

# 数学解题 研究和发现

SHUXUETIJIHEYANJIU  
HEFAXIAN

胡炳生 编著

中国展望出版社

# 数学解题研究和发现

胡炳生 编著

中国展望出版社

1985.8.

## 内 容 提 要

本书是作者多年来对于解题的教学、实践、思考和研究的总结。全书共五部分。前四部分，从数学思维的原则和策略、整体思考上，对解题方法、思考程序和思路发现给以指导。其中举例，着重揭示解题思维过程，富有启发性。第五部分提供一百个富于思考性的数学题，分为十二组，让读者自己去研究和发现，最后是这些问题的解答和讨论。

## 数学解题研究和发现

胡炳生 编著

\*

中国展望出版社出版

(北京西城区太平桥大街4号)

江苏省国营新民洲印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

---

开本787×1092毫米1/32 印张7.75 字数172千字

1989年8月北京第1版 1989年8月第1次印刷

印数1—9000

---

ISBN7—5050—0394—1/G·55 定价：2.85元

## 序 言

1988年7月，我与复旦大学舒五昌副教授，率领6名中学生，参加了在澳大利亚首都——堪培拉举行的第29届国际数学奥林匹克（IMO）。我国同学为争光，在参赛的49个国家和地区中，总分名列第二，仅次于苏联队，其中何宏宇、陈晞两位同学以优异成绩争得金牌，其余4位同学获得银牌。回忆起在堪培拉的日日夜夜里，既有紧张的竞争，智力的角逐；在各国的领队之间，在选手之间，又充满着友谊、诚实、公正的气氛。这一切使我深信，数学竞赛，作为发现人才，培育人才的一种特殊方式，一定会持续地进行下去，越来越兴旺发达。

在我国，早在五十年代，在老一辈数学家华罗庚教授等人的发起和领导下，数学竞赛在我国的一些主要城市进行过多次，收到了可喜的成效。经过十多年的沉寂之后，1978年开始，数学竞赛又在我国重新举行，并且规模越来越大，逐渐形成全国性的“联赛”，至今已有十年了。现在，每年数以十万计的中学生参加的初、高中全国数学联赛，不仅成了广大中学生学习活动中的一个重大事件，而且也牵动着众多的教师和家长的心。

1986年，我国第一次派出“满队”参加第27届“IMO”以来，连续三年，我国中学生队都名列前茅，取得了令人瞩目的好成绩。究其原因，我想大致有以下两点：1.我国中学生有较为扎实的基础知识和熟练的运算技能，这是我国广大

中学数学教师辛勤劳动的结果。2.从1986年初开始,在前一年全国高中联赛基础上,举办数学冬令营,选拔国家集训队;再经过短期培训和严格考试,组成国家代表队。严格的选拔和训练,是我国选手取胜的关键。这一点,已越来越被人们所接受了。

1990年,将在我国举行第31届IMO。这极大地鼓舞着我国广大中学数学教师和中学生。数学奥林匹克学校正在各地兴起,各省市已经着手准备,以便为国家输送本地区的优秀选手,为祖国争取更大的荣誉。可以预见,在近几年内,数学竞赛的培训热潮,将会一浪高过一浪。

数学竞赛所涉及的内容,虽不包括高等数学,但是其中已有高等数学中某些常见的思想方法;它又不全同于中学数学教材中的内容,它包含着更广泛的专门知识,需要更为灵活的思维和技巧。近年来,国外有人提出“竞赛数学”这一名词,正是强调着它的特殊性。

为了学好数学,为了在数学竞赛中一显身手,我们的中学生迫切需要丰富的课外读物。中学数学教师在数学竞赛的组织和辅导工作中,也需要有详尽的参考资料。由中国展望出版社出版的《中学生数学竞赛丛书》,就是为了适应上述需要而编写的。丛书由下列四本书组成:1、国际数学奥林匹克三十年(1959—1988)试题集解;2、初中数学竞赛十年(1978—1988)试题集解;3、高中数学竞赛十年(1978—1988)试题集解;4、数学解题研究和发现。

这些书籍复盖着不同层次的数学竞赛,即从初中到高中,再到被公认为最高水平的国际数学奥林匹克,能够满足各种不同程度和水准的学生的要求。前三本书搜集了直至最

近一年的资料，体现了直到目前为止最好的完备性。第四本书则着重研究数学竞赛解题方法的特性和共性，是一本居高临下来谈方法和技巧的书籍。我相信，这些书籍对广大中学生和数学教师将有很大的帮助。

这套丛书的主要组织者和撰稿人，安徽师范大学数学系胡炳生、胡礼祥副教授，多年来在从事高等数学教育的同时，一直担任中学数学杂志的编辑，热心于数学竞赛的组织和辅导工作，是数学竞赛和数学普及工作方面的活动分子和知名人士，这就保证了这套丛书的质量。借此机会向读者推存这一套丛书，是我十分乐于承担的义务。

中国科技大学 常庚哲

1988年11月

# 目 录

|                  |         |
|------------------|---------|
| 序 言              | 常庚哲 (1) |
| 第一部分 原则和策略       | (1)     |
| 1. 解数学题是一项系统工程   | (1)     |
| 2. “题海战术”为什么不能奏效 | (4)     |
| 3. 哪个因素最重要       | (7)     |
| 4. 解题三部曲         | (9)     |
| 5. 例子            | (12)    |
| 6. 隐含条件          | (16)    |
| 7. 思考三原则         | (18)    |
| 8. 化归——我们的总策略    | (24)    |
| 9. 解题设计          | (30)    |
| 第二部分 直觉和逻辑       | (38)    |
| 1. 先导和保证         | (38)    |
| 2. 观察和试验         | (38)    |
| 3. 枚举归纳          | (42)    |
| 4. 类比            | (43)    |
| 5. 猜想            | (47)    |
| 6. 小心求证          | (49)    |
| 7. 演绎            | (56)    |
| 8. 完全归纳法和数学归纳法   | (65)    |
| 第三部分 反思和发现       | (70)    |
| 1. 在反思中发现        | (70)    |

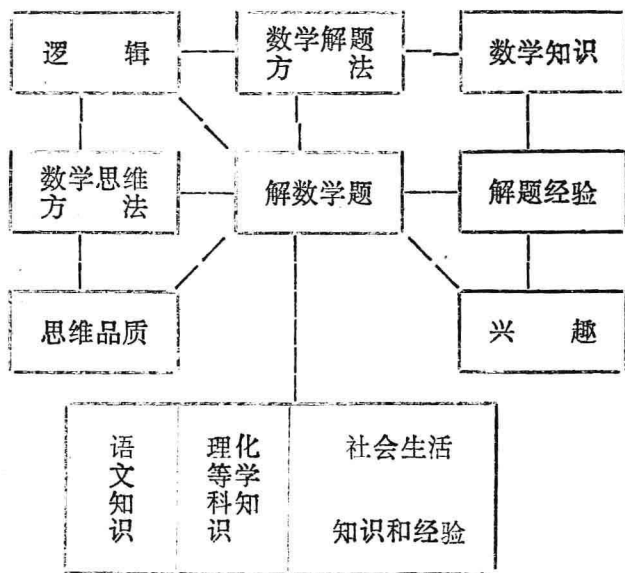
|                            |              |
|----------------------------|--------------|
| 2. 还有更好的解法吗? .....         | (71)         |
| 3. 使用了两次的巧计就是一种方法 .....    | (77)         |
| 4. 群体和个体 .....             | (80)         |
| 5. 纵横推广 .....              | (88)         |
| 6. 从求 $f(\omega)$ 谈起 ..... | (95)         |
| 7. 注意总结解题规律 .....          | (100)        |
| <b>第四部分 解题思维过程举例</b> ..... | <b>(115)</b> |
| 1. 举一反三推及四 .....           | (115)        |
| 2. 探路不误架桥工 .....           | (119)        |
| 3. 退到最简单的情况去 .....         | (124)        |
| 4. 一个基本面积不等式的发现 .....      | (129)        |
| <b>第五部分 通过问题学解法</b> .....  | <b>(133)</b> |
| 第一组 初中数学竞赛自测题 (1-8) .....  | (133)        |
| 第二组 高中数学竞赛自测题 (1-8) .....  | (134)        |
| 第三组 数学机智 (1-8) .....       | (135)        |
| 第四组 探求一题多解 (1-8) .....     | (137)        |
| 第五组 证明和引伸 (1-8) .....      | (139)        |
| 第六组 数的整除 (1-8) .....       | (141)        |
| 第七组 题组·抽屉原则 (1-8) .....    | (142)        |
| 第八组 代数不等式 (1-10) .....     | (144)        |
| 第九组 几何不等式 (1-8) .....      | (145)        |
| 第十组 递归函数·数学归纳法 (1-8) ..... | (146)        |
| 第十一组 外国古今名题选 (1-12) .....  | (148)        |
| 第十二组 中国古算名题选 (1-6) .....   | (149)        |
| <b>问题解答和讨论</b> .....       | <b>(152)</b> |



# 第一部分 原则和策略

## 1. 解数学题是一项系统工程

解一个数学题，好象是在脑海中构建一项思维工程，对一个陌生的数学题更是如此。不论数学问题的大小、难易，以及复杂程度如何，构建这样一项思维工程，都不是孤立事件；有许多因素影响它的成功或失败。下面是一个粗略的解数学题的系统图：



环绕“解数学题”周围各因素，作用各不相同。略作说明如下：

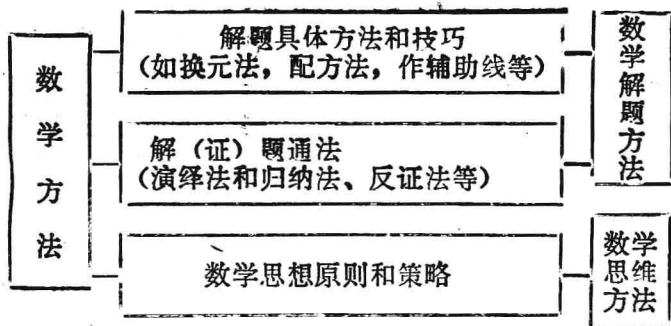
(1) **数学知识是解题的基础。**这里所说的“数学知识”包括基本的和提高的两部分。前者包括中学数学课本中的概念系统、定理系统和符号系统三大系统的知识。后者包括数学竞赛中所涉及到的有关初等数学或介于初、高等数学之间的数学知识，如数的整除、多项式、高斯函数 $[x]$ 、复数几何、简单图论，等。

(2) **数学解题方法是解题的基本手段。**数学方法——主要是解题方法，可以泛指数学解题中的所有方法，它有三个层次。第一层次——解题的具体方法和技巧，如换元法，配方法，一元二次方程的公式解法，几何中添辅助线、辅助圆，等。第二层次——数学解题的一些通法，如演绎法和归纳法，直接证法和反证法，坐标法和解析法，等。第三层次——数学解题中的思想原则和策略。

为了突出本书的主题和叙述上的方便，我们将第一、二层次与第三层次分开，限用“数学解题方法”专指上述第一、二层次中的内容；而用“数学思维方法”来概括解题思想原则和策略。

(3) **数学思维方法是指解数学题的思想原则和策略。**具体一点说，它是指我们在解题的思维过程中所应遵循的总原则和总策略。总原则是熟悉化原则、简单化原则和多途化原则。总策略是化归——把要解的数学题化归为基本的、标准的数学题。

我们把 (2) (3) 两段的意思用下面的图表示出来，



(4) **解题经验**, 包括成功的经验和失败的经验, 对于一个人解题能力的形成和提高都有重要作用。

所谓解题经验, 是某些数学知识、某种(一种或几种)数学解题方法和题中某些条件的有顺序的组合。成功的经验, 这种有序组合是有效的; 失败的经验, 组合是错误的。成功的经验所获得的有序组合, 就好像是建筑上的预制构件, 遇到合适的场合, 可以原封不动地把它用上。

例如, 我们学会了二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0$$

的求解公式: 
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

获得了由二次方程系数与加、减、乘、除运算构成的一个有序组合(用公式表示出来)。这就是解题思维工程上用得着的一个“预制构件”。以后凡遇到解二次方程问题时, 便可以直接利用。

解题的成功经验, 又象是围棋上的“定式”。遇到特定的情况, 运用某种“定式”下子, 一定会成功, 至少不吃

亏；反之，违反定式，就一定要吃亏。

(5)解数学题主要是一种思维活动，要想思维活动进行得有成效，就必须符合思维的规律——逻辑。数学推理中主要是应遵循形式逻辑，但在探索性思维活动中，还要有辩证逻辑的帮助，这个问题将在本书第二部分中讨论。

(6)一个人的思维品质和对数学的兴趣，无疑对解数学题有显著影响。一个见了数学题就厌烦的学生，是解不好题的。相反，一个对数学有浓厚兴趣的学生，能埋头几个小时作题，以解题为乐趣。思维敏捷而不缜密的学生，解题虽快，但计算容易出错；思维缜密而不灵活的学生，往往作代数题优于几何题。等等。

当然，如果教师引导得法，也可以通过解题来启发学生的兴趣，培养学生良好的思维品质。但是，这不是本书的主题，我们不去讨论它。

(7)语文知识，以及其他学科知识，社会生活知识，对解数学题都有关系。因为数学题都是用文字来表述的，解题最后结果也要用文字来表述出来。不少学生的答卷表述不清，词不达意，并因此而失分。这说明数学爱好者，应提高语文知识水平。

同时，数学问题很多是从实际中来的，与物理、化学等应用学科，以及生产、生活都密切相关。不了解它的实际背景和相关知识，就可能无从下手。

这些也仅是提及而已，它们不在本书讨论范围之内。

## 2. “题海战术”为什么不能凑效？

所谓“题海战术”，就是大量作题，获得较多解题经

验，从而去把握考试中的题目。这种想法是自然的，但效果却不好。做了一千道题，遇到考试中“新”题，仍不会做。这是为什么？

(1) **数学题千变万化**，新题层出不穷。即使建立“题库”，其容量与数学题总量相比较，还是很小的。而就在这“很小”容量的题库中题目（上万个），要一个人来做，也是难于完成的。即使全部做出来了，要完全清楚而牢固地记住这些题目和它的解法，也是难于想象的。因此，“题海战术”以多取胜的想法是行不通的。要知道，严肃的考试，尤其是象高考和数学竞赛中的题目，是很少因袭陈题的。

(2) **解题经验的价值在于它的活用**。这正象围棋中的“定式”需要活用一样；不然，学围棋者只要背定式就行了。除非完全同型问题可以套公式、用定法之外，在一般相似情况下，单凭解题经验都是很危险的。

**例1—1 命题1** 若 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 是 $\triangle ABC$ 三边长，

$$\text{且 } a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \quad (1)$$

则 $\triangle ABC$ 一定是 (A) 直角三角形； (B) 锐角三角形；  
(C) 钝角三角形。

如果通过变换 (1) 式来判定 $\triangle ABC$ 三个角的大小，则比较费劲；但若观察到当 $a = b = c$ 时，(1) 式成立，便能很快确认结论 (B) 成立。这确是个妙法！

于是我们获得了一条经验：在由三边的代数等式判定该三角形的形状时，可以用特殊情况来检验，如上述所作。

**命题2** 若 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 是 $\triangle ABC$ 三边长，且

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a - b + c} \quad (2)$$

则 $\triangle ABC$  (A) 是等边三角形, (B) 是以 $a$ 为底边的等腰三角形, (C) 是以 $c$ 为底的等腰三角形, (D) 是不等边三角形, (E) 上述结论都不对。

命题2与命题1类型“大体”相似。套用前面经验, 令  $a = b = c$  代入 (2), 结果等式成立。从而判定 (A) 成立。

对不对呢? 错了!

你看: 若令  $a = b$ , (2) 也成立; 令  $a = c$ , (2) 也成立。亦即 (A)、(B)、(C) 都可能对。这是怎么一回事呢?

仔细分析一下就可以发现, 命题1与命题2在大体相似的情况下, 有着相异之点: 命题1的结论 (A)、(B)、(C) 是互斥的。而命题2的前三个结论是相容的——(A) 成立, 则 (B)(C) 也成立; 而 (B) 或 (C) 成立, (A) 也可能成立。

正是这一相异点, (当然 (1)、(2) 两式也不同), 决定了命题1的经验, 对命题2失效。

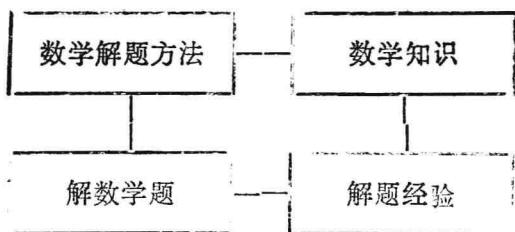
事实上, 在  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是一三角形三边长的条件下, (1) 式等价于  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

故有  $a = b = c$ 。即  $\triangle ABC$  一定是等边三角形, 因而是锐角三角形。

而 (2) 式等价于  $(a-b)(b-c) = 0$

故或  $a = b$ , 或者  $b = c$ , 或者  $a = b = c$ 。故此题应选的结论应是 (E)。

(3) 解题经验, 对于解题来说, 只是要素之一, 而不是唯一要素。在“题海战术”中, “解题经验”所参予的系统:



只是前述大系统中一个子系统。这个子系统就好象是一个大建筑工程公司的一个预制件厂，我们知道单凭预制件是不能完成各种各样建筑工程来的。因为在实际施工中，情况在不断变化，要根据变化了条件，对预制构件进行识别、选择、加工、改造，合理拼接和组装。解数学题的情况也是一样：要对已有的解题经验进行识别、选择、加工、改造，然后进行合理拼接和组装；这种思维活动不是机械的，而是创造性的——在旧经验的基础上创造新经验，不时发现新的拼接术和组装线。这种创造性的思维活动的成效如何，就要看我们解题的思维方法是否正确；此外还要有逻辑的帮助。等等。

总之，要提高解题能力，单靠通过大量做题来获取解题经验是远远不够的。我们要在解题过程中，善于思考，讲求方法。还要有基本逻辑常识、良好的思维品质、浓厚的学习兴趣，以及相当的语文知识和广泛的各科知识。只有全面提高各相关因素的水平，才能不断提高解题能力。一个优秀的数学人才，应该这样来要求自己。

### 3. 哪个因素最重要？

是不是说，各相关因素都同等重要呢？不是。它们重要性的顺序对不同的人，对同一个人不同学习阶段，对不同的

题，都是不同的。

### (1) 因题而异

对于标准题，有解题经验就行了。对于陌生的非标准题，思维方法显得最重要。对于用文字叙述的应用题和杂题，则首先要看懂题意，这里语文知识和相关知识又显得最重要。

**例1—2** 一个铁球浮在水银上，在水银上加水，让水漫过铁球。求加水前后铁球浸在水银里的体积之比。

这是一个用文字叙述的物理应用题。显然，如果不知道水、铁和水银的比重，不了解阿基米德浮力原理，解这个题目就无从下手，尽管解本题所需要的数学知识并不多，一般初中学生都能掌握。

### (2) 因人而异

对于中学低年级学生来说，应该学好数学知识，掌握基本解题方法，多做些题，积累一些解题经验。对于高年级学生，则应强调解题思维方法，因为他对数学知识、基本解题方法都已掌握，也有不少解题经验。

要根据每一学生的素质和特点，因材施教。例如，对作题表述不清的学生，要他加强语文知识学习；对思维品质有缺陷的学生，要着重培养良好思维品质，等等。

每一个学生，也应根据自身的情况和弱点，加强某一方面的修养和锻炼。

### (3) 因时而异

一个人开始解题时经验不多，可多做些题；后来解题多了，则要注意优化思考方法，总结解题规律。对于数学知识，首先要学好课内基本知识，当碰到的“杂题”越来越多



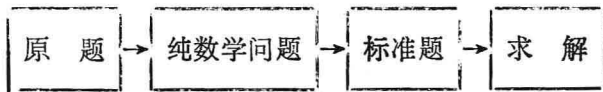
时，则要有选择地扩大知识面，学一些课外数学专门知识，如整数论等，以补课内不足。对于数学爱好者和数学竞赛参加者来说，更应全面提高自己的知识水平和思维能力。

#### (4) 本书的重点在那里？

本书以中学生中数学爱好者为主要对象。我们假定他们已经比较好地掌握了课本知识和基本解题方法，并打算参加数学竞赛。因此，本书不打算专门叙述具体的解题方法和技巧。也不系统地讲解课外数学知识，而是着重研究解数学题时的思维活动——直觉的和逻辑的，及其所应遵循的原则和采取的策略。并通过例题说明在探索性思维过程中，如何发现解题途径和新结论。

### 4. 解题三部曲

解题过程，有大脑内部思维活动过程和外部书面或口头解答过程之分。教科书和参考书上数学问题的解答，仔细分析起来，大致都经历以下过程：



人大脑中的思维活动则看不见，摸不着，而本人也不去注意它。但大量解题经验表明，人在解题时的思维活动，大致按“观察——联想——转化”的步骤进行。

这两种过程之间，靠解题设计——数学化设计和标准化设计，把它们联系起来。