行列式"。

$$\text{解}\quad D=\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & & & & a_2 \\ b & & & a_3 & \\ \vdots & & \iddots & & \\ b & a_n & & & \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1-\frac{b}{a_i}c_{n+2-i}} \begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{b^2}{a_i} & b & b & \cdots & b \\ 0 & & & & a_2 \\ 0 & & & a_3 & \\ \vdots & & \iddots & & \\ 0 & a_n & & & \end{vmatrix}$$