



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

Shuzhi
Tianqi Yubao

数值天气预报

沈桐立 主编

田永祥 陆维松 陈德辉 沈新勇 孙旭光 编著

P456.7

4

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

国家精品课程《数值天气预报》项目协作

国家自然科学基金 40975037、40775033 项目协作


“十一五”国家科技支撑课题《交互式观测-预报系统创新技术研究》

2006BAC02B03 协作

数值天气预报

沈桐立 主编

田永祥 陆维松 陈德辉 沈新勇 孙旭光 编著

 气象出版社
China Meteorological Press

内 容 提 要

本书系统讲述了数值天气预报的原理及其应用,反映了国内外数值天气预报理论研究和业务应用的最新进展。其主要内容有:(1)数值天气预报基础知识,其中包括各种坐标系中的大气运动方程组和数值计算方法。(2)数值天气预报模式的设计,其中包括差分方法的正压和斜压原始方程模式的设计,以及谱方法的正压涡度方程模式的设计。(3)初始条件、边界条件的类型和给定方法以及资料的同化。(4)大气边界层物理过程和湿热力过程的参数化。(5)中小尺度天气系统的动力分析及数值模拟基础。(6)国际及国内广泛使用的 MM5 模式及 WRF 模式的介绍及模拟试验。(7)中国新一代数值预报 GRAPES 模式的介绍。

本书可作为大专院校大气科学本科生和研究生的教材。其前半部分可供本科生学习使用;后半部分可供研究生学习或参考使用,也可供广大气象台站和研究机构的科技工作者参阅。

图书在版编目(CIP)数据

数值天气预报/沈桐立等主编. —北京:气象出版社,2010.12
ISBN 978-7-5029-5148-1

I. ①数… II. ①沈… III. ①数值天气预报 IV. ①P456.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 264419 号

Shuzhi Tianqi Yubao

数值天气预报

出版发行:气象出版社

地 址:北京市海淀区中关村南大街 46 号

总 编 室:010-68407112

网 址:<http://www.cmp.cma.gov.cn>

责任编辑:隋珂珂 李太宇

封面设计:博雅思企划

责任校对:永 通

印 刷:北京京科印刷有限公司

开 本:720 mm×960 mm 1/16

字 数:533 千字

版 次:2010 年 12 月第 1 版

印 数:1~5000 册

邮 政 编 码:100081

发 行 部:010-68409198

E-mail: qxcbs@cma.gov.cn

终 审:黄润恒

责任技编:吴庭芳

彩 插:1

印 张:28

印 次:2010 年 12 月第 1 次印刷

定 价:48.00 元

编者的话

本书是一本系统讲述数值天气预报原理及其应用的教科书。自2006年被选为普通高等教育“十一五”国家级教材、2008年被评为国家级精品课程以来,本书的作者一直在认真地进行素材的收集与教材的重编和改写工作,现历经3年已全部完成。书中内容体现了大气科学和气象事业在教育方面的发展。

本书的主要内容有:(1)数值天气预报基础知识,其中包括各种坐标系中的大气运动方程组和数值计算方法。(2)数值天气预报模式的设计,其中包括差分方法的正压和斜压原始方程模式的设计,以及谱方法的正压涡度方程模式的设计。(3)初始条件、边界条件的类型和给定方法,以及资料的同化。(4)大气边界层物理过程和湿热力过程的参数化。(5)中小尺度天气系统的动力分析及数值模拟基础。(6)国际及国内广泛使用的MM5模式及WRF模式的介绍及模拟试验。(7)中国新一代数值预报GRAPES模式的介绍。

根据高校数值天气预报课程学时的一般安排,本书前半部分可供本科生学习使用;后半部分可供研究生学习或参考。

本书在编写时力求反映国内外数值天气预报理论研究和业务应用的新进展;力求条理清晰、深入浅出、适合教学;注重理论与实践相结合,全书每章都配有习题或思考题;与第4章、第5章、第11章相配合,附录中还安排了数值天气预报的实习课题。我们期望本书能对读者在加深理解数值天气预报原理,提高制作数值天气预报的能力等方面起到促进作用。

本书的编写工作是在南京信息工程大学大气科学学院沈桐立教授的主持下进行的。沈桐立编写了第5、6、8、10、11章,并与田永祥教授合作编写了第1、4章;第2、7章是由田永祥教授编写的;陆维松教授编写了第9章;沈新勇教授编写了第3章;中国气象局数值预报中心陈德辉研究员编写了第13章;第12章是由南京大学大气科学学院孙旭光和汤剑平两

位副教授编写的。由此可见,本书是在“产学研结合”精神指导下的合作产物。

本书在编写出版过程中,得到了南京信息工程大学及其教务处、大气科学学院以及南京大学大气科学学院领导的大力支持,也得到了中国气象局数值预报中心领导的大力支持,并在气象出版社的全力支持与策划下精心出版了本书。中国气象局北京城市气象研究所的何迪同志为本书的编写收集了大量文献并参加了部分校对工作。在此,一并向他们表示诚挚的谢意。

由于作者学识水平及时间有限,书中缺点和错误在所难免,希望读者批评指正。

编著者

2010年8月10日于北京

目 录

第 1 章 大气运动基本方程组	(1)
1.1 旋转坐标系中的基本方程组	(1)
1.2 球坐标系中的基本方程组	(11)
1.3 局地直角坐标系中的基本方程组	(17)
1.4 p 坐标系中的基本方程组	(20)
1.5 σ 坐标系中的基本方程组	(28)
1.6 大气运动基本方程组的简化	(33)
1.7 涡度方程和散度方程及其简化	(41)
1.8 张量形式的运动方程组	(50)
1.9 张量形式的涡度方程与散度方程	(52)
1.10 数值天气预报模式的简单分类	(55)
习题	(56)
第 2 章 地图投影坐标系中的大气运动基本方程组	(58)
2.1 地图投影	(58)
2.2 普遍的正交曲线坐标系中的基本方程组	(69)
2.3 普遍的地图投影坐标系中的基本方程组	(75)
习题	(80)
第 3 章 数值差分计算方法	(82)
3.1 差分方法概论	(82)
3.2 线性计算不稳定	(86)
3.3 非线性计算不稳定	(89)
3.4 差分方程的物理解和计算解	(93)
3.5 有限网格下的误差	(95)
3.6 平滑与滤波	(98)
3.7 时间积分格式	(101)
3.8 几种常用时空积分格式的性能	(106)
习题	(109)

第 4 章 正压原始方程模式	(110)
4.1 正压原始方程组	(110)
4.2 正压原始方程组的线性计算稳定性	(112)
4.3 正压原始方程模式的积分性质及空间差分格式	(114)
4.4 空间差分格式与地转适应	(124)
4.5 正压原始方程模式的时间积分格式	(129)
4.6 正压原始方程模式的数值解法	(138)
习题	(142)
第 5 章 斜压原始方程模式	(144)
5.1 垂直坐标的选取	(144)
5.2 斜压原始方程组的积分性质	(153)
5.3 斜压原始方程模式的空间差分格式和时间积分方案	(159)
5.4 斜压五层原始方程模式的数值解法	(167)
5.5 斜压原始方程模式的模拟试验	(176)
习题	(180)
第 6 章 初始条件与边界条件	(181)
6.1 数值天气预报中初值处理的类型	(181)
6.2 四维同化问题	(194)
6.3 边界条件的类型与给定方法	(207)
6.4 嵌套网格的边界处理方案	(212)
习题	(218)
第 7 章 正压涡度方程谱模式	(219)
7.1 球面谱模式的展开函数和因变量的选择	(219)
7.2 球谐函数及其性质	(221)
7.3 波数截断问题	(228)
7.4 离散傅里叶变换 DFT(Discrete Fourier Transform)	(232)
7.5 勒让德变换(Legendre Transform)	(235)
7.6 正压涡度方程全球谱模式	(241)
习题	(246)
第 8 章 大气边界层的参数化	(249)
8.1 平均运动方程及平均次网格尺度项	(250)
8.2 单层参数化处理办法	(252)
8.3 多层参数化处理办法	(256)

8.4	边界层高度的预报	(260)
8.5	边界层模式	(263)
	习题	(268)
第9章	湿热力过程的参数化	(269)
9.1	湿热力过程和积云对流的基本理论	(269)
9.2	大尺度凝结过程	(271)
9.3	五种对流参数化方案	(277)
9.4	五种对流参数化方案的比较	(302)
	习题	(302)
第10章	中小尺度天气系统的数值模拟基础	(303)
10.1	描述中小尺度天气系统的基本方程组	(303)
10.2	中小尺度系统几种常用的方程组	(313)
10.3	描述中小尺度天气系统的线性方程组的动力学特性	(321)
10.4	模拟中小尺度天气系统应考虑的物理因子	(326)
	习题	(332)
第11章	中小尺度的 MM4 和 MM5 模式	(333)
11.1	中尺度 MM4 模式	(333)
11.2	中小尺度 MM5 模式	(343)
11.3	MM5 模式程序的结构	(358)
11.4	MM5 模式数值模拟的设计及试验结果	(361)
	习题	(365)
第12章	天气研究和预报模式 WRF	(366)
12.1	WRF 模式的整体框架介绍	(366)
12.2	WRF 模式的动力方程组及计算方案	(368)
12.3	WRF 模式的物理过程介绍	(382)
12.4	WRF 模式的模拟实例	(388)
	习题	(392)
第13章	中国气象局新一代数值预报模式(绝热动力 框架部分)	(393)
13.1	基本方程组	(394)
13.2	模式方程的处理	(397)
13.3	时间离散方案	(400)
13.4	空间离散方案	(404)

13.5	模式变量的预报方程组	(406)
13.6	边界条件的设置	(408)
13.7	新一代数值预报模式 GRAPES 的应用举例	(409)
13.8	附件	(412)
	习题	(416)
附录 A	正交曲线坐标系中矢量的运算	(418)
A.1	矢量恒等式	(418)
A.2	正交曲线坐标系中单位矢量的微商	(418)
A.3	正交曲线坐标系中矢量的基本运算	(420)
附录 B	正压原始方程模式预报实习	(422)
B.1	实习目的	(422)
B.2	实习要求	(422)
B.3	实习资料	(422)
B.4	制作数值天气预报的计算步骤	(422)
附录 C	斜压原始方程模式预报实习	(429)
C.1	实习的目的	(429)
C.2	实习要求	(429)
C.3	实习资料	(429)
C.4	制作数值天气预报的具体步骤	(429)
附录 D	用 MM4 模式及实际资料进行数值模拟的实习	(430)
D.1	实习的目的	(430)
D.2	实习要求	(430)
D.3	实习资料及程序	(430)
D.4	制作数值天气预报及模拟的步骤	(430)
附录 E	运行一版 MM5 模式有关说明	(431)
附录 F	WRF 模式的安装与运行步骤	(434)
F.1	WRF 安装和运行的基本要求	(434)
F.2	WRF 安装步骤	(434)
F.3	编译 WRF, WPS 和 ARWpost 程序包	(434)
F.4	运行 WRF 模式	(435)
参考文献		(437)

第1章 大气运动基本方程组

大气运动遵守牛顿第二定律、质量守恒定律、热力学能量守恒定律、气体实验定律和水汽守恒定律等物理定律。这些物理定律的数学表达式分别为运动方程、连续方程、热力学方程、状态方程和水汽方程等基本方程。它们构成支配大气运动的基本方程组。

所谓数值天气预报,就是在给定初始条件和边界条件的情况下,数值求解大气运动基本方程组,由已知的初始时刻的大气状态预报未来时刻的大气状态。因此,大气运动基本方程组是制作数值天气预报的基础。

本章首先导出旋转坐标系中一般形式的大气运动基本方程组。为了制作数值天气预报和对大气环流进行数值模拟,紧接着给出球坐标系、 z 坐标系、 p 坐标系和 σ 坐标系中大气运动基本方程组的具体形式。为了设计在数学上便于求解的数值天气预报模式,随后对大气运动基本方程组中的各基本方程及其变形方程(即涡度方程和散度方程)进行尺度分析和简化。最后,简单地介绍数值天气预模式的分类。

1.1 旋转坐标系中的基本方程组

在动力气象学中,一般采用固定在地球上的旋转坐标系中的基本方程组来研究大气的运动。本节首先把运动方程由惯性坐标系转换到非惯性的旋转坐标系中;然后导出旋转坐标系中的其他基本方程,即连续方程、状态方程、热力学方程和水汽质量守恒方程;最后给出旋转坐标系中的大气运动基本方程组。

1.1.1 运动方程

大气运动遵守牛顿第二运动定律。对于惯性坐标系(亦称静止坐标系或绝对坐标系,例如相对于某个恒星是静止的或作匀速直线运动的坐标系就是一个惯性坐标系),牛顿第二运动定律可表示为

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (1.1)$$

式中 \mathbf{F}_i 是作用于单位质量气块上的外力; d_a/dt 为在惯性坐标系中的全微商; \mathbf{V}_a 为绝对速度, $d_a \mathbf{V}_a/dt$ 为绝对加速度。

实际观测到的大气运动都是相对于地球表面的运动。因而在气象学中一般都是

应用固定在地球上的坐标系来研究大气运动。地球本身除了围绕太阳公转以外,还以常值角速度 Ω 自西向东绕地轴自转。因此,固定在地球上的坐标系是一个非惯性系。由于地球对恒星的加速度主要是由地球的自转引起的,所以可以把地球视为一个对惯性坐标系作纯粹旋转运动的物体。为了应用相对于非惯性系统的变量(即在旋转地球上所观测到的变量)来描述大气运动,需要把运动方程由惯性坐标系转换到非惯性坐标系,即固定在地球上的旋转坐标系。

1. 旋转坐标系和惯性坐标系中的全微商

把运动方程转换到旋转坐标系,需要建立一个惯性坐标系中矢量的全微商与旋转坐标系中矢量的全微商之间的关系式。

令 i, j, k 为惯性坐标系中沿坐标轴的单位矢量,而 i', j', k' 为旋转坐标系中的单位矢量。在这两种坐标系中,任意一矢量 A 可写成

$$\begin{aligned} A &= A_x i + A_y j + A_z k \\ &= A_x' i' + A_y' j' + A_z' k' \end{aligned}$$

在惯性坐标系中,矢量 A 的全微商为

$$\begin{aligned} \frac{d_a A}{dt} &= \frac{d_a A_x}{dt} i + \frac{d_a A_y}{dt} j + \frac{d_a A_z}{dt} k \\ &= \frac{d A_x'}{dt} i' + \frac{d A_y'}{dt} j' + \frac{d A_z'}{dt} k' \\ &\quad + A_x' \frac{d i'}{dt} + A_y' \frac{d j'}{dt} + A_z' \frac{d k'}{dt} \end{aligned} \quad (1.2)$$

式中 $\frac{d A_x'}{dt} i' + \frac{d A_y'}{dt} j' + \frac{d A_z'}{dt} k' \equiv \frac{d_r A}{dt}$ 为旋转坐标系中矢量 A 的全微商。由于 i' 是旋转坐标系中的单位矢量,所以 $d i'/dt$ 是 i' 的转动速度。不难求得 $d i'/dt = \Omega \times i'$ 。同理,有 $d j'/dt = \Omega \times j', d k'/dt = \Omega \times k'$ 。于是(1.2)式可改写为

$$\frac{d_a A}{dt} = \frac{d_r A}{dt} + \Omega \times A \quad (1.3)$$

上式即为惯性坐标系中矢量的全微商与旋转坐标系中矢量的全微商之间的关系式。其中 Ω 为地球自转角速度矢量, $\Omega = |\Omega| = 7.292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 。

2. 相对加速度与绝对加速度之间的关系

首先寻求相对速度 V 与绝对速度 V_a 之间的关系。将(1.3)式应用于旋转地球上任意一气块的位置矢量 r ,得

$$\frac{d_a r}{dt} = \frac{d_r r}{dt} + \Omega \times r \quad (1.4)$$

式中 $d_a r/dt \equiv V_a, d_r r/dt \equiv V$ 。于是上式可改写为

$$V_a = V + \Omega \times r \quad (1.5)$$

上式表明,在自转地球上,气块的绝对速度等于该气块相对于地球的速度加上由于地球自转而引起的牵连速度。

应用关系式(1.5)易于求得相对加速度与绝对加速度的关系。把(1.3)式应用于绝对速度 V_a , 得

$$\frac{d_a V_a}{dt} = \frac{d_r V_a}{dt} + \Omega \times V_a \quad (1.6)$$

将(1.5)式代入上式的右端,得到

$$\begin{aligned} \frac{d_a V_a}{dt} &= \frac{d_r}{dt}(\mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{r}) + \Omega \times (\mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{r}) \\ &= \frac{d_r \mathbf{V}}{dt} + 2\Omega \times \mathbf{V} - \Omega^2 \mathbf{R} \end{aligned} \quad (1.7)$$

这里已应用了矢量恒等式

$$\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) = -\Omega^2 \mathbf{R}$$

式中 \mathbf{R} 为气块所在的纬圈平面内从地轴到该气块的距离矢量,其大小为 $R = r \cos \varphi$ (参见图1.1)。(1.7)式表明,在惯性坐标系中,绝对加速度 $d_a V_a / dt$ 等于相对加速度 $d_r V / dt$ 、科里奥利(Coriolis)加速度 $2\Omega \times \mathbf{V}$ 与向心加速度 $-\Omega^2 \mathbf{R}$ 三项之和。

根据达朗贝尔(D'Alembert)原理,方程(1.1)中的 $d_a V_a / dt$ 可移到等式的右端作为惯性力来看待。因此,(1.7)式中的各加速度项都可以看做是惯性力。但是,一般只把 $-d_r V / dt$ 称为惯性力,而把 $-2\Omega \times \mathbf{V}$ 和 $\Omega^2 \mathbf{R}$ 分别称为科里奥利力(简称科氏力)和惯性离心力。

3. 作用在空气微团上的外力

作用在空气微团上的外力可以分成两类:一类为表面力,它是周围空气介质作用在空气微团表面上的力,表面力与作用面的大小成比例;另一类为质量力或体积力,这种力作用在组成空气微团的所有质点上,它与空气微团的质量或体积成比例,而与空气微团以外的空气介质的存在无关。气压梯度力和摩擦力属于表面力,而地球引力和重力属于质量力。

(1)气压梯度力。气压梯度力是周围空气介质作用在空气微团表面上压力的合力。单位质量空气微团所受的气压梯度力为

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.8)$$

式中 ∇ 为三维微分算子,负号表示气压梯度力的方向是由高压指向低压。上式表明,只有在非均匀的气压场中气压梯度力才不为零。

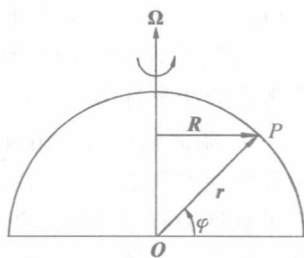


图1.1 气块位置矢量 r 与矢量 \mathbf{R} 的关系

(2) 摩擦力。摩擦力分为外摩擦力和内摩擦力。外摩擦力是指运动的空气与静止的下垫面之间的相互作用对空气运动产生的阻力。内摩擦力是指空气内部由于分子运动或湍流运动而引起的动量交换的力学效应。通常称内摩擦力为黏性力。

a. 分子黏性力。分子黏性力是周围空气作用在空气微团表面上的内摩擦力。空气是一种黏性介质,当某一层空气对邻近一层空气有相对运动时,就会产生这种内摩擦力。从分子运动论的观点来看,这种内摩擦力的产生乃是具有不同速度的两层空气之间分子动量交换的结果。

根据纳维尔(Navier)和斯托克斯(Stokes)的分子黏性理论,作用于单位质量空气微团的分子黏性力为

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.9)$$

式中 $\nu = \mu/\rho$ 为运动的分子黏性系数, μ 为动力的分子黏性系数,而 ∇^2 为三维拉普拉斯(Laplace)算子。对于不可压缩的流体,(1.9)式右端第一项为零。

大气是低黏性流体,除在近地面几厘米的薄层内,由于风速的垂直切变很大,需要考虑分子黏性力以外,一般总是可以把它略去。

b. 湍流黏性力。湍流黏性力类似于分子黏性力,它是由于具有不同运动速度的相邻两层空气之间湍流动量交换而产生的一种内摩擦力。应当指出,湍流黏性力与分子黏性力有本质的差别。分子黏性力决定于流体的物理属性(例如黏性);湍流黏性力决定于流体的运动状态,为与前者区别通常称其为湍流虚黏性力。根据混合长理论,单位质量空气微团所受的湍流黏性力为

$$\mathbf{F}_3 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right) \quad (1.10)$$

式中 A_z 为湍流交换系数。

虽然湍流黏性力比分子黏性力大得多,但是也只是在湍流运动明显的大气边界层内考虑它的作用。在研究自由大气运动时,常常把湍流黏性力忽略。

(3) 地球引力和重力。根据万有引力定律,单位质量空气微团所受的地球引力为

$$\mathbf{F}_4 = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}$$

式中 $G = 6.668 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ 为引力常数, $M = 5.976 \times 10^{27} \text{ g}$ 为地球的质量, \mathbf{r} 为空气微团的位置矢量。很显然,地球引力的方向指向地心。

作用于单位质量空气微团的惯性离心力为

$$\mathbf{F}_5 = \Omega^2 \mathbf{R}$$

其方向与 \mathbf{R} 的方向相同,在纬圈平面上从地轴经空气微团指向外(参见图 1.1)。

把地球引力与惯性离心力合并,得到单位质量空气微团所受的重力,即重力加

速度

$$\mathbf{g} = \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} + \Omega^2\mathbf{R} \quad (1.11)$$

参见图 1.2,如果把地球视为完全的球体,则重力 \mathbf{g} 的方向并不与地表面垂直。把惯性离心力 \mathbf{F}_5 分解为两个相互垂直的分力。一个分力部分地抵消了地球的引力,另一个分力与地表面相切指向赤道。后一分力的存在促使地表面上的自由物体向赤道方向运动。因而这种作用力决定了地球上海洋表面的形状,在一定程度上也决定了陆地表面的形状。它使地球成为一个两极比较扁平的椭球体,从而重力与椭球面(海平面)相垂直,不再有向赤道的分力。

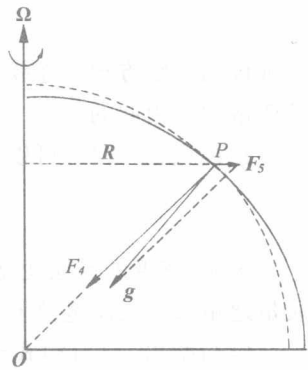


图 1.2 地球引力、惯性离心力与重力之间的关系

由(1.11)式可知,重力或重力加速度随高度和纬度而变化。但计算结果表明,这种变化较小。因此,在气象学问题中有时可以把重力加速度的大小 g 视为常数,其值为 $980 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ 。

4. 旋转坐标系中的运动方程

将(1.7)式~(1.11)式代入(1.1)式,经整理后得到旋转坐标系中矢量形式的运动方程

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{g} + \mathbf{F} \quad (1.12)$$

式中摩擦力 \mathbf{F} 为湍流黏性力与分子黏性力之和,标号“ r ”(表明在旋转坐标系中进行全微商运算)已略写。运动方程(1.12)表明,在旋转坐标系中,单位质量空气微团的相对加速度等于它所受的气压梯度力、科氏力、重力以及摩擦力诸力的总和。大气科学中常将 d/dt 称为个别变化。

1.1.2 连续方程

大气运动遵守的另一个基本规律是质量守恒定律。取一质量为 δM 的空气微团。由于在运动过程中空气微团的质量是守恒的,所以有

$$\frac{d(\delta M)}{dt} = 0$$

将 $\delta M = \rho \delta \tau$ ($\delta \tau$ 是空气微团的体积)代入上式,得

$$\frac{d(\rho \delta \tau)}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \delta \tau + \rho \frac{d(\delta \tau)}{dt} = 0$$

将上式除以 $\delta \tau$,得到

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{1}{\delta\tau} \frac{d(\delta\tau)}{dt} = 0$$

式中 $(1/\delta\tau)d(\delta\tau)/dt$ 是体积 $\delta\tau$ 的相对变化率, 即速度散度 $\nabla \cdot \mathbf{V}$, 于是有

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1.13)$$

上式即为连续方程。连续方程表明, 在运动过程中, 空气微团密度的变化是由于速度的辐散辐合引起的。

连续方程(1.13)可以改写为另一种形式, 即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.14)$$

上式表明, 密度的局地变化是由于穿过单位体积表面流入流出的质量差 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V})$ (即质量通量散度或质量散度) 造成的。

应当指出, (1.13) 式或 (1.14) 式是旋转坐标系中连续方程的一般形式。以后将会看到, 对于在旋转地球上的任一坐标系 (例如球坐标系), 只要写出该坐标系中的速度散度 $\nabla \cdot \mathbf{V}$ 或质量散度 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V})$, 便能得到这一坐标系中连续方程的具体形式。

1.1.3 状态方程

大气是一个热力系统。处于平衡态的热力系统其状态具有确定性。因此, 可以用一些宏观的物理量定量地描述该系统的状态。表征系统物理状态的宏观物理量称为状态参量。

各个部分物理性质完全相同的热力系统称为均匀系统。描述一定质量的均匀系统可用 3 个状态参量, 即压强 p 、体积 V 和温度 T 。但是这 3 个状态参量并不是孤立的, 它们之间存在如下的函数关系:

$$f(p, V, T) = 0$$

上式称为均匀系统的状态方程。应当指出, 状态方程仅适用于均匀系统。对于非均匀系统, 需要把它分为若干个均匀部分, 然后分别写出各个部分的状态方程。

在气象学要求的精度范围内, 可以把大气视为理想气体。理想气体是严格地遵守波义耳—查理(Boyle-Charles)定律的, 其状态方程的具体形式为

$$p = \rho RT \quad (1.15)$$

上式对于干空气或湿空气都适用。对于干空气, (1.15) 式中的 R 取为干空气的比气体常数 $R_d = 2.870 \times 10^{-1} \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 。对于湿空气, R 取为

$$R = (1 + 0.608q)R_d \quad (1.16)$$

式中 q 为比湿。有时, 湿空气的状态方程的形式也写为

$$p = \rho R_d T_v \quad (1.17)$$

式中 T_v 为虚温, 虚温的表达式为:

$$T_v = (1 + 0.608q)T \quad (1.18)$$

1.1.4 热力学方程

热力学方程或热力学第一定律描述能量守恒定律, 它有多种表述形式。

1. 一般形式的热力学方程

假设空气为理想气体。对于单位质量空气而言, 热力学方程可写成

$$\frac{dE}{dt} + w = \dot{Q} \quad (1.19)$$

式中 \dot{Q} 为外界对空气微团的加热率, 一般包括水汽相变潜热的作用, 湍流对热量的输送作用以及辐射的作用等。 dE/dt 为空气微团内能的变化, 而 w 是由于空气膨胀对外界所做的功率。热力学方程(1.19)表明, 在单位时间内, 单位质量空气微团自外界获得热量的一部分用于加热空气微团使其内能发生变化, 另一部分消耗于空气膨胀反抗外界压力而做功。

由于把空气视为理想气体, 所以单位质量空气的内能 E 为 $c_v T$ 。对于干空气而言, 定容比热容(又称为比定容热容) $c_v = 0.718 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 。在可逆过程中, 单位时间内单位质量空气膨胀所做的功为 $p d\alpha/dt$ ($\alpha = 1/\rho$ 为比容)。于是热力学方程(1.19)可改写为

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = \dot{Q} \quad (1.20)$$

应用状态方程(1.15), 热力学方程(1.20)还可以改写成

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt} = \dot{Q} \quad (1.21)$$

式中 c_p 为定压比热容(又称为比定压热容), 对于干空气而言, $c_p = 1.005 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 。

引用位温

$$\theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{R/c_p}$$

取 θ 的对数并对时间微商, 得

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R}{c_p p} \frac{dp}{dt}$$

将上式代入(1.21)式便得到用位温表示的热力学方程

$$c_p T \frac{d \ln \theta}{dt} = \dot{Q} \quad (1.22)$$

(1.19)式~(1.22)式皆为热力学方程的一般形式。

2. 绝热的热力学方程

对于绝热过程有 $\dot{Q} = 0$, 于是(1.21)式简化为

$$c_p \frac{d \ln T}{dt} - R \frac{d \ln p}{dt} = 0 \quad (1.23)$$

将状态方程(1.15)取对数并对时间微商,忽略 R 的变化,得

$$\frac{d \ln T}{dt} = \frac{d \ln p}{dt} - \frac{d \ln \rho}{dt}$$

将上式代入(1.23)式,消去温度的个别变化项,得到

$$(c_p - R) \frac{d \ln p}{dt} = c_p \frac{d \ln \rho}{dt}$$

由于 $c_p - R = c_v$,所以上式又可改写成

$$\frac{dp}{dt} = \kappa \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (1.24)$$

式中 $\kappa = c_p/c_v = 1.40$ 为干空气定压比热容与定容比热容的比值。对于绝热过程,(1.22)式简化为

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (1.25)$$

上式表明,在绝热过程中位温是守恒的。

(1.23)式~(1.25)式皆为绝热的热力学方程。

3. 考虑水汽相变的热力学方程

当空气中包含的水分发生气态与液态之间的相变时,热力学方程(1.21)的右端除了有外界的加热外,还要加上水汽相变释放的热量以及液态水温度下降对空气的加热量。令 L 为相变潜热,则水汽相变释放热量对空气的加热率为 $-Ldq/dt$ 。又令 l 为单位质量空气中所含液态水的质量, c_l 为液态水的比热容,则液态水温度降低 dT 对空气的加热率为 $-c_l l dT/dt$ 。因此,当考虑水汽相变时,热力学方程的形式为

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt} = \dot{Q} - L \frac{dq}{dt} - c_l l \frac{dT}{dt} \quad (1.26)$$

如果水汽相变按饱和假绝热过程进行,即空气微团中一旦有水汽凝结,凝结物便立即脱离空气微团,则热力学方程(1.24)简化为

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt} = -L \frac{dq_s}{dt} \quad (1.27)$$

式中 q_s 为饱和比湿。 $^{\circ}\text{C}$ 时相变潜热 $L = 2.5 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ 。

1.1.5 水汽方程

当研究大气中的湿物理过程时,需要用到水汽质量守恒方程,简称水汽方程。取一体积为 $\delta\tau$ 的空气微团,其中所含的水汽质量为 $\rho_v \delta\tau$, ρ_v 为水汽密度。如果该体积元中有水汽源或汇,且单位时间单位体积内水汽源提供的水汽质量为 S ,则水汽质量