

农林院校大学数学系列教材

高等数学

主编 刘迎洲 张庆国

 高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

农林院校大学数学系列教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

主编 刘迎洲 张庆国



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书根据教育部高等学校数学基础课程教学指导分委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”及教育部高等农林院校理科基础课程教学指导分委员会制定的“高等农林院校理科基础课程教学基本要求”，并参考教育部考试中心制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”编写而成。

本书内容包括函数、极限与连续，一元函数微分学，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微分学，二重积分，微分方程，无穷级数，数学模型简介等。

本书可作为高等农林院校非数学类专业学生的高等数学课程教材，也可作为全国硕士研究生入学统一考试的复习参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/刘迎洲,张庆国主编. -- 北京:高等教育出版社,2012.8

ISBN 978-7-04-035553-6

I. ①高… II. ①刘…②张… III. ①高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 161792 号

策划编辑 杨帆	责任编辑 杨帆	特约编辑 徐飞	封面设计 于文燕
版式设计 余杨	插图绘制 尹文军	责任校对 杨雪莲	责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京人卫印刷厂
开 本 787 mm×960 mm 1/16
印 张 24.5
字 数 440 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2012 年 8 月第 1 版
印 次 2012 年 8 月第 1 次印刷
定 价 35.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 35553-00

农林院校大学数学系列教材

高等数学编委会

主 编 刘迎洲 张庆国

副主编 庾文利 位 刚 汪宏喜 徐 丽 杨小锋 曹宗宏

参 编 李 楨 薛 晓

总 序

为了更好地促进数学基础课程教学的发展,教育部高等学校数学基础课程教学指导分委员会制定了“工科类本科数学基础课程教学基本要求”。与此同时,教育部高等农林院校理科基础课程教学指导分委员会也制定了“高等农林院校理科基础课程教学基本要求”。郭满才、徐钊、刘迎洲、张庆国、欧阳安、卢思双、宋世德等教授据此编写了全国高等农林院校系列教材《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》和《数学实验》,由高等教育出版社出版。我在农林院校从事数学教育五十年,对这几本教材的出版感慨甚多,欣喜不已,并对高等教育出版社为农林院校数学教材的研讨、组织和出版所付出的努力表示衷心的感谢。

农林科学中的现象,常以大量、重复的形式出现,又受到多种外界环境和内在因素的随机干扰,因此,近代的农林领域的科学家们都把一个复杂的农林科学问题,借助数学模型转化成一个数学问题进行量化分析。郭满才等教授长期在农林院校从事数学教学,对农林应用数学的研究有多年的积累,深知未来农林科学成果的取得不仅取决于农林领域的科学家们的努力,亦取决于数学、物理学、化学、计算机技术的发展以及这些学科与农林科学的紧密结合。关于农林院校的数学教材和教学,编者们认为应训练学生的逻辑推理能力,应遵循严密性与直观性并重的原则,应加强培养学生应用数学的能力。郭满才教授曾谈到,应使农林专业的学生通过一些简单而典型的例子,学会将微积分、概率统计等多个数学分支有目的地应用到农林科学中去。为此目的,编者除了教材中选编有关应用例题外,还专门编写了与计算机相结合的实验教材,以开阔学生的视野,并在一定程度上满足农林科学进行定量分析的要求。

回首1996年,教育部卓有远见地推出了“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”,在这个机遇下,高等教育出版社出版了由我总主编的农林院校系列教材:《微积分》、《线性代数》、《概率论与应用数理统计》、《试验设计与分析》和《数学实验》,反映了当时我们对农林院校数学教学内容和课程体系的认识和实践。

如今,喜见郭满才教授等主编的四本教材付梓出版,欣然写此数语为序。

袁志发
2012年5月

前 言

高等数学是高等院校农林类各专业的一门重要的基础课程。高等数学以微积分为其核心内容,微积分及其相关知识和方法是学生学习许多后续课程所必须具备的知识基础和方法论基础。高等数学在实际工作中的广泛应用性是其重要特征之一。

本书根据教育部高等学校数学基础课程教学指导分委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”及教育部高等农林院校理科基础课程教学指导分委员会制定的“高等农林院校理科基础课程教学基本要求”,并参考教育部考试中心制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”编写而成。在编写过程中着重突出以下三个方面的特色:

1. 遵循严密性与直观性并重的原则。对概念以及定理的陈述尽量采用精确的语言和规范的数学符号,同时为了便于学生对概念、定理、方法的理解,又采用了直观化的方法加以解释,并选用了尽可能简单且具有典型性的例题。

2. 作为培养学生逻辑思维能力的一种重要手段,同时也为了使學生深入地理解和掌握基本原理和方法,我们给出了大多数定理(方法)的证明,略去了一些超出大纲要求或过于繁琐的定理(法则)的证明。

3. 为了培养学生应用数学的能力,我们除了在各个章节编写了许多应用性例题和练习题外,还编写了数学建模简介一章(第10章),其中第一部分对数学模型的基本概念作了简要介绍,第二部分举例分析了5个比较典型的数学模型,所使用的方法都是本书中所介绍的微积分知识。数学建模简介一章可以作为本书前面各部分应用性内容的补充和延伸,有助于读者开阔视野,体验数学在解决实际问题中的价值和作用。同时也有助于学生理解数学建模的作用和意义,熟悉数学建模的一般方法和步骤。

本书在每一章的各节后面配置了大量的基本练习题,并在章后配置了具有一定难度或综合性的练习题,可供选用。书中标有“*”的部分,教师可根据学时等酌情选择讲授。

本书由西北农林科技大学、安徽农业大学合作编写。主编为刘迎洲(西北农林科技大学)、张庆国(安徽农业大学),负责总体设计和修改定稿;副主编

前言

为庾文利(西北农林科技大学)、位刚(西北农林科技大学)、汪宏喜(安徽农业大学)、徐丽(安徽农业大学)、杨小锋(西北农林科技大学)、曹宗宏(安徽农业大学),参加编写的还有李桢(西北农林科技大学)、薛晓(西北农林科技大学)。

西北农林科技大学王经民教授审阅了本书的全部稿件,提出了许多中肯的修改意见,特此表示衷心感谢。

由于编者水平有限,书中缺点和疏漏在所难免,敬请读者批评指正。

编 者

2012年2月

目 录

第 1 章 函数、极限与连续	1
1.1 函数	1
1.1.1 实数集的相关概念	1
1.1.2 函数的概念	2
1.1.3 函数的几种基本特性	4
1.1.4 反函数	5
1.1.5 复合函数	6
1.1.6 初等函数	7
习题 1-1	8
1.2 数列的极限	9
1.2.1 数列	9
1.2.2 数列的极限	10
1.2.3 收敛数列的性质	12
习题 1-2	13
1.3 函数的极限	13
1.3.1 自变量趋于无穷大时函数的极限	13
1.3.2 自变量趋于有限值时函数的极限	15
1.3.3 函数极限的性质	18
习题 1-3	18
1.4 无穷大与无穷小	19
1.4.1 无穷大和无穷小	19
1.4.2 无穷小的运算性质	22
1.4.3 无穷小的比较	23
1.4.4 曲线的渐近线	24
习题 1-4	26
1.5 极限的四则运算法则	26
习题 1-5	29

1.6 极限存在准则与两个重要极限	30
1.6.1 两个极限存在准则	30
1.6.2 两个重要极限	30
习题 1-6	33
1.7 函数的连续性	33
1.7.1 函数连续性的概念	33
1.7.2 函数的间断点	35
1.7.3 连续函数的运算性质和初等函数的连续性	35
习题 1-7	37
1.8 闭区间上连续函数的性质	37
习题 1-8	39
总习题 1	39
第 2 章 一元函数微分学	42
2.1 导数的概念	42
2.1.1 引例	42
2.1.2 导数的定义	43
2.1.3 求导数举例	45
2.1.4 导数的几何意义	46
2.1.5 函数的可导性与连续性之间的关系	47
习题 2-1	48
2.2 函数和、差、积、商的求导法则	49
习题 2-2	51
2.3 反函数和复合函数的求导法则	52
2.3.1 反函数的求导法则	52
2.3.2 复合函数的求导法则	53
习题 2-3	55
2.4 基本求导公式和初等函数求导数举例	55
2.4.1 基本求导法则	55
2.4.2 基本求导公式	55
2.4.3 初等函数求导数举例	56
习题 2-4	56
2.5 高阶导数	57
习题 2-5	58
2.6 隐函数与参数方程所确定的函数的导数	58

2.6.1 隐函数的求导法	58
2.6.2 由参数方程所确定的函数的导数	59
习题 2-6	60
2.7 函数的微分	61
2.7.1 微分的概念	61
2.7.2 微分公式与微分运算法则	63
2.7.3 复合函数的微分法则	63
习题 2-7	64
2.8 微分在近似计算中的应用	64
习题 2-8	66
总习题 2	66
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	68
3.1 微分中值定理	68
3.1.1 罗尔中值定理	68
3.1.2 拉格朗日中值定理	69
3.1.3 柯西中值定理	71
习题 3-1	71
3.2 洛必达法则	72
3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限	72
3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限	74
3.2.3 其他类型未定式的极限	75
习题 3-2	76
3.3 泰勒中值定理	76
习题 3-3	80
3.4 函数的单调性	81
习题 3-4	83
3.5 函数的极值	84
习题 3-5	88
3.6 函数的最大值和最小值	88
习题 3-6	91
3.7 曲线的凹凸性与拐点	92
习题 3-7	95
3.8 函数图形的描绘	96

习题 3-8	98
* 3.9 方程的近似解法——牛顿迭代法	99
* 习题 3-9	102
总习题 3	102
第 4 章 不定积分	105
4.1 不定积分的概念及其基本性质	105
4.1.1 原函数与不定积分	105
4.1.2 不定积分的基本性质	109
4.1.3 不定积分的基本公式	109
习题 4-1	111
4.2 换元积分法	112
4.2.1 第一类换元法	112
4.2.2 第二类换元法	115
习题 4-2	118
4.3 分部积分法	119
习题 4-3	121
4.4 不定积分的应用举例	122
习题 4-4	124
总习题 4	125
第 5 章 定积分及其应用	127
5.1 定积分的概念与性质	127
5.1.1 定积分问题举例	127
5.1.2 定积分的定义	129
5.1.3 定积分的几何意义	131
5.1.4 定积分的性质	132
习题 5-1	135
5.2 牛顿-莱布尼茨公式	136
5.2.1 积分上限函数及其导数	136
5.2.2 牛顿-莱布尼茨公式	138
习题 5-2	139
5.3 定积分的换元积分法和分部积分法	140
5.3.1 定积分的换元积分法	140
5.3.2 定积分的分部积分法	143
习题 5-3	145

5.4 定积分的应用	147
5.4.1 微元法	147
5.4.2 平面图形的面积	149
5.4.3 旋转体的体积	153
5.4.4 平面曲线的弧长	154
5.4.5 定积分在物理中的应用举例	158
习题 5-4	161
5.5 反常积分	162
5.5.1 无穷限反常积分	162
5.5.2 无界函数的反常积分	164
5.5.3 反常积分应用举例	165
5.5.4 Γ 函数	166
习题 5-5	168
总习题 5	169
第 6 章 多元函数微分学	172
6.1 预备知识	172
6.1.1 空间直角坐标系与空间的点	172
6.1.2 空间曲面及其方程	174
6.1.3 平面点集的基本概念	177
习题 6-1	179
6.2 多元函数的概念	179
6.2.1 二元函数	179
6.2.2 n 元函数	181
习题 6-2	182
6.3 二元函数的极限与连续	183
6.3.1 二元函数的极限	183
6.3.2 二元函数的连续性	184
6.3.3 闭区域上连续函数的性质	186
习题 6-3	186
6.4 偏导数	187
6.4.1 偏导数的概念	187
6.4.2 高阶偏导数	189
习题 6-4	190
6.5 全微分及其应用	191

6.5.1 全微分的概念	191
6.5.2 全微分在近似计算中的应用	194
习题 6-5	195
6.6 复合函数与隐函数的微分法	195
6.6.1 多元复合函数的求导法则	195
6.6.2 隐函数的求导法则	199
习题 6-6	201
6.7 多元函数的极值	202
6.7.1 无条件极值	202
6.7.2 条件极值与拉格朗日乘数法	206
习题 6-7	208
总习题 6	208
第 7 章 二重积分	213
7.1 二重积分的概念与性质	213
7.1.1 二重积分的概念	213
7.1.2 二重积分的几何意义	216
7.1.3 二重积分的性质	217
习题 7-1	218
7.2 二重积分的计算	218
7.2.1 利用直角坐标计算二重积分	219
7.2.2 利用极坐标计算二重积分	224
习题 7-2	229
7.3 二重积分应用举例	230
7.3.1 曲面的面积	230
7.3.2 立体体积	232
7.3.3 平面薄片的重心	233
7.3.4 平面薄片的转动惯量	235
习题 7-3	237
总习题 7	237
第 8 章 微分方程	240
8.1 微分方程的基本概念	240
8.1.1 引例	240
8.1.2 微分方程的概念	241
习题 8-1	243

8.2 可分离变量的微分方程	243
习题 8-2	245
8.3 一阶线性微分方程	246
8.3.1 一阶齐次线性微分方程的通解	246
8.3.2 一阶非齐次线性微分方程的通解	247
习题 8-3	249
8.4 用变量代换法解微分方程	249
8.4.1 齐次方程	249
8.4.2 伯努利方程	251
8.4.3 可化为齐次方程的一类微分方程	252
8.4.4 几种特殊类型的高阶方程	254
习题 8-4	256
8.5 线性微分方程解的结构	257
8.5.1 基本概念	257
8.5.2 函数组的线性相关性	258
8.5.3 线性微分方程解的结构	258
习题 8-5	261
8.6 二阶常系数线性微分方程	261
8.6.1 二阶常系数齐次线性微分方程	262
8.6.2 二阶常系数非齐次线性微分方程	265
习题 8-6	272
总习题 8	273
第 9 章 无穷级数	276
9.1 常数项级数	276
9.1.1 常数项级数的概念	276
9.1.2 收敛级数的基本性质	279
习题 9-1	280
9.2 常数项级数的审敛法	280
9.2.1 正项级数及其审敛法	280
9.2.2 交错级数及其审敛法	285
9.2.3 级数的绝对收敛与条件收敛	286
习题 9-2	288
9.3 幂级数	289
9.3.1 函数项级数的概念	289

目录

9.3.2 幂级数及其敛散性	291
9.3.3 幂级数的运算性质	296
习题 9-3	298
9.4 函数展开成幂级数	299
9.4.1 泰勒级数	299
9.4.2 函数展开成幂级数	302
9.4.3 幂级数在近似计算中的应用举例	306
习题 9-4	307
*9.5 傅里叶级数	308
9.5.1 三角级数的概念	308
9.5.2 函数展开成傅里叶级数	310
9.5.3 函数展开成正弦级数或余弦级数	313
9.5.4 周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数	316
*习题 9-5	318
总习题 9	318
第 10 章 数学模型简介	321
10.1 数学模型的有关概念	321
10.1.1 数学模型的定义	321
10.1.2 数学建模的一般方法和步骤	322
10.2 数学建模举例	324
10.2.1 交通管理中亮黄灯的时间问题	324
10.2.2 耐用新产品销售量问题	326
10.2.3 最优捕鱼策略问题	327
10.2.4 湖水污染问题	330
10.2.5 传染病模型	335
总习题 10	340
附录 积分表	342
习题参考答案	349
参考文献	375

函数、极限与连续

1.1 函数

高等数学研究的基本对象是定义在实数集上的函数，本节将复习中学数学中有关函数的概念，并作进一步讨论。

1.1.1 实数集的相关概念

在研究函数性质的过程中经常会涉及区间、邻域等概念。

1. 区间和邻域

区间和邻域是两种特殊的数集。

我们通常把由全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$ 。 $\mathbf{R}$ 具有稠密性，即 $\mathbf{R}$ 中的任何两个不相等的实数之间必有另一个实数。实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴上的点有着——对应的关系（图 1-1），所以通常我们把“实数 a ”与“数轴上的点 a ”看作具有相同的含义。

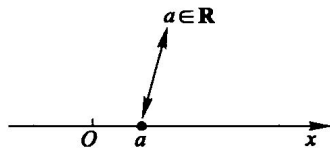


图 1-1

区间的概念

设 $a, b \in \mathbf{R}$ ，且 $a < b$ ，数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间，记为 (a, b) ，其中的 a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点；数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间，记为 $[a, b]$ ；数集 $\{x | a \leq x < b\}$ 和 $\{x | a < x \leq b\}$ 都称为半开半闭区间，分别记为 $[a, b)$ 和 $(a, b]$ 。以上这几类区间统称为有限区间，数 $b - a$ 称为这些区间的长度。

满足关系式 $x \geq a$ 的全体实数 x 的集合记为 $[a, +\infty)$ ，这里符号 ∞ 读作“无穷大”，符号 $+\infty$ 读作“正无穷大”。

类似地，记集合

$$(-\infty, a] = \{x | x \leq a\}, (a, +\infty) = \{x | x > a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x | x < a\}, (-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R},$$

其中 $-\infty$ 读作“负无穷大”。以上这几个数集都称为无限区间。有限区间和无限区间统称为区间。

邻域的概念

设 $a \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, 满足绝对值不等式 $|x - a| < \delta$ 的全体实数 x 的集合称为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\} = (a - \delta, a + \delta),$$

点 a 称为这个邻域的中心, δ 称为这个邻域的半径. 有时候在不强调邻域的半径的情况下, 也把 $U(a, \delta)$ 简记为 $U(a)$.

点 a 的去心 δ 邻域定义为

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\},$$

它有时也可简单地记作 $\dot{U}(a)$.

此外, 有时也会用到以下几种邻域:

点 a 的 δ 右邻域

$$U_+(a, \delta) = [a, a + \delta)$$

和点 a 的 δ 左邻域

$$U_-(a, \delta) = (a - \delta, a],$$

有时这两种邻域也被简记为 $U_+(a)$ 和 $U_-(a)$. 同样也可以定义点 a 的去心 δ 右邻域

$$\dot{U}_+(a, \delta) = (a, a + \delta)$$

和点 a 的去心 δ 左邻域

$$\dot{U}_-(a, \delta) = (a - \delta, a),$$

有时也简记为 $\dot{U}_+(a)$ 和 $\dot{U}_-(a)$.

2. 有界数集

设 D 为 $\mathbf{R}$ 中的一个子集合, 如果存在正数 M , 使得对于一切的 $x \in D$, 都有 $|x| \leq M$, 则称 D 为有界集, 正数 M 称为 D 的一个界. 如果 D 不是有界集, 则称 D 为无界集.

设 D 为 $\mathbf{R}$ 中的一个子集合, 如果存在数 M (或 L), 使得对于一切的 $x \in D$, 都有 $x \leq M$ ($x \geq L$), 则称 D 为有上界 (下界) 的数集, 数 M (或 L) 称为 D 的一个上界 (下界).

显然, 有界集一定是既有上界又有下界的数集, 而既有上界又有下界的数集一定是有界集.

1.1.2 函数的概念

1. 函数的定义

定义 设 D 为一非空实数集, 如果有对应法则 f , 使得对 D 中的每个数 x ,