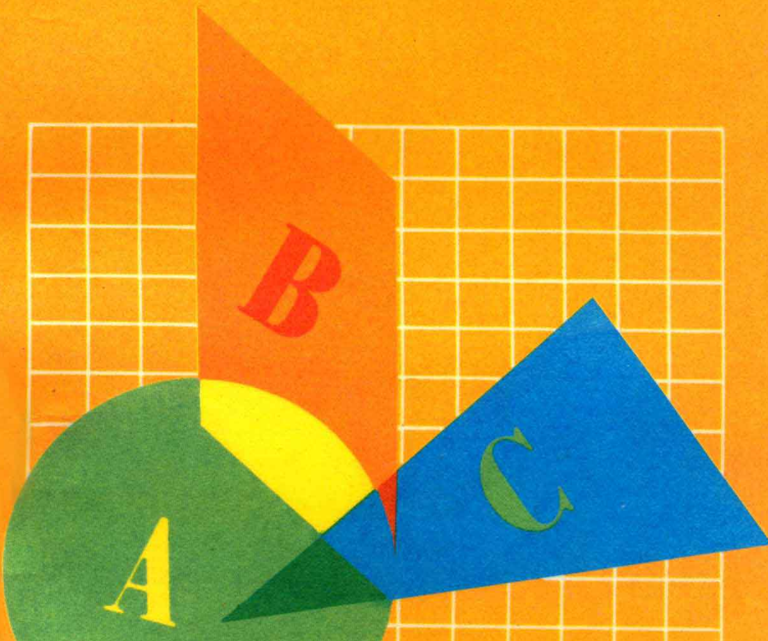
林炳华　主编

初中　数学教与学

CHUZHONGSHUXUEJIAOYUXUE



气象出版社

初中数学教与学

林炳华　主编

气象出版社

内 容 简 介

本书内容包括实数与代数式、方程和方程组、不等式、函数及其图象、三角函数和解三角形、直线形和圆。

本书和初中新教材同步编写，比较全面地、系统地归纳和总结了常用的解题方法与技巧，指出了易犯的错误。通过典型范例分析，可以活跃思维、开阔视野、沟通数学各部分知识之间的联系，提高分析问题和解决问题的能力。从教学实际出发，既有利于学生掌握知识，发展能力，提高学习效果，也有助于数学教师剖析教材，精心备课，提高教学水平。本书适合初中各年级师生使用。

图书在版编目(CIP)数据

初中数学教与学/林炳华主编. - 北京：气象出版社，1996.12

ISBN 7-5029-2160-5

I. 初… Ⅱ.林… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 17564 号

初中数学教与学

林炳华 主编

责任编辑：陈爱丽 终审：纪乃晋

封面设计：田春耕 责任技编：刘祥玉 责任校对：赵敏

* * *

气象出版社出版

北京市海淀区白石桥路 46 号 邮编：100081)

北京昌平兴华印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行 全国各地新华书店经销

开本：787×1092 1/32 印张：8.625 字数：193 千字

1997 年 1 月第一版 1997 年 1 月第一次印刷

印数：1—12000 **定价**：8.60 元

ISBN 7-5029-2160-5/G·0656

《初中数学教与学》
编委会名单

编者的话

《初中数学教与学》一书和初中数学新教材同步编写，每节内容分为内容概要、范例分析、练习题、答案或提示。其典型范例与练习题具有源于课本、高于课本、基础性强、灵活多变、深浅适度、题型多样和覆盖面广等优点。

作者每年均主编三本中小学数学书，邀请全国各地中小学数学教师参加编写，集多广义，许多编者均在全国性数学刊物上发表过多篇文章、写作能力强、水平高、教学经验丰富，因此作者所主编的各本书质量较高，深受广大读者欢迎。

由于经验不足，问题在所难免，恳请使用本书的广大读者提出宝贵的意见和建议。来信请寄福建闽侯尚干校园路 30 号。

林炳华

1996 年 4 月

目　录

第一章　实数与代数式

§1.1　实数

一、内容概要

在初中的数学学习中，对于数的认识是随着数的范围的扩展而扩展的．由于负数的引入，数的范围由小学学的算术数扩展到有理数；在引入无理数定义后，数的范围便扩展到实数范围．

学习本章内容要重点掌握实数的概念和运算．实数的概念包括实数的分类、数轴、相反数、倒数、绝对值等．在此基础上要掌握实数的运算法则、运算律和运算顺序．其中有理数的运算更为重要，因为它是以后学习各种数学知识的基础．因此初一开始学习有理数时就应该引起高度重视．

二、范例分析

例一、指出下列各数中的有理数和无理数：0，$\sqrt[3]{27}$，$\frac{\pi}{3}$，$0.\dot{3}2\dot{5}$，$2.242242224\cdots\cdots$，$\sqrt{6}$，$2^{\frac{1}{2}}$，$\cos 30^\circ$，$(\sqrt{7}+1)^\circ$，3.696696669．

解：有理数：0，$\sqrt[3]{27}$，$0.\dot{3}2\dot{5}$，$(\sqrt{7}+1)^\circ$．无理数：$\frac{\pi}{3}$，$2.242242224\cdots\cdots$，$\sqrt{6}$，$2^{\frac{1}{2}}$，$\cos 30^\circ$，3.696696669．

分析说明：

1．判断一个数是有理数和无理数，一定要严格按照定义，不能仅从形式上看，例如 $\frac{\pi}{3}$ 是无理数而不是有理数．

2．弄清无理数的定义，“无限不循环小数叫无理数”．其中“无限”和“不循环”两个条件缺一不可．初中阶段常见的无理数有：(1)

不尽方根、如$\sqrt{3}$,$\sqrt{8}$…….(2)具有特定意义的数 π .(3)无限不循环小数特别是具有特定结构的无限不循环小数.如 2.242242224……,…….(4)一些三角函数.如 cos30°, sin40°…… .

例二、回答下列问题,并简要说明理由 .

1. 不为零的两个实数互为相反数,这两个数的和与商各等于多少?

2. 一个数的倒数是它本身,这个数是几?

3. 两个无理数的和一定是无理数吗?

4. 一个负实数 a 与它的相反数之差的绝对值等于几?

5. 两个数的绝对值相等,这两个数的关系如何?

解:1. 不为零的两个实数互为相反数 . 这两个数的和是零,商是 -1.

设 a 与 $-a$ 互为相反数 $(a \neq 0)$

$\therefore a + (-a) = 0$; $\frac{a}{-a} = -1\ (a \neq 0)$

2. 一个数的倒数是它本身,这个数是 1 或 -1.

设这个数为 a,则它的倒数为$\frac{1}{a}$.

$\because \frac{1}{a} = a$

$\therefore a^2 = 1$

$\therefore a = \pm 1$

3. 两个无理数的和不一定是无理数 . 如:$\sqrt{5} + (-\sqrt{5}) = 0$.

4. 一个负实数 a 与它的相反数之差的绝对值等于 $-2a$.

设 a 的相反数为 $-a\ (a < 0)$

$\therefore |a - (-a)| = |2a| = -2a$

5. 两个数的绝对值相等,这两个数相等或互为相反数 .

因为当两个数的绝对值相等时有两种情形:(1) 这两个数同号或同时为零,此时两数相等 .(2) 这两个数绝对值相等, 符号相

反，此时两数互为相反数．

分析说明：

本题是一道概念题，解题时要认真审题．把可能出现的情况考虑周全，不要漏解．如第2小题不要漏去 -1；第5小题不要漏去互为相反数的情形．在说明理由时若结论不成立，可举反例加以说明，如第3小题．

例三、比较下列各组数的大小

1. $-\sqrt{0.0291}$ 与 $-\frac{17}{100}$

2. $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ 与 $\sqrt{3}+\sqrt{6}$

3. m^2+3 与 $3m$

解：1. $\because (\sqrt{0.0291})^2 = 0.0291$

$$(\frac{17}{100})^2 = \frac{289}{10000} = 0.0289$$

$$\therefore (\sqrt{0.0291})^2 > (\frac{17}{100})^2$$

$$\therefore 0.0291 > \frac{17}{100}$$

即 $|-\sqrt{0.0291}| > |-\frac{17}{100}|$

$$\therefore -\sqrt{0.0291} < -\frac{17}{100}$$

2. $\because (\sqrt{2}+\sqrt{7})^2 = 9+2\sqrt{14}$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2 = 9+2\sqrt{18}$$

$$\therefore (\sqrt{2}+\sqrt{7})^2 < (\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$$

$$\therefore \sqrt{2}+\sqrt{7} < \sqrt{3}+\sqrt{6}$$

3. $\because (m^2+3)-3m = m^2-3m+(\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2+3$

$$= (m-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4} > 0$$

$$\therefore m^2+3 > 3m$$

分析说明：

1. 两个实数的大小若不易直接比较时，可将其绝对值乘方或开方再比较.

2. 比较两个实数的大小常用求差法：$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$；$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$；$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$. 为了确定差式的正负可用配方法将其变形，如第 3 小题，或将差式变形为几个因式的积的形式.

例四、已知 a、b、c 三个实数在数轴上的位置如图 1.1 所示：

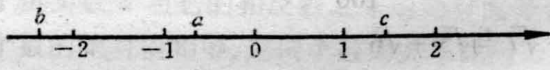


图 1.1

1. 比较 a、b、c 的大小

2. 试把 $|a|$、$|b|$、$|c|$ 按从小到大的顺序排列

3. 化简 $|a-2b|-|b+c|+|3a-c|$

解：1. $b<a<c$

2. $|a|<|c|<|b|$

3. $|a-2b|-|b+c|+|3a-c|$

$=(a-2b)+(b+c)-(3a-c)$

$=a-2b+b+c-3a+c$

$=-2a-b+2c$

分析说明：

1. 由于数轴上右边的点总比左边的点所表示的实数大，故得 $b<a<c$.

2. 根据绝对值的几何意义可得 $|a|<1$，$1<|c|<2$，$|b|>2$. 所以得 $|a|<|c|<|b|$.

3. 解答这一类题的思路是先判断 a、b、c 的符号和 a、b、c 的大小及绝对值符号内代数式值的符号；本题中由 $a<0$、$b<0$、c

>0 以及 $|a|<|c|<|b|$，可得 $(a-2b)>0$，$(b+c)<0$，$(3a-c)<0$. 然后再去掉绝对值符号化简计算.

例五、计算

1. $1.5-[(4\frac{2}{3})+(-2.75)-(-\frac{5}{6})+(-\frac{3}{8})]$

2. $-0.75^2\div(-1.5)^3+(-1)^5\times[\sqrt{(-2)^6}\div(\frac{1}{4}-\frac{9}{4})\times\frac{1}{2}]$

3. $4\times3.87-4\times2.37-24(\frac{3}{8}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12})$

解：1. 原式 $=1\frac{1}{2}-4\frac{2}{3}+2\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$

$=(1\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}+\frac{3}{8})-(4\frac{2}{3}+\frac{5}{6})$

$=(1\frac{4}{8}+2\frac{6}{8}+\frac{3}{8})-(4\frac{4}{6}+\frac{5}{6})$

$=4\frac{5}{8}-5\frac{1}{2}$

$=-\frac{7}{8}$

2. 原式 $=-(\frac{3}{4})^2\div(-\frac{3}{2})^3-[8\div(-2)\times\frac{1}{2}]$

$=-\frac{9}{16}\div(-\frac{27}{8})-[(-4)\times\frac{1}{2}]$

$=\frac{1}{6}+2$

$=2\frac{1}{6}$

3. 原式 $=4\times(3.87-2.37)-24\times\frac{3}{8}+24\times\frac{5}{6}-24\times\frac{7}{12}$

$=4\times1.5-9+20-14$

$=3$

分析说明：

为准确地进行实数计算，应注意以下几点：

1. 认真审题．例如不要把 -0.75^2 误认为是 $(-0.75)^2$．

2. 注意运用实数运算的符号法则．计算时可先确定符号，再确定绝对值．

3. 去括号时要注意括号前边的符号对于括号内每一个数的符号的影响．

4. 注意运算顺序，先做乘方与开方运算，再做乘除运算，最后再做加减运算．

在同一级运算中应从左到右依次运算，防止出现 $8\div(-2)\times\frac{1}{2}=8\div(-1)=-8$ 的错误．

5. 根据具体题目要灵活运用运算律或提取公因数法，简化计算．如第3小题所用的方法．

6. 如果算式里既有小数又有分数，要尽量考虑把小数化成分数，或把分数化成小数再计算较方便．计算时可熟记下列常用换算：$0.5=\frac{1}{2}$，$0.25=\frac{1}{4}$，$0.75=\frac{3}{4}$，$0.125=\frac{1}{8}$……．

例六、已知 $\sqrt{a-2}+|b+3|=0$，求 $(a-b)$ 的相反数的倒数．

解：$\because \sqrt{a-2}+|b+3|=0$

$$\therefore \begin{cases} a-2=0 \\ b+3=0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$

$\therefore (a-b)$ 的相反数的倒数为：

$$\frac{1}{-(a-b)}=\frac{1}{-[2-(-3)]}=-\frac{1}{5}$$

分析说明：

非负数是正数和零的集合，它是很重要的一部分实数．初中阶段常用到的非负数有绝对值、算术根、完全平方数……．常用到

的非负数的性质是“若有限个非负数的和等于零，那么每一个非负数都为零”.

例七、已知实数$\sqrt{5}$的整数部分为 a，小数部分为 b，求 $a-\frac{1}{b}$ 的值.

解：$\because$ $\sqrt{5}$ 的整数部分为 a，小数部分为 b.

$\therefore a=2,\ b=\sqrt{5}-2$

$$\therefore a-\frac{1}{b}=2-\frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

$$=2-\frac{\sqrt{5}+2}{5-4}$$

$$=-\sqrt{5}$$

分析说明：

解此类题的思路是先确定 a、b 的值，再计算.

确定 $\sqrt{m}$（$m>1$，m 为整数）的整数部分 a 和小数部分 b 的方法：先确定 m 介于哪两个完全平方数之间，即确定 $n^2<m<(n+1)^2$，（n 为正整数），则 $a=n$，$b=\sqrt{m}-a$. 注意其中的 b 不要用近似的小数代替.

例八、证明：

1. 若两个数互为倒数，那么它们和的倒数与它们的倒数的和也互为倒数.

2. 一个奇数与一个偶数的积是偶数.

证明：1. 设 a、b 互为倒数，则 $ab=1$. 它们和的倒数是 $\frac{1}{a+b}$，它们的倒数的和是 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

$$\because \frac{1}{a+b}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a+b}\cdot\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{ab}=1$$

$\therefore \frac{1}{a+b}$ 与 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 互为倒数.

2. 设一个奇数为 $2n-1$，一个偶数为 $2k$（n、k 为整数）.

$\because (2n-1)\cdot 2k = 2\cdot k(2n-1)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad = 2(2nk-k)$

$\because n, k$ 是整数.

$\therefore 2nk$ 是整数,则$(2nk-k)$仍是整数.

$\therefore 2(2nk-k)$是偶数,即一个奇数与一个偶数的积是偶数.

分析说明:

1. 证明文字题可将已知条件和欲证结论用字母表示较为方便.

2. 若两个数互为倒数,则它们的乘积为1,反之也成立.

3. 奇数和偶数可分别表示为$(2n\pm 1)$和$2n$(n为整数).

三、练习题

1. 比较大小

(1)π与3.14;　　　　(2)$\sqrt{3}-\sqrt{2}$与$2-\sqrt{3}$;

(3)$-\sqrt{3}$与-1.732;　(4)$\sqrt[6]{5}$与$\sqrt[4]{3}$;

(5)$\dfrac{a+m}{b+m}$与$\dfrac{a}{b}$　$(b>a>0, m>0)$.

2. 若实数a、b、c在数轴上的位置如图1.2:

图1.2

计算$\sqrt{a^2}-|a+b|+|c-a|+|b+c|$

3. 计算

(1)$-3^2+(-2\dfrac{1}{2})^2-(-2)^3+\sqrt{(-2)^2}$

(2)$[-3\times(-\dfrac{2}{3})^2-2^2\times 0.125-(-1)^3\div\dfrac{3}{4}]\div[2\times(-\dfrac{1}{2})^2-1]$

(3) $\dfrac{1+[\frac{1}{16}-(-\frac{3}{4})^3]\times(-2)^4}{-(-1)^{2n-1}\cdot(-1)^{2n}\cdot(-\frac{1}{16}-\frac{3}{4}-0.5)}$ (n 为自然数)

4. 已知$\dfrac{3(3a-2b)^2+|9-a^2|}{\sqrt{a+3}}=0$，求 $a+b$ 的值.

5. 证明所有奇数的平方减去 1 都是 8 的倍数.

四、答案或提示

1. (1) $\pi>3.14$

(2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}>2-\sqrt{3}$（提示：$\sqrt{3}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$）

(3) $-\sqrt{3}<-1.732$

(4) $\sqrt[6]{5}<\sqrt[3]{3}$（提示：先化成同次根式再进行比较）

(5) $\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$

提示：用求差法比较.

$\because \dfrac{a+m}{b+m}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{ab+mb-ab-ma}{b(b+m)}=\dfrac{m(b-a)}{b(b+m)}$

$\because b>a>0, m>0$

$\therefore b-a>0, b+m>0$，则$\dfrac{m(b-a)}{b(b+m)}>0$

$\therefore \dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$

2. $a-2c$　　3. (1) $7\frac{1}{4}$　(2) 1　(3) $-6\frac{2}{3}$　　4. $7\frac{1}{2}$

5. 证明：任设一个奇数为 $2n+1$（n 为整数）

$\therefore (2n+1)^2-1=4n^2+4n+1-1=4n(n+1)$

其中 n 与 $n+1$ 中必有一个是偶数

$\therefore n(n+1)$ 是2的倍数

$\therefore 4n(n+1)$ 是8的倍数.

即：所有奇数的平方减去 1 都是 8 的倍数.

§1.2　整式运算

一、内容概要

整式运算的主要内容是单项式、多项式、整式的有关概念和整

式的加减乘除运算．其中包括去添括号、合并同类项法则、四个幂的运算性质、单项式与多项式的乘除法则和五个乘法公式．上述内容之间的联系为：

<table>
<tr><td rowspan="4">整式运算</td><td>基　础</td><td>关键</td><td>类　型</td><td></td></tr>
<tr><td>去括号、合并同类项法则</td><td colspan="2">整式加减</td><td rowspan="3">混合运算</td></tr>
<tr><td>幂的运算性质
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$(a^m)^n = a^{mn}$
$(ab)^n = a^n b^n$</td><td>单×单</td><td>⇨多×单⇨多×多(五大乘法公式)</td></tr>
<tr><td>$a^m \div a^n = a^{m-n}$</td><td>⇨单÷单</td><td>⇨多÷单</td></tr>
</table>

二、范例分析

例一、计算下列各式

1. $(-3a^2)^3 - [9a^4 \cdot (-a^2) - 2a^3b^6c^2 \div (-\frac{1}{4}ab^2c)^2]$

2. $[4(x^2+y)(x^2-y)-(2x^2-y)^2] \div y$，其中 $x=\frac{1}{2}$，$y=-3$.

3. $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

解：1. 原式 $= -27a^6 - [-9a^6 - 2a^3b^6c^2 \div \frac{1}{16}a^2b^4c^2]$

$= -27a^6 + 9a^6 + 32ab^2$

$= -18a^6 + 32ab^2$

2. 原式 $= [4(x^4 - y^2) - (4x^4 - 4x^2y + y^2)] \div y$

$= [4x^4 - 4y^2 - 4x^4 + 4x^2y - y^2] \div y$

$= (4x^2y - 5y^2) \div y$

$= 4x^2 - 5y$