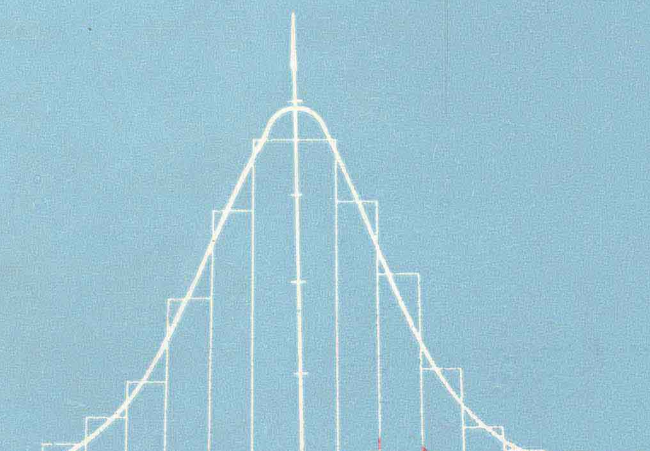
报考硕士研究生
高等数学函授教材

第四册　线性代数

林家寿　陈桂景



安徽大学数学系函授部

一九八五年六月

目　　录

第一章　行列式……………………………………………（1）

第二章　线性方程组………………………………………（16）

第三章　矩阵……………………………………………（37）

第四章　矩阵的标准形……………………………………（59）

第五章　二次型…………………………………………（83）

第六章　线性空间和线性变换……………………………（99）

第七章　欧氏空间…………………………………………（118）

附录　一些值得注意的定理………………………………（131）

启　　事

第一章　行　列　式

几种常用的计算法：

（1）降阶法。（2）化零法。（3）各行乘数加于另一行。（4）后行加于前行。（5）化三角形行列式。（6）分离线性因子（如见14题）。（7）数学归纳法。（8）递推法。（9）加边法（如见20题）。（10）分拆法（如见28题）。（11）利用范德蒙行列式。（12）利用行列式乘法。（13）利用拉普拉斯定理。（14）利用现成的行列式。

1　证明：元素为0或1的三阶行列式的值只能是：0，±1，±2。

【因有元素为0，故其主对角线方向三项中至多有两项为1，而当其余三项都为0时，如$a_{ii}=0$（$i=1,2,3$），其余元素全为1，行列式的值最大为2。由此易得所证。

2　在一个n阶行列式中等于0的元素的个数如果比n^2-n还多，那么此行列式等于0。为什么？

【因非零元素的个数小于n，而行列式的每项为n个元素之积，故每项中至少含一个为零的元素，从而该行列式等于0。

3　证明：若n阶行列式在k个行和h个列的交点处的元素为0，$k+h>n$，则此行列式等于0。

【设这些元素位于第$i_1,i_2,\cdots,i_k$行和第$j_1,j_2,\cdots,j_k$列的交点处。行列式的任一项为n个元素之积，其中某k个元素必在第$i_1,i_2,\cdots,i_k$行中。而这k行与第1，2，…，n列的交点元素只有$n-h$个不为0，由于$n-h<k$，故那k个元素中至少有一元

素为0。从而该行列式等于0。

4　行列式D中每个元素a_{ij}分别用b^{i-j}（$b\neq 0$）去乘，试证所得的行列式与D相等。

【因D的每一项的值都不变，即得所证。

5　行列式绕次对角线转置所得的新行列式与原行列式有何关系？

【经偶数次对换两行或两列的手续，可将新行列式换为原行列式的转置行列式，故与原行列式相等。

6
$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} \cdots a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} \cdots a_{2j_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} \cdots a_{nj_n} \end{vmatrix} = ?$$

这里 Σ是对1，2，…，n的任意排列$j_1j_2\cdots j_n$求和。

【列标为$j_1, j_2, \cdots, j_n$的行列式$=(-1)^{\tau}$ ×列标为1，2，…，n的行列式D，其中τ为排列$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数，再由全部n阶排列中奇偶各半，于是原式中等于$\pm D$的行列式各占一半，故得原式＝0。

7　由
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \cdots 1 \\ 1 & 1 \cdots 1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 1 & 1 \cdots 1 \end{vmatrix} = 0$$

证明：奇偶排列各半。

【行列式各项绝对值均为1，而每项恰对应一个排列，因行列式总和为0，故带正、负号的项各半，从而奇偶排列各半。

8 计算 $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

【按第1列展开得原式 $=x^n+(-1)^{n+1}y^n$。$(n\geqslant 2)$

9 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$

【各列加到第一列，原式 $=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}(n+1)!$

10 证明 $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$

[由题设知，$a_j\neq 0$，可将第 j $(j=2,\cdots,n+1)$ 行乘 $-1/a_{j-1}$ 加到第一行。

11 证明 $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$

【自第一行起，前行乘 x 加到后一行，再按末行展开。

12 计算 $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \cdots a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 \cdots a_{n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 \cdots \quad x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \cdots \quad a_n & 1 \end{vmatrix}$

【最后一列乘 $-a_i$（$i=1$，$2\cdots$，$n-1$）分别加到第i列上，即化成三角形行列式，原式$=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$。

13 计算 $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2 & \cdots & a_2-b_2 & a_2 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_n & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$

【第i（$i=2$，3，$\cdots$，$n+1$）行分别减去第一行的a_{i-1}倍，即化为次对角线下元素全为0的行列式，故 $D=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)/2}b_1b_2\cdots b_n$。

14 计算 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

【各列加于第1列，可见行列式D能被$a+b+c+d$整除，类似可得D能被$a+b-c-d$，$a-b+c-d$，$a-b-c+d$整除，视a，b，c，d为独立变量，故D可被上述四式之积整除，再比较系数，得$D=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$。

15、计算 $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix}$

【令 $x=a_i$（$i=1,2,\cdots,n$），两列成比例，故原式为0，即含因子 $x-a_i$，因各 a_i 不同，故原式可被 $\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)$ 整除。$D=a_0\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)$。

16　证明 $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$

【用归纳法证，原式展为 $D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$，将 D_{n-1}，D_{n-2} 按归纳法假设的表达式代入即得。当 $\alpha\neq\beta$ 时，$D_n=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$。当 $\alpha=\beta$ 时，$D_n=(n+1)\alpha^n$。

17　证明 $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$

【在上题中令 $\alpha\beta=1$，$\alpha+\beta=2\cos\theta$，即得。

18　计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & 0 & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

其中 $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

【由最后一行起，后行减去前行，并利用 $\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}$，易得$D_{n+1}=(x-1)D_n$。因 $D_2=(x-1)^{2-1}$可设$D_n=(x-1)^{n-1}$，得$D_{n+1}=(x-1)^n$。

19 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

【按第一列展开，$D_n=7D_{n-1}-2\cdot5D_{n-2}=(2+5)\cdot D_{n-1}-2\cdot5D_{n-2}$，因此

$$\begin{cases} D_n-2D_{n-1}=5(D_{n-1}-2D_{n-2}) \\ D_n-5D_{n-1}=2(D_{n-1}-5D_{n-2}) \end{cases}$$

由递推关系得 $\begin{cases} Dn-2Dn_{-1}=5^{n-2}(D_2-2D_1) \\ Dn-5Dn_{-1}=2^{n-2}(D_2-5D_1) \end{cases}$

$D_1=7$，$D_2=39$，解得$D_n=\frac{1}{3}(5^{n+1}-2^{n+1})$

20 证明

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

【将原式“加边”成

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

各行减去第1行，第i（$i=2$，…，$n+1$）列乘$1/a_{i-1}$加到第一列，即可得证。

21 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

其中A_{ij}是a_{ij}的代数余子式。

【左式“加边”，使$n+1$阶行列式的第1行为1，x，x，…，x，第1列为1，0，0，…，0。各行减去第1行后再按第1行展开即可得证。

22、计算

$$\begin{vmatrix} 2 & 1-a & \cdots & 1-a \\ 1-a & 2 & \cdots & 1-a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-a & 1-a & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

【若$a=1$，则$D=2^n$。若$a\neq1$，各列加于第1列后，再将各行减去第1行，即化成三角形行列式可得结果。或利用上题，令$x=1-a$，

$$D=\begin{vmatrix} 1+a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+a \end{vmatrix}+(1-a)\sum_{i=1}^{x}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$$

当$i\neq j$时，$A_{ij}=0$；当$i=j$时，$A_{ij}=(1+a)^{n-1}$。得$D=(1+a)^{n-1}[1+n+(1-n)a]$。

23 证明：n阶行列式$D=|a_{ij}|$的所有代数余子式的和等于

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n-1,1} & a_{n2}-a_{n-1,2} & \cdots & a_{nn}-a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

【由21题，n阶行列式$D_2=|a_{ij}+1|=D+1\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$

对于D_2，由最后一行起，后行减前行，则第1行仍为$a_{11}+1$，$a_{12}+1$，…，$a_{1n}+1$，第2，…，n行与D_1相同。可将D_2分拆成两个行列式，其一即为D_1，对另一个，从第1行起，前行加于后行，即得此行列式为D。故得所证。

24证明加边行列式展开法则：若$D=|a_{ij}|$，Aij是元素a_{ij}的代数余子式，则

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix}=Dz-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}x_iy_j$$

【将D_1按末行展开：$D_1=(-1)^n\left[Dz+\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}A_i x_i\right]$

其中Ai为D_1中（i，$n+1$）处元素的余子式，将其按末行展开，$A_i=(-1)^{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}M_{ij}y_j$，$M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$

将A_i代入上式即可得证。

25 计算 $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$

【原式记为D_n，将第 1 列元素改写为（$x-a$）$+a$，$0-a$，…，$0-a$，按第 1 列将D_n分成两个行列式，且易得$D_n=$（$x-a$）$D_{n-1}+a$（$x+a$）$^{n-1}$。由a与$-a$的对称性，又得$Dn=$（$x+a$）$D_{n-1}-a(x-a)^{n-1}$，从而$Dn=\frac{1}{2}$[（$x+a)^n$＋（$x-a$）^{n}]。

26 计算 $\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$

【当$y\neq z$时，同上题解法（在第二个行列式中，各行减去第 1 行）得$D_n=$[y（$x-z$）^n-z（$x-y$）^{n}]／（$y-z$）。当$y=z$时，将各列加到第 1 列上，最后可得$D_n=$[$x+$（$n-1$）y]（$x-y$）$^{n-1}$。

27 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

【在最后两行间插入一行：x_1^{n-1}，x_2^{n-1}，…，x_n^{n-1}，y^{n-1}，并于最后列后增加一列：$1, y$，…，y^{n-1}，y^n，便成$n+1$阶范德蒙行列式V，且$V=\prod\limits_{i=1}^{n}(y-x_i)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$，易知原式$=V$中$y^{n-1}$的系数反号，即为$\sum\limits_{i=1}^{n} x \prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$。

28 计算
$$\begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix}$$

【
$$原式=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} (a+1)-a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0+a & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0+a & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

按第一列分拆成两个行列式，可得原式

$$=\left[(a+1)\prod_{i=1}^{n}x_i-a\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\right]\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

29 设

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}\quad M=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\-b&a&-d&c\\-c&d&a&-b\\-d&-c&b&a\end{vmatrix}$$

求$(MD)^2$的值。

【$M^2=MM'=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$，$D^2=DD'=4^4=256$，故$(MD)^2=256(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$。

30 计算

$$\begin{vmatrix}\sin 2\alpha_1&\sin(\alpha_1+\alpha_2)&\cdots&\sin(\alpha_1+\alpha_n)\\\sin(\alpha_2+\alpha_1)&\sin 2\alpha_2&\cdots&\sin(\alpha_2+\alpha_n)\\\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots&\cdots\cdots\\\sin(\alpha_n+\alpha_1)&\sin(\alpha_n+\alpha_2)&\cdots&\sin(\alpha_n+\alpha_n)\end{vmatrix}$$

【

$$\text{原式}D=\begin{vmatrix}\sin\alpha_1&\cos\alpha_1&0&\cdots&0\\\sin\alpha_2&\cos\alpha_2&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\sin\alpha_n&\cos\alpha_n&0&\cdots&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\cos\alpha_1&\cos\alpha_2&\cdots&\cos\alpha_n\\\sin\alpha_1&\sin\alpha_2&\cdots&\sin\alpha_n\\0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$$

当$n=2$时，$D=-\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)$；当$n>2$时，$D=0$。

31 利用行列式的乘法证明恒等式：

$(a^3+b^3+c^3-3abc)(a'^3+b'^3+c'^3-3a'b'c')=A^3+B^3+C^3-3ABC$，其中$A=aa'+bb'+cc'$，$B=ac'+bb'+ca'$，$C=ab'+ba'+cc'$。由此可得整数的什么性质？

【由行列式乘法可得：

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a'&b'&c'\\c'&a'&b'\\b'&c'&a'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&C&B\\B&A&C\\C&B&A\end{vmatrix}$$

另一方面，展开上述三行列式即得所证。此恒等式说明：当x，y，z，为整数时，两个$x^3+y^3+z^3-3xyz$型的数之积仍为此型的数。

32 计算 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$

【由 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \cdots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix}$

得其积等于 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \cdots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$

此处 $\omega_k=cos\dfrac{2k\pi}{n}+isn\dfrac{2k\pi}{n}$，故原式$=a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}=\prod\limits_{k=1}^{n}f(\omega_k)$，其中$a_{1k}=f(\omega_k)=a_1+a_2\omega_k+\cdots+a_n\omega_k^{n-1}(k=1,2,\cdots,n)$。

33 计算 $\begin{vmatrix} 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-n+1} \\ \omega^{-n+1} & 1 & \omega^{-1} & \cdots & \omega^{-n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega^{-1} & \omega^{-2} & \omega^{-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

其中ω为$x^n=1$的任一根，$n\geqslant 2$。

【当$\omega=\omega_i$（$1\leqslant i\leqslant n$）时，由上题$f(\omega_i)=n$，而对$i\neq k$，（$1-\omega_i^{-1}\omega_k$）$f(\omega_k)=1-(\omega_i^{-1}\omega_k)^n=0$，即$f(\omega_k)=0$，从而由上题知原式$=0$。

34 求证

$$\triangle=\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

$=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$，其中$\omega$是1的立方根。

【此题可按32题解法。或另解：第2，3列加到第1列得

$$\triangle=(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & x & y \\ 1 & z & x \end{vmatrix}=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

利用$1+\omega+\omega^2=0$，将y^2，z^2，-1改为$\omega y\times\omega^2 y$，$\omega z\times\omega^2 z$，$\omega+\omega^2$即易证得。

35 设n阶行列式$D=|a_{ij}|$，且$f_i(x)=a_{1i}+a_{2i}x+\cdots+a_{ni}x^{n-i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则行列式$D_1=|b_{ij}|$等于什么？其中$b_{ij}=f_i(x_j)$

【由行列式的乘法规则可得D与由x_1，x_2，…，x_n组成的范德蒙行列式之积等于D_1，故$D_1=D\prod\limits_{1\leqslant j<\leqslant n}(x_i-x_j)$

36 n为一正整数，a_1，a_2，…，a_n为实数，$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$为次数不大于$n-2$的实系数多项式，求证n阶行列式$|f_i(a_j)|=0$。

【由上题，令$D_1=|f_i(a_j)|$，因$f_i(x)$的次数不大于$n-2$，故上题的D末行为0，即可得证。

37 计算2n阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

【对第n，$n+1$行按拉普拉斯定理展开得$D_{2n}=(a^2-b^2)D_{2n-2}$，由递推关系可得$D_{2n}=(a^2-b^2)^n$。

38 解方程

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = 0$$

其中 $\sum_{i=1}^{k} a_{ij}=a_k$（常数），$1\leqslant j, k\leqslant n$。

【先注意 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=a_n(j=1,2,\cdots,n)$，$a_k=\sum_{i=1}^{k} a_{ij}=a_{k-1}+a_{kj}$，$(j=1,2,\cdots,k-1)$，故$a_{k1}=a_{k2}=\cdots=a_{k,k-1}=a_k-a_{k-1}$（$2\leqslant k\leqslant n$），将原式左端各行加于第1行，各列减去第一列得$(a_n+x)\prod_{k=2}^{n}(a_{kk}-a_{k1}+x)=0$

故$x=-a_n$，$a_{k1}-a_{kk}$（$k=2,3,\cdots,n$）。

39 证明 $\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix}$

$$=2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\cos i\theta-\cos j\theta)$$

【由$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$，有

$\cos n\theta=\cos^n\theta+C_n^2\cos^{n-2}\theta(i\sin\theta)^2+\cdots+C_n^{2k}\cos^{n-2k}\theta(i\sin\theta)^{2k}+\cdots=\cos^n\theta+C_n^2\cos^{n-2}\theta(\cos^2\theta-1)+\cdots+$

$C_n^{2k}\cos^{n-2k}\theta(\cos^2\theta-1)^k+\cdots$，因此$\cos n\theta$可表为$\cos\theta$的$n$次多项式$f_n(\cos\theta)$，且$n$次项系数为$1+C_n^2+\cdots+C_n^{2k}+\cdots=2^{n-1}$，把$f_n$代入左式，且分拆成若干个行列式之和，除一个外，其余均因两列相同而为0，剩下的行列式为$2^{1+2+\cdots+(n-2)}$与由$\cos\theta_1$，$\cos\theta_2$，$\cdots\cos\theta_n$组成的范德蒙行列式之积，即可得证。

40 设$A=(a_{ij})$为n阶实方阵，若$a_{ii}>\sum\limits_{i\neq j}|a_{ij}|$，$i=1,2,\cdots,n$，则$|A|>0$。

【用归纳法证。当n阶时，因$a_{11}>0$，将第1列化零，得$|A|=a_{11}|B|$，其中$|B|=|b_{ij}|$，$b_{ij}=a_{ij}-a_{i1}a_{1j}a_{11}^{-1}$ $(i,j=2,\cdots,n)$。因$a_{11}>\sum\limits_{j=2}^{n}|a_{1j}|$，故$1>\sum\limits_{j=2}^{n}|a_{1j}a_{11}^{-1}|$，$|a_{i1}|\geqslant\sum\limits_{j=2}^{n}|a_{i1}a_{1j}a_{11}^{-1}|$ $(i>1)$。当$a_{i1}=0$时等号成立。以下Σ均表$\sum\limits_{j=2}^{n}$，且$i\neq j$，

$$\sum|b_{ij}|\leqslant\sum|a_{ij}|+\sum|a_{i1}a_{1j}a_{11}^{-1}|\leqslant\sum|a_{ij}|+\sum|a_{i1}a_{1j}a_{11}^{-1}|+|a_{i1}a_{1i}a_{11}^{-1}|-a_{i1}a_{1i}a_{11}^{-1}=\sum|a_{ij}|+\sum_{j=2}^{n}|a_{i1}a_{1j}a_{11}^{-1}|-a_{i1}a_{1i}a_{11}^{-1}\leqslant\sum|a_{ij}|+|a_{i1}|-a_{i1}a_{1i}a_{11}^{-1}<a_{ii}-a_{i1}a_{1i}a_{11}^{-1}=b_{ii}\ (i=2,\cdots,n)$$

由归纳法假设，$n-1$阶行列式$|B|>0$，故得证。

41 设n阶实方阵A的主对角线上所有元素都大于0，其余元素都小于0，且每列元素之和大于0，则$|A|>0$。