學生手冊

5

高中數學新探索

（必修部分）

編著　管俊傑　張美華　莊書榮　蔡銘哲

包括：
- 精簡的複習筆記
- 簡單例題及其解題步驟
- 計算機程式

香港教育圖書公司

新高中適用

學生手冊

5

高中數學新探索

（必修部分）

編著　曾俊傑　張美華　莊書榮　蔡銘哲

香港教育圖書公司

新高中適用

高中數學新探索 5 必修部

學生手冊

編　　著　管俊傑　張美華　莊書榮　蔡銘哲

出 版 者　香港教育圖書公司
〔商務印書館（香港）有限公司全資附屬機構〕
香港筲箕灣耀興道 3 號東匯廣場 8 樓
電話：2565 1371
網址：http://www.hkep.com

印 刷 者　中華商務彩色印刷有限公司
新界大埔汀麗路 36 號中華商務印刷大廈 14 字樓

發 行 者　香港聯合書刊物流有限公司
新界大埔汀麗路 36 號中華商務印刷大廈 3 字樓
電話：2150 2100

2010 年初版
2011 年重印

ISBN 978-988-200-917-2

學校查詢　香港教育圖書公司市場部
電話：2887 8018
電郵：sales@hkep.com
網址：http://www.hkep.com

目錄

第三階段

第四階段

附錄

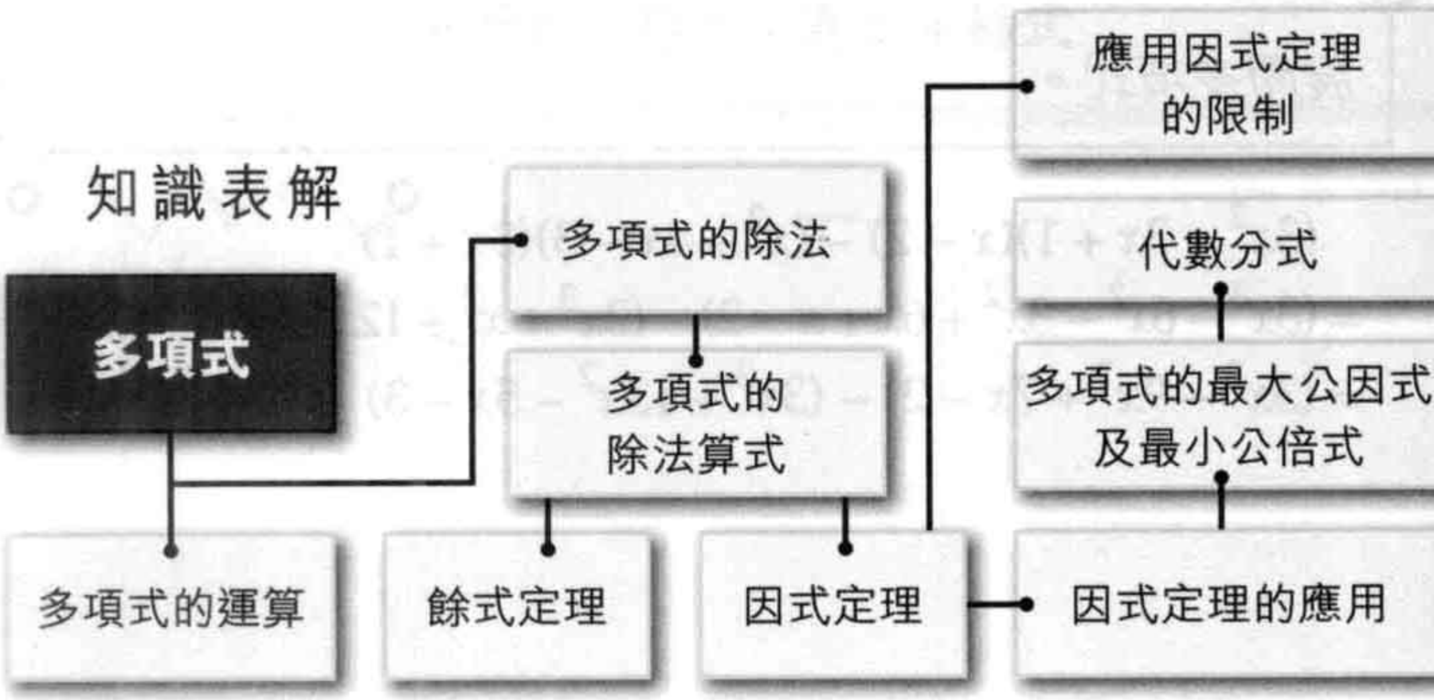
第 10 章

續多項式

學習重點

- 重溫多項式的概念及其基本運算
- 認識多項式的除法及多項式的除法算式
- 理解及運用餘式定理
- 理解及運用因式定理於分解至最多三次的多項式
- 理解最大公因式及最小公倍式的概念
- 進行代數分式的加減乘除

知識表解



A 多項式及其運算

（參閱第 5 冊第 10 章，頁 3 – 4。）

一個 n 次的一元多項式的一般式為：

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ，其中

1. n 為非負整數；
2. 係數 $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ 為實數及 $a_n \neq 0$；
3. a_0 稱為多項式的常數項。

例 1

化簡 $(3x^2 - 3x + 1)(x - 2) - (x^2 + 4x - 3)(3x + 1)$。

解：

第一步

展開多項式。

$$
\begin{aligned}
&(3x^2 - 3x + 1)(x - 2) - (x^2 + 4x - 3)(3x + 1)\\
&= (3x^3 - 6x^2 - 3x^2 + 6x + x - 2) - (3x^3 + x^2 + 12x^2 + 4x - 9x - 3)\\
&= (3x^3 - 9x^2 + 7x - 2) - (3x^3 + 13x^2 - 5x - 3)
\end{aligned}
$$

第二步

合併同類項。

$$= 3x^3 - 3x^3 - 9x^2 - 13x^2 + 7x + 5x - 2 + 3$$

第三步

化簡以上多項式。

$$= \underline{\underline{-22x^2 + 12x + 1}}$$

B 多項式的除法

(參閱第 5 冊第 10 章，頁 5 – 10。)

當一個多項式除以一個除式時，可得

被除式 = 除式 × 商式 + 餘式

例 2

求當 $2x^3 - 3x^2 + 5$ 除以 $x + 2$ 時的商式及餘數。

解：

第一步

利用長除法計算出商式及餘數。

$$
\begin{array}{r}
2x^2 - 7x + 14 \\
x+2 \overline{\smash{\big)}\, 2x^3 - 3x^2 + 0x + 5} \\
\underline{2x^3 + 4x^2 \phantom{{}+ 0x + 5}} \\
-7x^2 + 0x + 5 \\
\underline{-7x^2 - 14x \phantom{{}+ 5}} \\
14x + 5 \\
\underline{14x + 28} \\
-23
\end{array}
$$

第二步

從長除法中判別出商式及餘數。

$\therefore$ 商式為 $2x^2 - 7x + 14$ 及餘數為 -23。

C 餘式定理

(參閱第 5 冊第 10 章，頁 11 – 16。)

當多項式 $P(x)$ 除以 $mx - n$ 時，則所得的餘數 R 相等於 $P\left(\frac{n}{m}\right)$。

當一個多項式除以一個一次多項式時，餘式定理可讓我們直接求得其餘數，而不須使用長除法。

例 3

求當 $2x^3 + 3x^2 - 6x + 7$ 除以 $2x - 1$ 時的餘數。

解：

第一步

設該多項式為 $P(x)$。

設 $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 7$。

第二步

把 $x = \frac{1}{2}$ 代入多項式中，求出餘數。

利用餘式定理，

$$
\begin{aligned}
\text{餘數} &= P\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right) + 7 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 3 + 7 \\
&= \underline{\underline{5}}
\end{aligned}
$$

D 因式定理及其應用

（參閱第 5 冊第 10 章，頁 17 – 23。）

若 $P(x)$ 為一多項式且 $P\left(\frac{n}{m}\right) = 0$，則 $mx - n$ 為 $P(x)$ 的因式。

反過來說，若 $mx - n$ 為 $P(x)$ 的因式，則 $P\left(\frac{n}{m}\right) = 0$。

例 4

已知多項式 $P(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$。

(a) 求 $P(-1)$ 及 $P(1)$ 的值，並由此求 $P(x)$ 的一次因式。

(b) 因式分解 $P(x)$。

解：

(a)

第一步

利用因式定理求題設的多項式的一次因式。

$$P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 7(-1) - 6$$
$$= \underline{\underline{0}}$$
$$P(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 7(1) - 6$$
$$= \underline{\underline{-10}}$$

$\because\ P(-1) = 0$

$\therefore\ x + 1$ 為 $P(x)$ 的一次因式。

(b)

第二步

利用長除法求多項式的二次因式。

利用長除法：

$$
\begin{array}{r}
2x^2 - x - 6 \\
x+1\,\overline{\big)\,2x^3 + x^2 - 7x - 6} \\
\underline{2x^3 + 2x^2 } \\
-x^2 - 7x - 6 \\
\underline{-x^2 - x } \\
-6x - 6 \\
\underline{-6x - 6}
\end{array}
$$

$\therefore \quad P(x) = (x+1)(2x^2 - x - 6)$

第三步

利用十字相乘法或二次公式，因式分解二次因式。

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x+1)(2x^2 - x - 6) \\
&= \underline{\underline{(x+1)(x-2)(2x+3)}}
\end{aligned}
$$

非基礎部分

E 多項式的最大公因式及最小公倍式

(參閱第 5 冊第 10 章,頁 26 – 28。)

1. 最大公因式 (G.C.D.)
   對兩個或以上的多項式,G.C.D. 為它們的公因式中次數最高的多項式。
2. 最小公倍式 (L.C.M.)
   對兩個或以上的多項式,L.C.M. 為它們的公倍式中,次數最低的多項式。

例 5

求 $x^2 - x - 6$ 及 $3x^2 - 11x + 6$ 的 G.C.D. 及 L.C.M.。

解:

第一步

因式分解各多項式。

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$
$$3x^2 - 11x + 6 = (3x - 2)(x - 3)$$

第二步

比較它們的因式。

$\therefore$ G.C.D. = $\underline{\underline{x-3}}$

L.C.M. = $\underline{\underline{(x-3)(x+2)(3x-2)}}$

非基礎部分

F 代數分式

（參閱第 5 冊第 10 章 P 頁 30 – 32。）

例 6

簡化 $\dfrac{2x+1}{x^2-x-6}+\dfrac{2}{x^2+4x+3}$ 。

解：

第一步

把分母因式分解並找出它們的 L.C.M. 。

$$\frac{2x+1}{x^2-x-6}+\frac{2}{x^2+4x+3}=\frac{2x+1}{(x-2)(x+3)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}$$

第二步

以此 L.C.M. 作為公共分母。

$$= \frac{(x+1)(2x+1)+2(x-2)}{(x-2)(x+1)(x+3)}$$

第三步

展開分子及合併同類項。

$$= \frac{2x^2+3x+1+2x-4}{(x-2)(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{2x^2+3x+2x-4+1}{(x-2)(x+1)(x+3)}$$

第四步

化簡以上多項式。

$$= \frac{2x^2+5x-3}{(x-2)(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{(2x-1)(x+3)}{(x-2)(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{2x-1}{(x-2)(x+1)}$$

重點提示

- 多項式的次數與最高次數項的次數相同。
- 在多項式的除法中，餘式必為 0 或次數較除式的次數為小。
- 我們在被除式中加入缺少了的 0 項，以避免計算時出現錯誤。
- 當一多項式除以一線性多項式時，我們可以利用餘式定理求出餘數。但我們仍需要進行長除法以求出商式。
- 當一多項式沒有任何一次因式，則我們不可以用因式定理來分解多項式。

非基礎部分

第 11 章

續方程 (1)

學習重點

- 以圖解法解聯立二元方程（一為一次及一為二次）
- 欣賞利用圖解法解方程的優點及理解其局限性

知識表解

方程

以圖解法解聯立方程

以圖解法解一為一次及一為二次的聯立二元方程

圖解法的應用