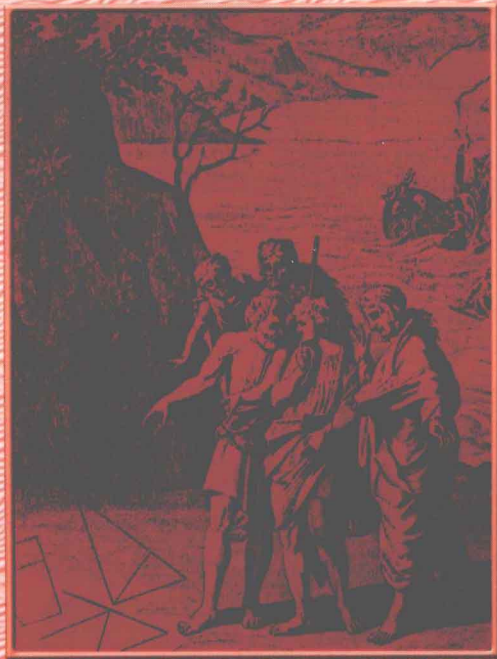


《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

转化与化归

——从三大尺规作图不能问题谈起

杨世明 编著



◎ 三大尺规作图不能问题的反思

◎ 特殊与一般的

◎ 正难则反

◎ 数形结合

◎ 见微知著



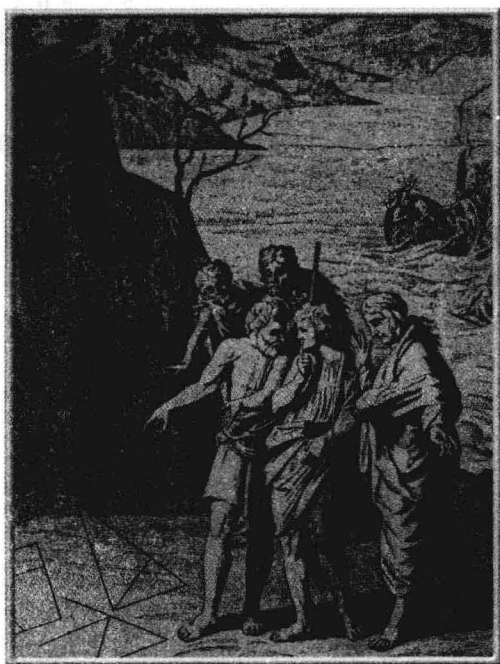
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

转化与化归

——从三大尺规作图不能问题谈起

杨世明 编著



- ◎ 三大尺规作图不能问题的反思
- ◎ 特殊与一般的转化
- ◎ 正难则反
- ◎ 数形结合
- ◎ 见微知著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书为转化与化归,是一本既有较深厚的理论基础,又富有文采和启发性、可读性的关于数学思维的参考书.本书共分3章,分别为数学与转化、化归、转化的技艺,通过对理论基础的讲解和举例子来形象、深刻地说明转化与化归在数学解题中的重要性.

本书适合初、高中师生,以及高等师范类院校数学教育专业的学生和数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

转化与化归:从三大尺规作图不能问题谈起/杨世明编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012.8
ISBN 978 - 7 - 5603 - 3767 - 8

I. ①转… II. ①杨… III. ①数学方法
IV. ①O1 - 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 190491 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 刘家琳

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm × 960mm 1/16 印张 13.75 字数 136 千字

版 次 2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 3767 - 8

定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

序

早在 1995 年 8 月,大象出版社(原河南教育出版社)在扬州举办了一个座谈会,邀请十余位教学水平很高的数学教师参加,商讨出版一套“中学数学思维方法丛书”.与会同仁认为,这是一个富有创见的倡议,因而得到大家热烈赞许.提供一套既有较深厚的理论基础,又富有文采和启发性、可读性的关于数学思维的参考书,对中学数学教学,无疑会是非常有益的;而更主要的,广大的中学生们,将在形象思维、逻辑推理和严密计算等方面,学到很多东西.这对将来无论做什么工作,都会受益无穷.

回想我们青少年时期学习数学的情景,总会有几分乐趣、几分惊异.做出了几道难题是乐趣,而惊异则来自方法的进步.记得小学算鸡兔同笼,必须东拼西凑,多一只兔便比鸡多了两条腿,好不容易才能做出一题.而学过代数,这

类问题便变得极为简单. 做几何题也一样, 必须具体问题具体解决, 而学过解析几何后便有了一般的程序可循.

至于计算圆的面积, 如果不用积分便会相当麻烦. 由此可见, 方法的进步对科学的发展是何等重要. 以上是对学习现成的东西而言. 如果要进行科研, 从事创新、发现或发明, 那就更应重视方法, 特别是思维方法. 没有新思想, 没有新方法, 要超过前人是很难的. 有鉴于此, 一些优秀的数学家便谆谆告诫学生们, 要非常重视学习方法和研究方法. 美国著名数学家波利亚 (G. Pólya) 写过好几种关于数学思想方法的书, 如《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》, 后来都成为世界名著, 很受欢迎.

学习任何一门科学, 都有掌握知识和培养能力两方面. 一般说来, 前者比较容易. 因为知识已经成熟, 而且大都已经过前人整理, 成为循序渐进的教材. 但能力则不然, 那是捉摸不定、视之无形的东西, 主要靠自己去思考、去探索、去总结、去刻苦锻炼. 老师的培养固然重要, 但只能起辅导作用. 只可意会, 不可言传, 而有时甚至连意会都做不到. 正如游泳, 只靠言传是绝对学不会的. 这是对受业人而说的.

至于老师, 则应无保留地传授自己的经验和体会, 尽量缩短学生学习的时间. 中国有句古诗: “鸳鸯绣出凭君看, 不把金针度与人.” 意思是说知识可以输出, 但能力不可传授. 前一句话意思很好, 后一句应改为 “急把金针度与人”. 这本书, 正是专门传授金针的.

一般的科学研究方法, 可分为演绎与归纳两大类. 在数学中, 演绎极为重要, 而归纳则基本上用不上, 除

了高斯(C. F. Gauss)等人偶尔通过观察数列以提出一些数论中的猜想而外. 不过自从计算机发明后, 这种情况已大为改观. 混沌学主要靠计算机而发展起来的, 数学模拟也主要靠计算机. 再者, 以往数学中极少实验, 还是由于计算机的广泛使用, 现在不少数学系已有了实验室, 特别是统计实验室. 可以期望, 计算机对改变数学的面貌, 对改善数学的思维方法, 都会起到越来越大的作用.

在此之前, 我国已经出版了几本关于数学方法的书, 它们都各有特色. 如就规模之大、选题之广、论述之精而言, 这套丛书也许是盛况空前、蔚为大观的. 我们希望它在振兴我国的科学事业和培养数学人才中, 将会起到令人鼓舞的作用.

王梓坤



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010-06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010-07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010-01	18.00	61
数学眼光透视	2008-01	38.00	24
数学思想领悟	2008-01	38.00	25
数学应用展观	2008-01	38.00	26
数学建模导引	2008-01	28.00	23
数学方法溯源	2008-01	38.00	27
数学史话览胜	2008-01	28.00	28
从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011-08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		
数学解题中的物理方法	2011-06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011-06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012-01	48.00	116
中学数学证明方法	2012-01	58.00	117
数学趣题巧解	2012-03	28.00	128
含参数的方程和不等式	2012-09	28.00	213
数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00	34
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010-01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011-08	58.00	87



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第1版)	2007-01	68.00	11,12
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第1版)	2005-10	18.00	2
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012-01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅰ)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅱ)	2011-01	28.00	78
世界著名初等数论经典著作钩沉(理论和实用算术卷)	2011-07	38.00	126
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何 500 名题暨 1000 条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的解法与应用	2012-07	18.00	183
近代的三角形几何学	2012-07	48.00	184
一般折线几何学	即将出版	58.00	203
三角形的五心	2009-06	28.00	51
三角形趣谈	2012-08	28.00	212
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯平面几何 5000 题	2011-03	58.00	89
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129
463 个俄罗斯几何老问题	2012-01	28.00	152
近代欧氏几何学	2012-03	48.00	162
罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要	2012-07	28.00	188



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
超越吉米多维奇——数列的极限	2009—11	48.00	58
Barban Davenport Halberstam 均值和	2009—01	40.00	33
初等数论难题集(第一卷)	2009—05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011—02	128.00	82,83
谈谈素数	2011—03	18.00	91
平方和	2011—03	18.00	92
数论概貌	2011—03	18.00	93
代数数论	2011—03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011—02	28.00	95
超越数论基础	2011—03	28.00	96
数论初等教程	2011—03	28.00	97
数论基础	2011—03	18.00	98
解析数论基础	2012—08	28.00	216
数论入门	2011—03	38.00	99
数论开篇	2012—07	28.00	194
解析数论引论	2011—03	48.00	100
基础数论	2011—03	28.00	101
超越数	2011—03	18.00	109
三角和方法	2011—03	18.00	112
谈谈不定方程	2011—05	28.00	119
整数论	2011—05	38.00	120
初等数论 100 例	2011—05	18.00	122
初等数论经典例题	2012—07	18.00	204
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012—01	138.00	144,145
算术探索	2011—12	158.00	148
初等数论(Ⅰ)	2012—01	18.00	156
初等数论(Ⅱ)	2012—01	18.00	157
初等数论(Ⅲ)	2012—01	28.00	158
组合数学浅谈	2012—03	28.00	159
同余理论	2012—05	38.00	163
丢番图方程引论	2012—03	48.00	172



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006—05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008—09	28.00	40
历届加拿大数学奥林匹克试题集	2012—08	38.00	215
历届美国数学奥林匹克试题集:多解推广加强	2012—08	38.00	209
历届国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012—01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007—03	28.00	15
全国大学生数学竞赛辅导教程	2012—07	28.00	189
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009—03	88.00	43
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(上)	2012—04	28.00	169
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(下)	2012—04	38.00	170

整函数	2012—08	18.00	161
俄罗斯初等数学问题集	2012—05	38.00	177
俄罗斯函数问题集	2011—03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011—01	48.00	79
博弈论精粹	2008—03	58.00	30
多项式和无理数	2008—01	68.00	22
模糊数据统计学	2008—03	48.00	31
受控理论与解析不等式	2012—05	78.00	165
解析不等式新论	2009—06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011—11	28.00	147
建立不等式的方法	2011—03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009—08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2012—02	68.00	153
初等数学研究(I)	2008—09	68.00	37
初等数学研究(II)(上、下)	2009—05	118.00	46,47
中国初等数学研究 2009 卷(第 1 辑)	2009—05	20.00	45
中国初等数学研究 2010 卷(第 2 辑)	2010—05	30.00	68
中国初等数学研究 2011 卷(第 3 辑)	2011—07	60.00	127
中国初等数学研究 2012 卷(第 4 辑)	2012—07	48.00	190
数阵及其应用	2012—02	28.00	164
绝对值方程—折边与组合图形的解析研究	2012—07	48.00	186
不等式的秘密(第一卷)	2012—02	28.00	154
初等不等式的证明方法	2010—06	38.00	123
数学奥林匹克不等式散论	2010—06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011—09	38.00	138
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010—01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011—08	158.00	134,135



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
500 个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00	3
400 个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00	36
500 个世界著名数学征解问题	2009-06	48.00	52
400 个中国最佳初等数学征解老问题	2010-01	48.00	60
500 个俄罗斯数学经典老题	2011-01	28.00	81
1000 个国外中学物理好题	2012-04	48.00	174
300 个日本高考数学题	2012-05	38.00	142
500 个前苏联早期高考数学试题及解答	2012-05	28.00	185
数学 我爱你	2008-01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60 位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00	39
数学史概论	2009-06	78.00	50
斐波那契数列	2010-02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010-07	38.00	72
斐波那契数列欣赏	2011-01	28.00	160
数学的创造	2011-02	48.00	85
数学中的美	2011-02	38.00	84
最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009-02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009-08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007-04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009-08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010-01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010-01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011-03	68.00	118
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010-01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011-07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011-07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011-07	38.00	133
2011 年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011-10	48.00	139
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007~2011)(上、下)	2011-10	78.00	140, 141
30 分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012-01	48.00	146
高考数学压轴题解题诀窍(上)	2012-02	78.00	166
高考数学压轴题解题诀窍(下)	2012-03	28.00	167



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
格点和面积	2012-07	18.00	191
射影几何趣谈	2012-04	28.00	175
斯潘纳尔引理——从一道加拿大数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
李普希兹条件——从几道近年高考数学试题谈起	即将出版		
拉格朗日中值定理——从一道北京高考试题的解法谈起	2012-10	18.00	197
闵科夫斯基定理——从一道清华大学自主招生试题谈起	2012-10	18.00	198
哈尔测度——从一道冬令营试题的背景谈起	2012-08	28.00	202
切比雪夫逼近问题——从一道中国台北数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲面——从一道全国高中数学联赛试题谈起	即将出版		
卡塔兰猜想——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
麦卡锡函数和阿克曼函数——从一道前南斯拉夫数学奥林匹克试题谈起	2012-08	18.00	201
贝蒂定理与拉姆贝克莫斯尔定理——从一个拣石子游戏谈起	2012-09	18.00	217
皮亚诺曲线和豪斯道夫分球定理——从无限集谈起	2012-08	18.00	211
平面凸图形与凸多面体	即将出版		
斯坦因豪斯问题——从一道二十五省市自治区中学数学竞赛试题谈起	2012-07	18.00	196
纽结理论中的亚历山大多项式与琼斯多项式——从一道北京市高一数学竞赛试题谈起	2012-07	28.00	195
原则与策略——从波利亚“解题表”谈起	即将出版		
转化与化归——从三大尺规作图不能问题谈起	2012-08	28.00	214
代数几何中的贝祖定理——从一道IMO试题的解法谈起	2012-07	18.00	193
成功连贯理论与约当块理论——从一道比利时数学竞赛试题谈起	2012-04	18.00	180
磨光变换与范·德·瓦尔登猜想——从一道环球城市竞赛试题谈起	即将出版		
素数判定与大数分解	2012-08	18.00	199
置换多项式及其应用	即将出版		
许瓦兹引理——从一道西德1981年数学奥林匹克试题谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
椭圆函数与模函数——从一道美国加州大学洛杉矶分校(UCLA)博士资格考试谈起	即将出版		
差分方程的拉格朗日方法——从一道 2011 年全国高考理科试题的解法谈起	2012-08	28.00	200
拉姆塞定理——从王诗成院士的一个问题谈起	即将出版		
力学在几何中的一些应用	即将出版		
高斯散度定理、斯托克斯定理和平面格林定理——从一道国际大学生数学竞赛试题谈起	即将出版		
康托洛维奇不等式——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
西格尔引理——从一道第 18 届 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
罗斯定理——从一道前苏联数学竞赛试题谈起	即将出版		
拉克斯定理和阿廷定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
毕卡大定理——从一道美国大学数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝齐尔曲线——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
拉格朗日乘子定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
雅可比定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
李天岩—约克定理——从一道波兰数学竞赛试题谈起	即将出版		
整系数多项式因式分解的一般方法——从克朗耐克算法谈起	即将出版		
布劳维不动点定理——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
压缩不动点定理——从一道高考数学试题的解法谈起	即将出版		
伯恩赛德定理——从一道英国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
布查特—莫斯特定理——从一道上海市初中竞赛试题谈起	即将出版		
数论中的同余数问题——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
范·德蒙行列式——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
中国剩余定理——从一道美国数学奥林匹克试题的解法谈起	即将出版		
牛顿程序与方程求根——从一道全国高考试题解法谈起	即将出版		
库默尔定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卢丁定理——从一道冬令营试题的解法谈起	即将出版		
沃斯滕霍姆定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卡尔松不等式——从一道莫斯科数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
信息论中的香农熵——从一道近年高考压轴题谈起	即将出版		
约当不等式——从一道希望杯竞赛试题谈起	即将出版		
拉比诺维奇定理	即将出版		
刘维尔定理——从一道《美国数学月刊》征解问题的解法谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编号
卡塔兰恒等式与级数求和——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
勒让德猜想与素数分布——从一道爱尔兰竞赛试题谈起	即将出版		
天平称重与信息论——从一道基辅市数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
艾思特曼定理——从一道 CMO 试题的解法谈起	即将出版		
一个爱尔特希问题——从一道西德数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
有限群中的爱丁格尔问题——从一道北京市初中二年级数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝克码与编码理论——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		

中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语	2007-03	28.00	16
统计学专业英语(第二版)	2012-07	48.00	193
幻方和魔方(第一卷)	2012-05	68.00	173
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第一卷)	2012-07	48.00	205
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第二卷)	2012-07	38.00	206

实变函数论	2012-06	78.00	181
初等微分拓扑学	2012-07	18.00	182
方程式论	2011-03	38.00	105
初级方程式论	2011-03	28.00	106
Galois 理论	2011-03	18.00	107
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011-03	28.00	108
线性偏微分方程讲义	2011-03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011-03	28.00	111
代数方程式论	2011-05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011-07	48.00	137
基于短语评价的翻译知识获取	2012-02	48.00	168
应用随机过程	2012-04	48.00	187

闵嗣鹤文集	2011-03	98.00	102
吴从玢数学活动三十年(1951~1980)	2010-07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012-01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012-01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012-01	58.00	151
钱昌本教你快乐学数学(上)	2011-12	48.00	155
钱昌本教你快乐学数学(下)	2012-03	58.00	171

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

网 址: <http://lpj.hit.edu.cn/>

邮 编: 150006

联系电话: 0451-86281378 13904613167

E-mail: lpj1378@yahoo.com.cn

第1章 数学与转化 //1

第1节 转化例说 //1

第2节 三大尺规作图不能问题的反思 //9

第3节 方程“家史” //18

第4节 认识数学 //31

第2章 化归 //65

第1节 数学的思维方式 //65

第2节 化归 //77

第3节 特殊与一般的转化 //93

第4节 认识无限 //111

第3章 转化的技艺 //140

第1节 正难则反 //141

第2节 代换 //160

第3节 数形结合 //175

第4节 见微知著 //190

参考文献 //198

编辑手记 //199

数学与转化

第 1 章

第 1 节 转化例说

数学是什么?

数学家们众说纷纭,但是从思维角度看,不过是人们从量的侧面对事物的一种思考,是通过量认识世界万事万物的一种过程、途径、方法. 因为事物在不断地运动变化,所以这个过程也充满了从一种形式到另一种形式的转化.

1. 从一则传说谈起

传说,古印度北方有一座圣庙,庙里有一块黄铜板,板上竖着三根宝石针. 印度教主梵天在创世之初,把 64 个大小不同的金盘(中间有孔)由大到小地穿放在其中一根针上(图 1). 梵天传旨僧侣们,要日夜不停地把金盘从 A 针移到 B 针上,并且规定:每次移一盘,可以 C 针为“中间站”,但大盘不得放于小

转化与化归

盘之上. 当这 64 个金盘全部移到 B 针之时, 整个世界将霹雳一声, 化为乌有. 这大概就是印度教中所说的“世界末日”吧!

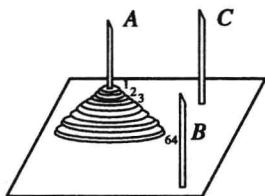


图 1

世界末日何时降临人间? 这可是件大事. 为了得到明确答案, 我们不妨用数学方法, 把它转化为一个数学问题来解决.

1° 在此问题中, 我们关心的是移完 64 个盘的时间, 自然与次数有关. 因为同一盘在两针间来回移动只会白费时间, 所以我们假定, 僧侣们都掌握了恰当的移盘方式, 使移盘次数最少. 我们以 a_n 表示将 n 个盘从一根针移到另一根针用的最少次数, 目的是求出 a_{64} .

2° 怎样求 a_{64} ? 如果 $n=1$, 则 1 次就可把盘 1 由 A 移到 B , 因此, $a_1=1$. 如果 $n>1$, 我们这样想: 要想把 n 个盘由 A 移到 B , 那么首先应把它上面 $(n-1)$ 个盘移开 (移到 C 上, 用了 a_{n-1} 次), 然后把盘 n 移到 B 上 (用了 1 次), 最后再把前 $(n-1)$ 个盘由 C 移到 B (又用了 a_{n-1} 次). 这时, 就完成了 n 个盘由 A 到 B 的移动, 于是有 $2a_{n-1}+1=a_n$, 加上 $a_1=1$, 得

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=2a_{n-1}+1 \quad (n=2, 3, \dots) \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

这样, 我们就把一个 n 盘问题 (计算 a_n), 化成了

