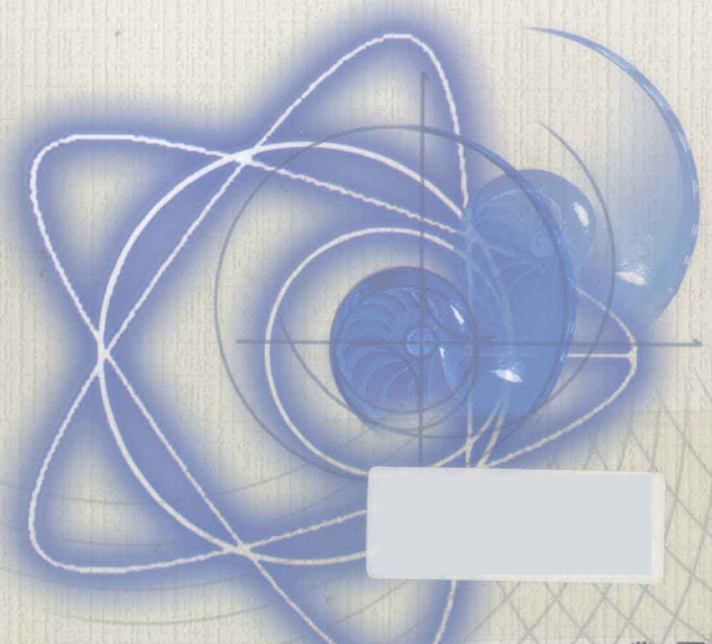
“十二五”规划教材

21世纪应用型本科系列教材

高等数学（第2版）

（应用理工类）（上册）

寿纪麟 于大光 张世梅



西安交通大学出版社

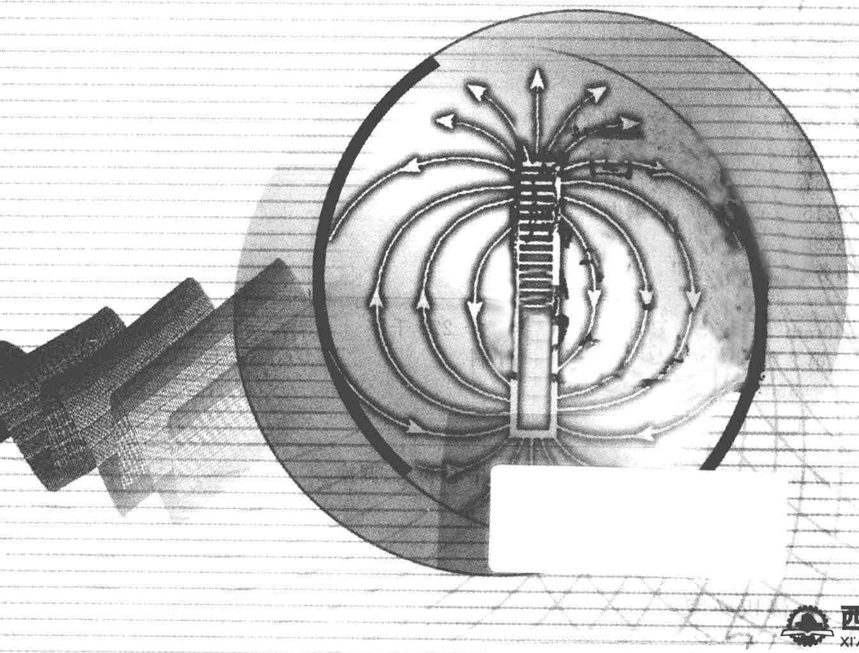
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

"十二五"规划教材
21世纪应用型本科系列教材

高等数学（第2版）

（应用理工类）（上册）

寿纪麟 于大光 张世梅



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(应用理工类).上册/寿纪麟,于大光,张世梅编.
—2版.—西安:西安交通大学出版社,2012.6
ISBN 978-7-5605-4397-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①寿… ②于… ③张… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第120190号

书　　名　高等数学(应用理工类)(第2版)上册
编　　者　寿纪麟　于大光　张世梅
责任编辑　叶　涛

出版发行　西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　西安建科印务有限责任公司

开　　本　727mm×960mm　1/16　**印张**　15　**字数**　270千字
版次印次　2012年6月第2版　2012年6月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-4397-0/O·299
定　　价　26.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248　(029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

第 2 版前言

本书 2009 年出版，经过三年来的教学实践，验证了本书的编写原则——在教学内容上贯彻“少而精”，突出“三基”的教学原则；适当减弱理论上的严密性和运算上的技巧性；增强文字上的可读性——是基本可行并符合教学实际的。当然，书中也存在一些缺点、错误和不够完善的地方，需要加以修正或改写。

本书是以培养“应用型人才”为宗旨的，在第 2 版修订时更加强调和完善上述编写原则。高等数学是大学本科最重要的基础课程，传统的教学内容系统性、逻辑性很强，并且结构很严谨。事实上，高等数学在所涵盖的教学内容中有基本内容和非基本内容之分，而对基本内容来讲，实际上又有核心与非核心的基本内容之分。所谓“少”，就是要突出“核心”的基本概念、基本理论和基本方法，根据不同专业的要求相应地淡化非核心的基本内容及非基本内容部分；所谓“精”，就是要突出“核心的基本内容”，再加提炼、整理，使其层次分明演绎得更加精炼、精彩。

本着上述精神，我们对教材作了部分改写和补充，使其在理论的逻辑上更加清晰，在文字上更加通顺。对部分非核心的基本内容打上“*”号，以供选用。

为了配合第二学期上物理课的需要，我们将“微分方程”一章调整到上册，把“空间解析几何”一章移至下册。

在第 2 版编写的过程中得到西安交通大学城市学院的鼓励和资助。城市学院数学教研室的任课教师对教材的内容提出不少修改建议，在此一并表示衷心的感谢。

编　者

2012 年 6 月于西安

第1版前言

近年来为培养应用型人才的本科大学迅速发展起来,我国高等教育从精英教育步入大众化教育的发展阶段,高等教育在不同层次上的建设已经不可避免,并已成为时代不可忽视的潮流之一。然而,目前还缺乏适用于这类教育的教材,本书就是针对应用型本科院校的教学需要而编写的。它与重点院校的教材相比,既有共同的基本内容,也有明显的差别。

首先,本书覆盖了教育部制定的本科《高等数学》的“教学基本要求”的内容,并且以“少而精”的教学原则,精选和安排教学内容,突出“三基”:即基本概念、基本理论和基本方法,特别强调常用函数及其图形、导数和积分的概念与其计算方法。

其次,在阐述一些重要概念与定理时,常常以具体例子为先导,从具体到抽象,使学生从实例中了解问题的由来,掌握分析和解决问题的思路,减少理解上的障碍。在确保教学内容整体框架的逻辑完整性的前提下,适度地减弱数学理论的严密性,如复杂定理的证明及技巧性较高的证明题等。为了适应不同专业的教学需要,对部分内容打“*”号,这些内容可以不讲或者选讲。

再次,为了适应应用型人才的培养,本书重点加强了应用性的例题和习题及解题的方法。在讲解微积分应用时,强调微积分的核心思想——“微元法”,并用它来指导分析和解决实际应用问题。此外还增添了“Matlab简介”作为扩大应用范围的手段(见下册附录)。

同时在内容的论述上力求逻辑严谨,层次分明,清晰易懂,便于自学。

本书分上、下两册。上册分六章:第1章,函数、极限与连续;第2章,导数与微分;第3章,中值定理与导数的应用;第4章,一元函数积分学;第5章,定积分的应用;第6章,向量代数与空间解析几何。在下册中分多元函数微分学;重积分;线、面积分;微分方程;无穷级数五章。各章的每节后面都附有习题。

在本书编写的过程中得到西安交通大学城市学院的支持和鼓励。在教材评审中西安交通大学理学院的王绵森教授对教材内容的改进提出很多具体建议,这些建议对保证教材的质量起到十分重要的作用。在此一并表示衷心的感谢。

本书由西安交通大学城市学院的寿纪麟、于大光、张世梅编写。由于编写的时间仓促以及编者水平有限,不妥与错误之处在所难免,敬请同行与读者批评指正。

编者

2009年7月于西安

目　录

第 2 版前言

第 1 版前言

第 1 章　函数、极限与连续 …………………………………………………… (1)

1.1　函数的概念 …………………………………………………… (1)

1.1.1　区间与邻域 …………………………………………………… (1)

1.1.2　函数的概念 …………………………………………………… (2)

1.1.3　函数的简单性态 …………………………………………………… (4)

1.1.4　初等函数 …………………………………………………… (6)

习题 1-1 …………………………………………………… (13)

1.2　极限的定义和性质…………………………………………………… (14)

1.2.1　极限的定义…………………………………………………… (14)

1.2.2　极限的性质…………………………………………………… (18)

习题 1-2 …………………………………………………… (19)

1.3　极限的运算…………………………………………………… (20)

1.3.1　极限的运算法则…………………………………………………… (20)

1.3.2　极限判别准则与两个重要极限…………………………………………………… (23)

习题 1-3 …………………………………………………… (27)

1.4　无穷小量与无穷大量…………………………………………………… (28)

1.4.1　无穷小量…………………………………………………… (28)

1.4.2　无穷小量的比较…………………………………………………… (30)

*1.4.3　无穷大量 …………………………………………………… (32)

习题 1-4 …………………………………………………… (33)

1.5　函数的连续性…………………………………………………… (34)

1.5.1　函数的连续性…………………………………………………… (34)

1.5.2　函数的间断点…………………………………………………… (35)

1.5.3　连续函数的性质及初等函数的连续性…………………………………………………… (38)

1.5.4　闭区间上连续函数的性质…………………………………………………… (40)

习题 1 - 5 …………………………………………………………… (42)

第 2 章　导数与微分 …………………………………………………… (43)

2.1　导数的概念……………………………………………………… (43)

2.1.1　引例……………………………………………………………… (43)

2.1.2　导数的概念……………………………………………………… (45)

2.1.3　导数的几何意义………………………………………………… (47)

2.1.4　函数的可导性与连续性的关系………………………………… (48)

2.1.5　求导数举例……………………………………………………… (48)

习题 2 - 1 …………………………………………………………… (51)

2.2　函数的求导法则………………………………………………… (52)

2.2.1　导数的四则运算法则…………………………………………… (53)

2.2.2　反函数的求导法则……………………………………………… (55)

2.2.3　复合函数的求导法则…………………………………………… (56)

2.2.4　初等函数求导小结……………………………………………… (58)

习题 2 - 2 …………………………………………………………… (59)

2.3　隐函数与参数方程的求导法　高阶导数……………………… (60)

2.3.1　隐函数的导数…………………………………………………… (60)

2.3.2　由参数方程确定的函数的导数………………………………… (62)

2.3.3　高阶导数………………………………………………………… (64)

习题 2 - 3 …………………………………………………………… (66)

2.4　函数的微分……………………………………………………… (68)

2.4.1　引例……………………………………………………………… (68)

2.4.2　微分的定义……………………………………………………… (68)

2.4.3　微分的几何意义………………………………………………… (70)

2.4.4　微分的运算法则及微分公式表………………………………… (71)

*2.4.5　微分在近似计算中的应用 …………………………………… (72)

习题 2 - 4 …………………………………………………………… (73)

*2.5　相关变化率 …………………………………………………… (74)

习题 2 - 5 …………………………………………………………… (75)

第 3 章　中值定理与导数的应用 ……………………………………… (77)

3.1　中值定理………………………………………………………… (77)

习题 3 - 1 …………………………………………………………… (82)

3.2 洛必达法则 …… (82)
习题 3-2 …… (86)
3.3 函数的单调性与曲线的凹凸性 …… (87)
3.3.1 函数的单调性 …… (87)
3.3.2 曲线的凹凸性与拐点 …… (89)
习题 3-3 …… (92)
3.4 函数的极值与最值 …… (93)
3.4.1 函数极值的定义 …… (93)
3.4.2 函数的极值判别与求法 …… (93)
3.4.3 最大、最小值问题 …… (95)
习题 3-4 …… (98)
3.5 函数图形的描绘 …… (99)
3.5.1 曲线的渐近线 …… (99)
3.5.2 函数图形的描绘 …… (100)
习题 3-5 …… (102)
第 4 章 一元函数积分学 …… (103)
4.1 定积分的概念与性质 …… (103)
4.1.1 引例 …… (103)
4.1.2 定积分的定义 …… (106)
4.1.3 定积分的几何意义 …… (107)
4.1.4 定积分的性质 …… (109)
习题 4-1 …… (112)
4.2 微积分基本公式 …… (112)
4.2.1 原函数的概念 …… (113)
4.2.2 变上限积分 …… (114)
4.2.3 牛顿-莱布尼兹公式 …… (116)
4.2.4 不定积分的概念和性质 …… (117)
4.2.5 用直接积分法求积分 …… (119)
习题 4-2 …… (121)
4.3 凑微分法 …… (122)
习题 4-3 …… (129)
4.4 换元积分法 …… (130)
习题 4-4 …… (138)

4.5 分部积分法 …… (139)
习题 4－5 …… (143)
4.6 广义积分 …… (144)
4.6.1 无穷限的广义积分 …… (144)
*4.6.2 无界函数的广义积分 …… (146)
习题 4－6 …… (149)
第 5 章 定积分的应用 …… (150)
5.1 定积分的微元法 …… (150)
习题 5－1 …… (151)
5.2 定积分的几何应用 …… (152)
5.2.1 求平面图形的面积 …… (152)
5.2.2 求体积 …… (158)
5.2.3 求平面曲线的弧长 …… (161)
习题 5－2 …… (163)
5.3 定积分的物理应用 …… (164)
5.3.1 变力沿直线所做的功 …… (165)
5.3.2 水压力 …… (166)
5.3.3 引力 …… (167)
*5.3.4 其它应用 …… (169)
习题 5－3 …… (170)
第 6 章 微分方程 …… (171)
6.1 微分方程的基本概念 …… (171)
习题 6－1 …… (174)
6.2 一阶微分方程 …… (175)
6.2.1 可分离变量的微分方程 …… (175)
6.2.2 齐次方程 …… (176)
6.2.3 一阶线性微分方程 …… (178)
6.2.4 一阶微分方程应用举例 …… (181)
习题 6－2 …… (185)
6.3 可降阶的二阶微分方程 …… (187)
6.3.1 $y''=f(x)$型 …… (187)
6.3.2 $y''=f(x,y')$型 …… (187)

*6.3.3 $y''=f(y,y')$型 …… (190)
习题 6-3 …… (191)
6.4 线性微分方程解的结构 …… (191)
6.4.1 一般概念 …… (191)
6.4.2 二阶线性微分方程解的结构 …… (192)
习题 6-4 …… (194)
6.5 二阶常系数线性微分方程的解法 …… (194)
6.5.1 二阶常系数齐次线性微分方程的解法 …… (194)
6.5.2 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法 …… (198)
6.5.3 二阶常系数线性微分方程应用举例 …… (202)
习题 6-5 …… (206)
附录Ⅰ 常用的初等数学公式 …… (208)
附录Ⅱ 极坐标简介 …… (211)
附录Ⅲ 几种常用的曲线 …… (213)
习题答案 …… (216)

第 1 章 函数、极限与连续

初等数学主要以常量为研究对象，而高等数学则主要研究变量．反映变量与变量之间依赖关系的函数是微积分的研究对象．极限的方法是研究变量数学的一种基本方法．本章主要介绍函数、极限和连续性等基本概念及其性质．掌握、运用好这些基本理论和方法是学好微积分的关键，也为今后的学习打下必要的基础．

1.1 函数的概念

1.1.1 区间与邻域

具有某种特定性质事物的总体叫做**集合**．组成这个集合的事物称为该集合的**元素**．例如，一个班的全体学生构成一个集合，学生是这个集合中的元素．若 a 是集合 A 中的元素，则称 a 属于 A，记为 $a\in A$；若 a 不是集合 A 中的元素，则称 a 不属于 A，记为 $a\notin A$．只含有有限个元素的集合称为**有限集**；含有无限个元素的集合称为**无限集**．不含任何元素的集合叫**空集**，空集用 $\varnothing$ 表示．

表示集合的方法通常有两种，一种是列举法，就是把集合的所有元素一一列举出来表示，例如，方程 $x^2-5x+6=0$ 解的集合可表示为 $A=\{2,3\}$；另一种是描述法，就是把所含元素的共同特性用描述性语言或数学表达式表示，若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体组成的，就可表示为 $A=\{x\mid x$ 具有性质 $P\}$，例如，方程 $x^2-5x+6=0$ 解的集合也可以表示为 $A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$．

以后用到的集合主要是数集，常见的数集有：全体自然数集合 $\mathbf{N}$、全体整数集合 $\mathbf{Z}$、全体有理数集合 $\mathbf{Q}$ 以及全体实数集合 $\mathbf{R}$．

区间是用得比较多的一类数集，它是介于两个实数之间的全体实数的集合．如数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 和 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 都是区间，其中两个实数 a 和 b 称为**区间端点**．在 $\{x\mid a<x<b\}$ 中不包含区间的端点，称为**开区间**，用 (a,b) 表示，即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$．在 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 中包含区间的端点，称为**闭区间**，用 $[a,b]$ 表示，即 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$．两个端点之间的距离称为**区间长度**．

类似地,还有两种**半开半闭区间**:$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

对于数集 E,如果存在正数 K,使对于一切点 $x\in E$,$|x|\leqslant K$ 都成立. 则称 E 为**有界集**,否则就称为**无界集**. 端点为有限值的区间为**有界区间**. 此外,还有**无界区间**,例如$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$,$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$,$(-\infty,a)=\{x|x<a\}$,$(-\infty,a]=\{x|x\leqslant a\}$,$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$等.

需要说明的是:∞只是一个记号,不是一个数,与之相伴的一定是圆括弧.

在高等数学中,经常把一类特殊的开区间$(a-\delta,a+\delta)$ $(\delta>0)$称为**点 a 的 δ 邻域**,记为 $U(a,\delta)$,其中点 a 称为**邻域中心**,δ 称为**邻域半径**,如图 1-1 所示.

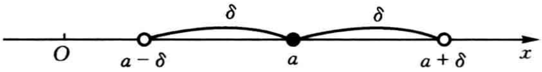


图 1-1

通常邻域半径 δ 都取很小的正数,所以点 a 的 δ 邻域表示在数轴上点 a 的邻近点的集合. 若去掉邻域中心,所得到的邻域称为**点 a 的去心 δ 邻域**. 记为

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$$

1.1.2 函数的概念

在考察一个自然现象或事物的变化过程时,往往会遇到各种不同的量. 在此过程中,有的量始终保持不变,这种量称为**常量**;有的量发生变化,这种量称为**变量**. 这些变量往往不是孤立变化的,而是相互有联系并遵循一定的规律变化的. 函数就是描述这种变量之间联系的一个数学概念.

现在考虑两个变量的情形. 例如,球的体积与半径之间的关系是 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$. 当球的半径 r 取定一个数值时,其体积 V 也就随之确定了. 当半径 r 变化时,其体积 V 也发生变化.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个 $x\in D$,变量 y 按照一定的对应法则总有确定的数值与之对应,则称 y 为 x 的**函数**,记为 $y=f(x)$. 其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,自变量 x 的取值范围D称为此**函数的定义域**,也可记为 $D(f)$,当自变量 x 取遍 $D(f)$中的各个数值时,对应的函数值$f(x)$的全体构成的集合 $R(f)$称为函数 $y=f(x)$的**值域**.

函数的定义域和对应法则是函数的两个要素. 只有当两个函数的定义域和对应法则分别相同时,这两个函数才是相同的,否则就是不同的.

顺便指出,数列$\{x_n\}(n=1,2,\cdots)$可看成一类特殊的函数,即以正整数 n 为自变

量，取值为实数的函数，记作 $x_n=f(n)$，因此，该函数的定义域为正整数集合 $\mathbf{N}_+$.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如果不考虑函数的实际意义，只是抽象地研究用算式表达的函数，则函数的定义域就是使函数表达式有意义的一切实数所构成的集合. 例如，函数 $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-2x+1}$ 的定义域是 $D=[-3,1)\cup(1,3]$；公式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 表示了自由落体物体下落距离和时间之间的函数关系，由于考虑的是实际问题，其定义域为 $D=[0,+\infty)$. 一般情况下，当函数用一个公式表示时，求其定义域应把握以下几点：① 分式的分母不为零；② 偶次根号下不能为负；③ $\log_a(h(x))$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 中的 $h(x)$ 应大于零等. 当然，在研究实际应用问题时还应考虑问题的实际背景，如时间不能小于零、体积不能为负值等.

若自变量在其定义域内任取一个值时，总是只有一个函数值与之对应，称此函数为**单值函数**，否则称为**多值函数**. 例如函数 $y=\sin^2 x$ 是单值函数，而函数 $y^2=3x+2$ 则是多值函数. 今后，若无特别说明，函数都是指单值函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，对于任意取定的 $x\in D(f)$，对应的函数值为 $y=f(x)$. 这样，在 xOy 平面上就确定了一个以 x 为横坐标、y 为纵坐标的点 (x,y). 当 x 取遍 $D(f)$ 上每一个数值时，就得到点 (x,y) 的一个集合 $C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D(f)\}$，称 C 为函数 $y=f(x)$ 的**图形**.

函数的表示方法有多种，常用的有解析法（公式法）、表格法和图形法等. 根据解析表达式形式的不同，函数可分为显函数、隐函数和分段函数三种. 其中，**显函数**是指该函数可以由 x 的解析表达式直接表示，例如 $y=\sqrt{x^2-3x^3}$；**隐函数**指的是自变量和因变量之间的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 给出，例如：由 $x^2+y^2-R^2=0$ 确定的函数 $y=y(x)$；**分段函数**是指在函数定义域的不同范围内，对应法则用不同的解析表达式来表示.

下面举几个分段函数的例子.

例 1.1　**绝对值函数** $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$.

绝对值函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，图形如图 1－2 所示.

例 1.2　**阶跃函数** $u_a(t)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t>a\end{cases}\quad(a>0)$.

这个函数的定义域为 $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$，值域为 $\{0,1\}$. 此函数在电子技术中经常遇到，称为单位阶跃函数. 该函数的图形如图 1－3 所示.

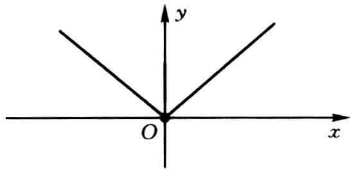


图 1-2

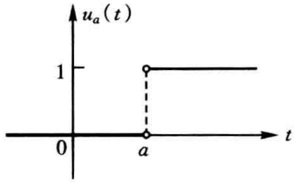


图 1-3

例 1.3　设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$,求函数$f(x+3)$的定义域.

解　因为 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$,

所以
$$f(x+3)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x+3\leqslant 1\\ -2, & 1<x+3\leqslant 2\end{cases},$$

即$f(x+3)=\begin{cases}1, & -3\leqslant x\leqslant -2\\ -2, & -2<x\leqslant -1\end{cases}$,故函数 $f(x+3)$的定义域为 $D=[-3,-1]$.

1.1.3　函数的简单性态

下面介绍后面常用的关于函数的几种简单性态.

1. 函数的单调性

假定函数 $f(x)$是定义在集合 D 上的函数,如果对属于区间 $I\subset D$ 上的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时总有不等式 $f(x_1)<f(x_2)$成立,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增**的(图 1-4a);总有不等式 $f(x_1)>f(x_2)$成立,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调减**的(图 1-4b). 单调增和单调减的函数统称为**单调函数**. 从图形上看,单调增函数表现为曲线从左到右上升,而单调减函数的图形则表现为从左到右下降.

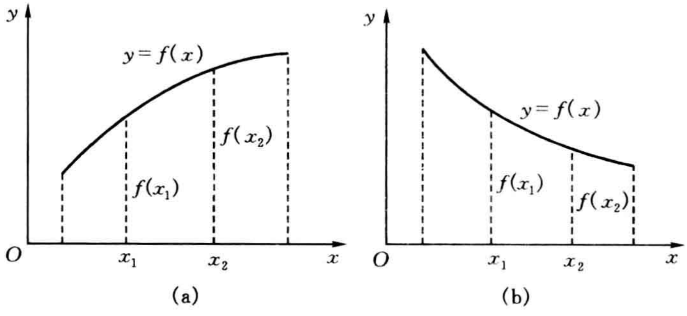


图 1-4

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$ 内是单调增的，而在 $(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2})$ 内是单调减的；余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\ \pi)$ 单调减，在区间 $(-\pi, 0)$ 单调增；正切函数 $y=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$ 单调增．再如，当 $\mu>0$ 时，幂函数 $y=x^{\mu}$ 在 $(0,\ +\infty)$ 单调增，当 $\mu<0$ 时，$y=x^{\mu}$ 在 $(0,\ +\infty)$ 单调减.

2. 函数的奇偶性

函数的**奇偶性**反映了函数的某种对称性. 设函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称，如果对于属于 $D(f)$ 的任何 x 值，恒有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**，偶函数的图形是关于 y 轴对称的(图 1-5)；如果对于属于 $D(f)$ 的任何 x 值，恒有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**. 奇函数的图形是关于原点对称的(图 1-6).

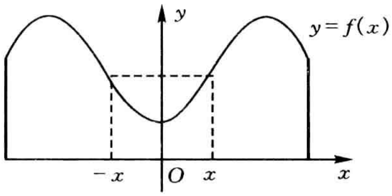


图 1-5

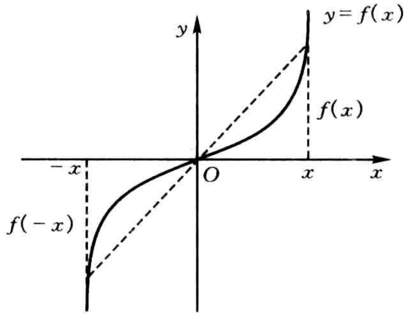


图 1-6

除了奇函数和偶函数以外，还存在大量的非奇、非偶函数. 可以证明，任何一个在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义的函数一定能分解为一个奇函数和一个偶函数之和. 实际上，令

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

则 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，其中 $f_1(x)$ 是偶函数，$f_2(x)$ 是奇函数.

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在非零数 l，使对于任意 x，$x\pm l\in D$ 时总有 $f(x\pm l)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，l 称为 $f(x)$ 的**周期**. 然而通常我们说的周期指的是**最小正周期**。

例如，正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$ 都是周期函数，其最小正周期均为 2π. 正切函数 $y=\tan x$ 也是周期函数，其周期为 π.

4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果对属于区间 $I\subset D$ 上的任意 x 值,若存在正数 M 使得$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上**有界**;若这样的数 M 不存在,则称函数 $f(x)$在区间 I 上**无界**. 函数无界是指无论对于任何正数 M,总存在 $x_1\in I$,使得$|f(x_1)|>M$.

若 $f(x)$无界,但对属于区间 $I\subset D$ 上的任意 x 值,存在一个数 K_1 使得$f(x)\leqslant K_1$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上有**上界**,而数 K_1 称为函数 $f(x)$的一个上界. 如果存在一个数 K_2 使得 $f(x)\geqslant K_2$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上有**下界**,而数 K_2 称为函数 $f(x)$的一个下界.

关于函数的有界性,有结论:**函数 $f(x)$在区间 I 上有界的充分必要条件是它在该区间上既有上界又有下界**。读者可自行证明此结论。

1.1.4 初等函数

1. 基本初等函数及其图形

高等数学中的研究的函数关系往往形式多样且结构复杂,但它们大多数是由几种最基本的函数所构成,通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这几种函数统称为**基本初等函数**这几种函数都是中学数学中已经讨论过的,这里将它们的主要性质简单总结一下,并做一些补充,以方便今后作进一步讨论. 特别是由函数的图形可以很容易看出这些函数的有关性质,读者应熟悉各个基本初等函数的图形.

(1) **幂函数**

幂函数 $y=x^\mu$(μ 是任意实数)的定义域要依据 μ 具体是什么数而定.

对于所有的实数 μ,幂函数 $y=x^\mu$ 的定义域都含有$(0,+\infty)$. 当 μ 为正整数时,其定义域为$(-\infty,+\infty)$;当 μ 为负整数时,定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

当 μ 取不同值时,幂函数 $y=x^\mu$ 的图形如图 1-7 所示.

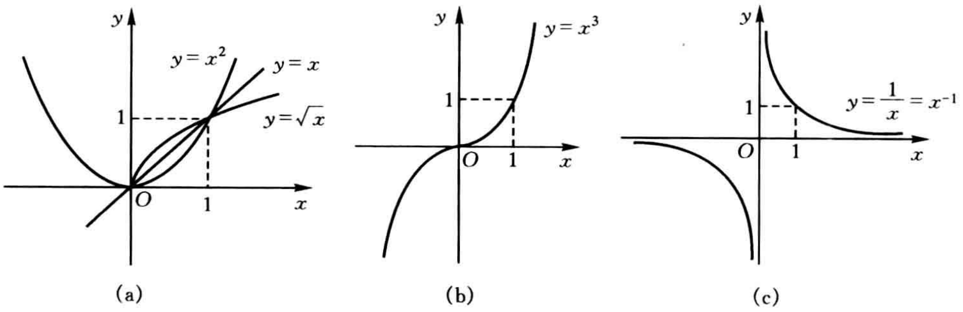


图 1-7

从函数的图像上不难看出：当 $\mu>0$ 时，幂函数 $y=x^\mu$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调增的；当 $\mu<0$ 时，幂函数 $y=x^\mu$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调减的. 当 μ 为偶数时，幂函数 $y=x^\mu$ 是偶函数；当 μ 为奇数时，$y=x^\mu$ 为奇函数.

(2) **指数函数**

指数函数 $y=a^x$（a 是常数，且 $a>0, a\neq1$）的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，由于对任意实数 x，总有 $a^x>0$，且 $a^0=1$，因此指数函数的图形总在 x 轴的上方，且通过点 $(0,1)$. 而且 $y=a^x$ 与 $y=a^{-x}$ 关于 y 轴对称.（图 1－8）

当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 是单调增的；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 是单调减的.

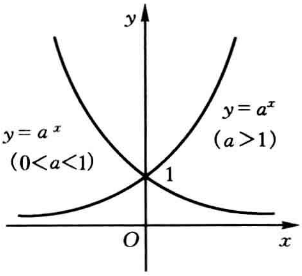


图 1－8

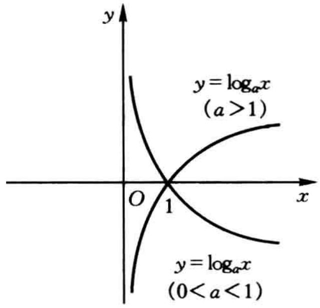


图 1－9

(3) **对数函数**

从中学数学已经知道，对数函数是指数函数的反函数，记为 $y=\log_a x$（a 是常数且 $a>0, a\neq1$）. 对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，$y=\log_a x$ 的图形总在 y 轴的右方，且通过点 $(1,0)$.

当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 是单调增的. 当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 是单调减的.（图 1－9）

在高等数学中经常用到以 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$，称为**自然对数函数**，简记为 $y=\ln x$. 它的反函数为 $y=e^x$，其中 e（$=2.7182818\cdots$）是一个无理数.

为了对反函数的概念有更清晰的理解，下面简要回顾一下反函数的概念.

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$，若对任意的 $y\in R(f)$，在定义域 $D(f)$ 内必定有值 x 与之对应，即 $f(x)=y$，这样就可以把 x 看成是 y 的函数，并将这个函数用 $x=\varphi(y)$ 表示，称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**. 相对于反函数，函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

如果对应于 y 的 x 不止一个，例如 $y=x^2$，对任意的 $y>0$ 总有两个 x 与之对应，这时反函数 $x=\pm\sqrt{y}$ 是一个多值函数. 但本书仍特别关注单值的反函数，如不