

# 世界数学



哥德尔

完全性定理

教育出版社

# 名题欣赏

世界数学名题欣赏丛书

# 哥德尔不完全性定理

朱水林 编著

辽宁教育出版社

1987年·沈阳

## 哥德尔不完全性定理

朱水林 编著

---

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行  
(沈阳市南京街6段1里2号) 沈阳新华印刷厂印刷

---

字数:100,000 开本:787×1092<sup>1</sup>/<sub>32</sub> 印张:6<sup>3</sup>/<sub>4</sub> 插页:4

印数:1—4,370

1987年11月第1版 1987年11月第1次印刷

---

责任编辑:俞晓群 谭 坚 责任校对:理 俞  
封面设计:安今生 插 图:安 迪

---

ISBN 7-5382-0179-3

定 价:1.45 元

库尔特·哥德尔在现代逻辑方面的成就是无与伦比的、不朽的——确实，它们不只是一座纪念碑，而且是一座其意义由于受时间、空间限制还远未显现的里程碑。……由于哥德尔的成就，逻辑学科已完全改变了它的本性和发展前景。

**冯·诺依曼**

(1951年在授予哥德尔爱因斯坦勋章时的讲话)

## 内 容 简 介

本书是“世界数学名题欣赏丛书之一”。哥德尔是德国著名数学家，不完全性定理是他在1931年提出来的。这一理论使数学基础研究发生了划时代的变化，是现代逻辑史上的一座里程碑。本书系统地介绍了哥德尔不完全性定理的产生、发展和理论，讲述了哥德尔的思想方法以及该定理的重要地位。全书从问题产生的历史背景出发，引入了现代逻辑学的必备知识，最后给出了定理优美的证明。通篇严谨简明、一气呵成。

## Summary

This book is one of A Series of World Famous Mathematics Appreciation. Gödel was a famous mathematician who advanced the incomplete theorem in 1931. The theory is a milestone in the history of modern logic, has brought about epoch-making changes in basic research of mathematics. The book systematically introduces the birth, development and theories of Gödel incomplete theorem, and sets forth Gödel's method of thinking and the important place of the theorem. It proceeds from the historical background of the problem and introduces necessary knowledge of modern logic, and finally gives proofs to the theorem. The whole book is well-knit and brief, forms a coherent whole.

# 目 录

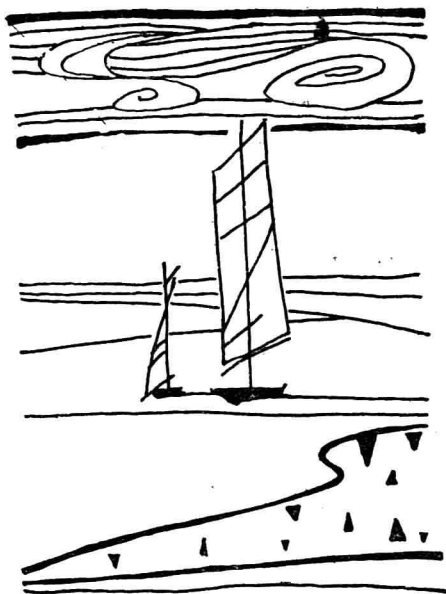
一 引言	1
1. 哥德尔的生平	4
2. 历史背景	17
二 逻辑演算	37
1. 命题逻辑和命题演算	41
2. 谓词逻辑	73
3. 谓词演算和完备性定理	90
三 不完全性定理	113
1. 一阶算术	118
2. 哥德尔数	132
3. 可表达性	137
4. 递归函数和递归关系	149
5. 可表达性定理	160
6. 不完全性定理的证明	175
四 意义	185
参考文献	207
人名索引	209

## Contents

I . Introduction .....	1
1. Gödel'o legend.....	4
2. Historical background. ....	17
II . Logical calculus .....	37
1. Propositional logic & propositional calculus .....	41
2. Predicate logic & predicate calculus .....	73
3. The adequacy of first order logic. .....	90
III . The incompleteness theorem.....	113
1. First order arithmetic.....	118
2. Gödel numbers .....	132
3. Expressibility.....	137
4. Recursive functions and relations...	149
5. The theorem of expressibility .....	160
6. The incompleteness theorem proof	175
IV . Significance .....	185
References .....	207
Index of names.....	209



# 一 引 言





库尔特·哥德尔于1931年发表了一篇重要论文：《论数学原理和有关系统 I 的形式不可判定命题》。文章证明了一条后来以他的名字命名的不完全性定理。定理说：在任何包含初等数论的相容的形式系统中，存在着不可判定命题，即命题本身和它的否定在该系统中都不可证。考虑到二值逻辑中，命题和它的否定必有一真，不可判定命题是真的，为此不完全性定理实际上断言了在上述系统中存在着真的不可证命题。这种表述通常称为哥德尔第一定理。

该定理可以有一推论：一个包含初等数论的形式系统的相容性，在该系统内是不可证明的。这个表述通常称为哥德尔第二定理。

哥德尔定理是现代逻辑发展史上的一座丰碑，一个转折点，它开创了现代逻辑发展的新时期。哥德尔的不完全性定理和塔斯基的形式语言的真理论及图灵机和判定问题的理论，已被国际逻辑界赞誉为现代逻辑的三大成果。本书仅就哥德尔定理的背景、内容、证明、意义等作一较为

系统的叙述。

## 1. 哥德尔的生平

大家都知道亚里士多德（公元前384—322）是古希腊最伟大的思想家。他创建了古典的形式逻辑，被西方称为“逻辑之父”。有人认为，现代能与亚里士多德相比的逻辑学家，恐怕只有哥德尔。伟大的思想家的生活往往会被他们的成果掩盖，这个现象在哥德尔那里恐怕最为典型了。哥德尔这位隐居的天才，尽管他的不完全性定理等成果，是二十世纪数学、逻辑学领域中最值得称颂的部分，然而他的个人生活和经历至今却仍然鲜为人知。

哥德尔全称库尔特·弗里德里希·哥德尔(Kurt Friedrich Gödel) 于1906年4月28日生于摩拉维亚(Moravia)的布吕恩(Brünn), 那时它是奥匈帝国的一部分，现今已是捷克斯洛伐克的波绿因(Brno)。他是鲁道夫(Rudolf) 和玛丽安娜(Marianna)·哥德尔的第二个孩子。当时布吕恩是重要的纺织中心，库尔特的父亲是弗里德里希·雷德利希(Redlich) 纺织厂厂长。雷德利希本人是库尔特的教父，后来被纳粹分子杀害。大概孩子的中间名字是由他而来的。哥德尔加入美

国籍后，正式去掉了中间名字，但在墓碑上还保留了那个开头的字母“F”。哥德尔出生在贝克街5号，在布吕恩的德国路德教会中受洗礼。家庭生活水平中等。哥德尔的种族并不象有些人（如哲学家罗素）所断定的那样，属于犹太人。哥德尔的父母虽都出生在布吕恩，但当时那里是日耳曼居民区，儿童受德语教育，库尔特也一样。在他成为维也纳大学学生后，放弃了捷克公民权。

哥德尔是个勤奋而杰出的小学生。他第一次算术作业中，只有一处计算错误。他所学的课程着重放在科学和语言上，拉丁语和法语必修，他还选修了英语。总的来说，他幼年对语言似乎很有兴趣。藏书中除许多外文词典外，还有意大利语、荷兰语等的词汇表和练习本。哥德尔的成绩单上，数学几乎都为最高分。成绩单也记录了他相当多的缺席。其中包括1915—1916年间和1917—1918年间物理课程的免修。其原因也许就是患小儿风湿症。他哥哥认为，这个疾病是哥德尔后来患疑病的根源。

哥德尔十四岁那年由于读了著名的格申（Götschen）丛书中的一本初等微积分教科书，对数学开始产生了兴趣。1924年高中毕业后，他离开了出生和度过少年时代的令人怀念的家乡，来到了维也纳，在维也纳大学攻读物理学。进大学

前，他除了通过读《新自由新闻》报以外，几乎与维也纳的知识文化生活没有什么接触。在第一次世界大战以及战后，通货膨胀几乎对他的家庭没有影响。他虽然参与宗教活动，但从未加入过任何一个教会，他认为自己是有神论者而不是泛神论者，“追随莱布尼茨而不追随斯宾诺莎”。

进大学后，菲利普·富特温格勒 (Philipp Furtwangler) 的数学课和海因里希·贡佩兹 (Heinrich Gomperz) 的哲学史课马上吸引了他。由于他对精确性十分感兴趣，终于促使他从物理学转向数学，转向数理逻辑。当时，他就曾应用中国剩余定理去表述按加法和减法表示的递归函数，发展这方面的兴趣。几乎同时在汉思·韩恩 (Hans Hahn) 的引导下，大约于1926年参加过维也纳学派的讨论活动，成为石里克团体的一名成员。在讨论中，特别活跃的有：在物理学研究工作中取得成就的卡尔纳普 (R. Carnap) 和石里克，两位数学教授汉思·韩恩和卡尔·门格尔 (Karl Menger)，哲学家弗里德里希·魏斯曼 (Friedrich Waisman)，社会学家奥托·纽拉特 (Ott Neurath)，以及后来成为第一个移居美国的维也纳学派成员哲学家赫伯特·费格尔 (Herbert Feigl)。届时卡尔·波普尔 (Karl Popper) 也在维也纳，他和卡尔纳普、纽拉特以及

其他一些人活跃地、富有成效地交换着意见。但是波普尔所强调的是他和逻辑经验主义的不同点，他不可能当然也不愿意把自己算做逻辑经验主义者。哥德尔也是讨论班的活跃参加者，尽管他没有明显持与逻辑经验主义者对立的立场，但就哲学思想而言两者并不一样。他同意维也纳学派当时对哲学是贫乏的估价，并且大体上也同意他们使用数理逻辑方法去分析哲学和科学的概念，但是对他们否定客观实在性的态度及认为形而上学（哲学）问题是无意义的观点，哥德尔看来是不同意的，后来他痛苦地与他们脱离了关系（这在哥德尔身后遗留的一些未发表的信件中可以看到）。

大约在这个时期，哥德尔读了希尔伯特(Hilbert)和阿克曼(Ackerman)合著的第一版《理论逻辑基础》(1928)一书，书中精确地叙述了狭谓词演算的完全性<sup>①</sup>概念，并明确地把它作为一个尚未解决的问题提出。希尔伯特、阿克曼写道：“这个公理系统是否完全？这里完全的意思是指至少要求在每个个体域中皆真的所有逻辑公式，都能从这个公理系统推导出来。这个完全性

---

<sup>①</sup>本书把这种意义下的完全性，称为完备性，以区别于不完全性定理。

问题仍然悬而未决”。哥德尔集中精力钻研了这个问题。他善于围绕能加以精确处理，且能获得永久性成果的基本概念问题进行卓越探索的能力，使他通过“纯思维的”活动，成功地取得了基本的进展。这里的所谓纯思维活动，在很大程度上是指独立于以前已有的专门知识的思想，现在的说法就是指创造性思维。哥德尔对这个问题的完美解答，以博士论文形式作为成果，1929年他完成了论文，随即获得通过。在他父亲不到五十五岁就逝世的前几天，即1930年2月6日，由维也纳大学授予哥德尔数学博士学位。他的稍事改动的论文稿，于1930年发表在《月刊》上，名称是《关于逻辑函数演算公理的完全性》。

1930年夏天，哥德尔已经开始研究分析的（即实数的）相容性的证明问题。他感到希尔伯特想用有穷方法去直接证明这个问题，有点不可思议。哥德尔总是这样认为，人们应该把困难加以分割，使得分割后的每一部分，相对地都能较容易克服一些。对这个特殊的问题，他也想如此处理。想用有穷数论去证明数论的相容性，再用数论的相容性去证明分析的相容性。他用数论中的公式去表示实数，此时他发现为了去证实分析中的全部公理，必须使用数论中语句的真值概念。这样很快就达到了与真值和可定义性有关的



悖论(莱奥悖论和理查德悖论)。于是，他渐渐认识到了尽管在数论中可以定义可证明性概念，但是不能定义语句的真值概念，这促使他没有再想去实现证明分析相容性的计划。不久导致他的不完全性定理的证明。他作出了如下的结论：在如同数学原理(类型论)和集合论(策麦罗—弗兰克尔)那样的、适当丰富的形式系统中，存在着不可判定命题。这个证明无情地推翻了希尔伯特证明论的规划(至少是最初的设想)。

1930年9月，哥德尔参加了哥尼斯堡会议。那次会议大数学家云集，盛况空前。希尔伯特，海丁(Heyting)，卡尔纳普，冯·诺依曼都参加了。希尔伯特在一般会议上作了逻辑和自然的讲话，哥德尔去听了。这是哥德尔第一次见到希尔伯特，也许就是唯一的一次。哥德尔在一次关于数学基础讨论的会议期间，临结束时几乎漫不经心地宣布了他那历史性的发现——不完全性定理。反应接踵而来，但并不总是伴随着理解。有冯·诺依曼的深情赞赏(他在两个月后，几乎抢先发现哥德尔第二不完全性定理)，有策麦罗的强有力的批评。还有一位芬斯勒(Finsler)竟宣称是他先作出这一发现。

冯·诺依曼是一位多才多艺的现代数学家，他在逻辑学、气象学、量子物理学、计算机、对