

数学名师特级教师倾心之作
掌握方法提高素养必读之书

高中数学

轻松学

编著 杨冠夏 董天龙 赵晟珂
策划 刘宗寅



- ◎ 核心知识建构
- ◎ 学习方法导引
- ◎ 情境材料荟萃
- ◎ 典型习题探究



中国海洋大学出版社
CHINA OCEAN UNIVERSITY PRESS

责任编辑 / 鲁 丰
装帧设计 / 少 刚
终 审 / 杨立敏

这是一套数学学习方法指导书，它告诉高中生朋友这样一个道理：数学可以轻松学好。

它倡导的是“低起点，高标准”。
“低起点，高标准”是一种学习艺术，也是一种学习策略。

高中数学 轻松学

它依据高中数学的教学顺序，以专题讨论的形式，本着“低起点，高标准”的要求，引导高中生朋友建构知识体系，理解核心知识；认识知识特征，遵循学习规律；融入学习情境，把握学习对策；强化问题探究，学会科学解题，从而提高数学素养，实现轻松学好数学的目标。

ISBN 978-7-81125-418-1



9 787811 254181 >

定价：25.00元

掌握方法 提高素养

高中数学

轻松学

编著 杨冠夏 董天龙 赵晟珂

策划 刘宗寅



中国海洋大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学轻松学. 必修 4, 必修 5/杨冠夏编著. —青岛:
中国海洋大学出版社, 2012. 5

ISBN 978-7-81125-418-1

I. ①高… II. ①杨… III. ①中学数学课—高中—
教学参考资料 IV. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 087103 号

出版发行 中国海洋大学出版社有限公司

社 址 青岛市香港东路 23 号 邮政编码 266071

出版人 杨立敏

网 址 <http://www.ouc-press.com>

电子信箱 cbsbgs@ouc.edu.cn

订购电话 0532-82032573(传真)

责任编辑 鲁 丰 电 话 0532-82032643

印 制 日照日报印务中心

版 次 2012 年 5 月第 1 版

印 次 2012 年 5 月第 1 次印刷

成品尺寸 170 mm×230 mm

印 张 17

字 数 305 千字

定 价 25.00 元

《高中数学轻松学》

主要作者简介

杨冠夏 中学高级教师、特级教师，青岛市首批学科带头人，山东省初等数学研究会副会长，国家数学奥林匹克高级教练；曾获青岛市优秀教师、山东省富民兴鲁劳动奖章、全国模范教师荣誉称号，享受国务院特殊津贴。

退休前任青岛二中数学组组长；现受聘于青岛39中，任课堂教学咨询专家。从事高中数学教学40余年，日常教学、高考辅导成绩突出。在数学奥林匹克竞赛辅导过程中，所辅导的青岛二中学生荣获38届IMO金牌。长期从事“数学学科特征教学法”研究，著有《高中数学基础与境界》一书，发表教学论文20余篇，2009年荣获全国数学科学方法论课题研究杰出个人称号。

于世章 中学高级教师、特级教师，山东省优秀教师，山东省课程团队专家，山东省数学会初等数学研究会常务理事；青岛市专业技术拔尖人才，青岛市中小学教师培训专家讲师团成员，青岛大学师范学院硕士生导师；国家级课题“手持技术与数学新课程整合”青岛试验区领导小组副组长、课题组组长，青岛市教育科学“十一五”规划研究课题“数学变式教学法研究”课题组组长，青岛市教研室中心组成员、市兼职教研员，青岛二中数学教研组组长；教育部中学数学实验教材研究组优秀实验教师，全国中小学教材审查专家库学科审查专家，全国数学方法论哲学委员会副秘书长，全国数学方法论“MM”研究会常务理事。

著有《在学生的心灵中旅行》一书，是三部论文集的主编，在国家级、省级刊物上发表教育教学论文30余篇。

董天龙 中学高级教师、特级教师，全国师德先进个人，山东省优秀教师，青岛市教学能手，青岛市劳动模范，青岛大学师范学院硕士研究生指导教师，青岛市教科所客座研究员，青岛市高考“7+1小组”成员，青岛市中小学教师培训资源库专家，青岛市首批名师工程人选，青岛二中名牌教师，青岛二中教学专家。

编写《高中数学新教材新思维》等学生用书四部；撰写的《焕发学生生命激情，打造数学生命课堂》等多篇论文在国家级、省级杂志发表，或在全国、省市评选中获奖；主持并承担青岛市教育科学“十一五”规划研究课题《数学教学对学生思维品质发展影响的研究》。

策划简介

刘宗寅 编审，曾任中学教师、教研员，省教育报刊社副社长兼副总编辑，省教育科学研究所所长，大学出版社总编辑、社长，全国科普作协会员。

长期从事中学教育教学研究、科普宣传和图书策划工作。策划并主持编写了中学生学习方法丛书、青少年科学教育丛书、“三导”（导学、导读、导用）丛书、科学故事88（套书）、科学发现的艺术（套书）、名校名师直击高考考点（套书）、名家名师直击中考考点（套书）等图书；编著教育、教学、科普类图书十余部，发表教育教学论文、学习指导文章和科普宣传文章数十篇；作为主编之一参加过省编初中教材（原国家教委审定）及教师用书、地方课程教材（省教育厅审定）及教师用书的编写工作，系新课标高中教材（教育部审定）及教师用书的作者和责任编辑；参编的图书曾获国家图书奖。

——数学可以轻松学好

我教了40多年的数学,退休后仍工作在教学第一线。这些年来,我一直想为高中生朋友写一本关于数学学习方法的指导书,想告诉各位朋友这样一个道理:数学可以轻松学好。

怎样就算“轻松学好数学”了呢?

我们的“轻松”是指效率高、兴趣浓、有成就感,还指可以化难为易。

这里的“学好”指的是把握数学的学科本质,提高个人的数学素养,有较强的解决数学问题的能力。

说实话,数学是一门抽象性强又特别讲究思想方法的学科,学好这门学科着实需要下一番苦工夫。既然如此,怎么又说可以“轻松学好”呢?

问题就在于,是以什么样的心态来对待数学学习,是以什么样的策略来进行数学学习。

许多年来,由于有些同学学习不得法,舍本求末,忽视了对于数学学习规律的自主探究,误认为学数学只是解数学题,盲目地泡进题海,一味地多做题、钻难题,题目做了不少但成效不大,学习负担十分沉重;还有一些同学,不了解数学究竟是一门什么样的学科,不知道学习数学到底有什么价值,学习被动,枯燥无味,认为数学太难学了,有的甚至想放弃数学学习。所有这些,都成为这些同学数学学习道路上的绊脚石,也使数学学习成为一个沉重的话题。

那么,怎样才能“轻松学好数学”呢?这套《高中数学轻松学》将为你支三招。

第一招,“不仅要看树木,更要看森林。要把树木看做森林中的树木”。这里,把知识点比做树木,把全部高中数学知识或一单元的数学知识比做森林。这第一招就是从“森林”(系统)的角度来认识每一棵树(知识点)的特征。

就拿“集合”一章来说吧。

集合是一个新知识,要涉及好多新名词、新符号,看起来比初中数学要抽象。其实,“集合”用了一章的篇幅,就是让你学习一种数学语言,这种语言会看会用,明白了,这一章的学习也就成功了,而且这种成功会带动整个高中数学的学习。

看到了吧?了解了知识的特征,把握了知识的核心,就抓住了有关数学知识的“纲”,就可以“纲举目张”,学习起来就不必面面俱到、负担多多了。

第二招,解数学题要在夯实知识基础的前提下掌握有关的解题规律。

有些同学认为数学题变化多端,一个题一个样,他们更青睐各种各样的具体题型及其解题技巧。

其实,解数学题是有基本规律的,掌握规律重于记住一些零星技巧。

例如,有些同学会感到必修4中的“三角恒等变换”公式多、变形多、难以驾驭,其实,只要掌握了其中的两个原则和八种技法,以它们做工具,你就会发现自己眼也明了手也巧了,“三角恒等变换”根本就不在话下。

再如,对于必修5中的“等差数列和等比数列”,只要提炼出它们的四种表达形式并以这四种表达方式做工具,不必去死记那么多派生性质,不论遇到什么样的数列题,都能很容易地找到下手之处。

具体的数学解题技巧可能千变万化,不过,无论如何变化也离不开一定的规律。只要掌握了解题规律,不必进行那么多的重复性训练,不必死记题型硬套模式,就可以自如地应对各种数学题。

第三招,从简单的知识入手,从会做的题目入手,永远不忽视基础,循序渐进地学习。

就拿立体几何(必修2,选修2-1)来说吧,人们都说入门难。那么,怎样做到轻松入门哪?成功的经验是用“看图说话”做入门的抓手、用“十六字诀”做入门的规范。找到这些简单的突破口,立体几何会越学越容易,再也难不着你。

一些同学做稍微综合一点的数学题,不是速度慢,就是常出错,甚至还会无从下手。深究起来,千原因万原因,最重要的原因是知识基础没有打好;之所以对于综合题缺乏洞察力,根子还在于对那些低起点的简单题没有吃透,没有从中学到本质的东西,浅尝辄止,一晃而过,这就是问题的病根。

数学大师华罗庚有一句话说得很到位、很深刻:

“退,足够地退,退到最原始而不失去重要性的地方,这是学好数学的一个



诀窍。”

也正是基于以上三点，我们写了《高中数学轻松学》这套书。

在这套书中，我们不断地强调“低起点，高标准”，什么意思呢？

“低起点，高标准”是指要从低起点出发，不轻视浅显的知识；即使浅显的知识，也要从中发现问题，追问几个为什么，刨根问底，把问题看准了、弄透了，理清它的来龙去脉，抓住其中的关键。也就是说，不仅应当知其然，而且应当知其所以然；不仅要知其所以然，而且要追究“怎样才能达到知其所以然的境界”。

“低起点，高标准”并不是降低对数学学习的要求；相反，是为了在容易地跨进门槛后能站稳脚跟，轻松地取得进一步学习数学的发言权，展开对于数学思想方法的探究与追求，达到数学学习的“高标准”。

“低起点，高标准”是一种学习策略，是一种学习艺术。它会时刻提醒你，数学学习的高层次和数学基础总是紧密相连的，任何能力的提高都离不开数学基础。

“低起点，高标准”会一步一步引导你攀上数学学习的高峰，让你在学习中汲取数学的理性和睿智，享受数学文化的熏陶，提高会使你受益终生的数学素养。

《高中数学轻松学》共分三册：第一册包括必修1、必修2、必修3的内容；第二册包括必修4、必修5的内容；第三册包括选修2-1、选修2-2、选修2-3的内容。

《高中数学轻松学》将学习内容分为若干专题，每一专题又分为四个部分。

第一部分：核心知识建构

这一部分以清楚、准确、简捷为特点，引导你轻松梳理知识脉络，建立知识体系，明确知识定位，掌握知识核心。

第二部分：学习方法导引

这一部分是本书的重点，立足于本专题知识的特征，提出相应的学习策略。

俗话说，一把钥匙开一把锁。有了对知识特征的揭示和对解题规律的提炼，你才会成为“解牛”的“庖丁”。

这一部分还安排了许多典型例题，引导你把握所介绍的解题方法，感悟所揭示的解题规律。

第三部分：情境材料荟萃

这一部分介绍的与本专题相关的数学史话、数学家故事以及数学在实践中的应用，会让你体会数学从哪里来又到哪里去，了解数学文化及其价值，体验数

学的神奇与魅力。

情感与兴趣是你轻松学好数学的动力。

第四部分：典型习题探究

这一部分所给习题不多，但个个都有代表性；不仅给出了一般习题，还给出一些探究问题，引导你对本专题内容进行反思、总结、探索，进一步掌握本专题所介绍的思想、方法和规律。

每一专题的开始都有一段“题记”，那是对这一专题的地位和价值的定位，是对这一专题的知识特征或核心思想的概括。

愿《高中数学轻松学》成为你的良师益友，助你轻松学好数学，取得优异成绩！

致 谢

《高中数学轻松学》有幸得到全国著名特级教师，全国初等数学研究会发起人和顾问、全国著名特级教师杨之先生的指导，甚为感激。

《高中数学轻松学》的出版得益于我的老同学、长期从事中学教育教学研究的刘宗寅先生的精心策划，得益于青岛39中及白刚勋校长的热情帮助，得益于中国海洋大学出版社的大力支持。在此，深表谢意。

同时，我还要感谢于世章老师、董天龙老师、卞文老师、蒋万磊老师、于志昌老师、赵晟珂老师的真诚合作，感谢孙云霞老师、曹晓冬老师、王成平老师的积极协助。

杨冠夏

2012年3月

目录 Contents

致高中生朋友

必修 4

专题 1 任意角的三角函数和它的研究工具	3
专题 2 从图象看三角函数的性质	26
专题 3 平面向量和它的三种表达形式	48
专题 4 三角恒等变形的原则和技法	64
参考答案	87

必修 5

专题 1 解三角形问题	101
专题 2 等差数列和等比数列的四种形式	120
专题 3 数列的前 n 项和问题与数列方法	146
专题 4 不等式的性质和不等式问题	170
专题 5 不等式与最值问题	204
专题 6 简单线性规划问题和它的解析几何模型	226
参考答案	243



必修 4

专题1 任意角的三角函数和它的研究工具

专题2 从图象看三角函数的性质

专题3 平面向量和它的三种表达形式

专题4 三角恒等变形的原则和技法

学习数学学什么?



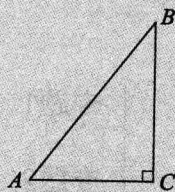
锐角三角函数:

在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 那么:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} \text{ (即 } \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} \text{),}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} \text{ (即 } \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}} \text{),}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} \text{ (即 } \frac{\text{对边}}{\text{邻边}} \text{).}$$



【你想过吗】

在初中已经学过三角函数了, 那么, 为什么高中还要再学三角函数呢?

高中所讲的三角函数和初中相比, 有哪一些新的特点呢?

高中在研究三角函数时, 有哪些初中不曾使用过的方法呢?

专题 1

任意角的三角函数和它的研究工具

三角函数是函数,它和其他基本初等函数有相同的研究方法.三角函数又是由旋转角作自变量形成的特殊函数,它和其他基本初等函数又有不相同的特殊研究方法.

关注三角函数的一般性质和一般方法,更要关注三角函数的特殊性质和特殊方法,这是学习三角函数的基本出发点.

——题记



一、角的概念的推广

1. 平面几何中的角

平面内由一点引出的两条射线所组成的图形叫做角,这一点叫做角的顶点,这两条射线分别叫做这个角的边.

2. 旋转角

平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形叫做角,旋转开始的位置叫做角的始边,而旋转终止的位置叫做角的终边,那个端点叫做角的顶点.

我们把逆时针方向的旋转角规定为正角,而把顺时针方向的旋转角规定为负角.一条射线没有旋转,我们规定它为零角,零角的始边与终边重合.

3. 任意角的推广

(1) 由常量到变量,角用来描写旋转量.

(2) 有了零角,角有了方向,角有正角、负角、零角之分.

(3) 角的范围可以任意大小. 角不仅可以是锐角, 不仅是 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之内的角. 例如, 可以有 60° 角, 也可以有 420° 、 780° 、 -300° 角等.

二、角的度量

1. 角度制

规定周角 $= 360^\circ$.

2. 弧度制

(1) 1 弧度的角: 长度等于半径长的弧所对的圆心角称为 **1 弧度** 的角. 弧度用 rad 表示, 读作“弧度”.

用弧度制表示角的大小, “rad”和“弧度”都可省略不写. 但用角度制表示角时, 单位“°”“′”“″”不能省略.

(2) 弧度与角度的换算:

$$360^\circ = 2\pi, \boxed{180^\circ = \pi}, 90^\circ = \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{\pi}{6} = 30^\circ, \frac{\pi}{4} = 45^\circ, \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0.01745;$$

$$1 = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ = 57^\circ 18'.$$

(3) 弧长和扇形面积的弧度制公式:

$$\text{弧长 } l = |\alpha| \cdot r, \text{扇形面积 } S = \frac{1}{2} l \cdot r = \frac{1}{2} |\alpha| \cdot r^2.$$

其中, α 表示圆心角的弧度值, r 表示弧(或扇形)的半径, l 表示弧长.

(4) 单位圆中圆心角的弧度值与该圆心角所夹的弧长相等.

$$|\alpha| = l.$$

三、任意角的数形结合表示

1. 终边相同的角

(1) 与角 α 终边相同的角有无穷多个, 它们的集合是 $\{\beta | \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$.

集合的弧度制表示为 $\{\beta | \beta = 2k\pi + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$.

(2) 任意角 θ 可以用基本角 α 表示.

基本角: 若角 α 满足 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$, 则称角 α 为**基本角**.



对任意角 θ , 必存在 $k \in \mathbf{Z}$ 和基本角 α , 使 $\theta = k \cdot 360^\circ + \alpha, (k \in \mathbf{Z})$.

2. 在直角坐标系中角的象限分类

讨论任意角时, 人们通常让任意角的顶点放在原点, 让角的始边与 x 轴正方向重合:

- i. 象限角: 角的终边在第几象限, 就称这个角是第几象限角;
- ii. 象限界角: 当角的终边落在坐标轴的某一个方向时, 这个角不属于任何象限, 称它为象限界角.

第一象限角的集合为 $\{\theta | 2k\pi < \theta < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$;

第二象限角的集合为 $\{\theta | \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \theta < \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$;

第三象限角的集合为 $\{\theta | \pi + 2k\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$;

第四象限角的集合为 $\{\theta | \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < \theta < 2(k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

第四象限角的集合也可以写成 $\{\theta | -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \theta < 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$; 同样, 第三象限角的集合也可以写成 $\{\theta | (2k-1)\pi < \theta < 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$.

所有象限界角组成角的集合可以写作 $\{\theta | \theta = k\pi \text{ 或 } \theta = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, 也可以写作 $\{\theta | \theta = \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

四、任意角的三角函数

1. 任意角的三角函数的(坐标)定义

如图 1-1-1, 设角 α 的终边上(异于原点的)任意一点, 它的坐标为 (x, y) , 原点到这一点的距离为 $r (r > 0)$, 那么角 α 的正弦、余弦、正切分别是

$$\sin \alpha = \frac{y}{r},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}.$$

除教材上所介绍的这三个三角函数外, 还有如下三个

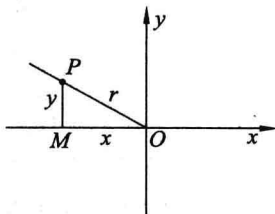


图 1-1-1

三角函数(已超出课标要求):

余切 $\cot\alpha = \frac{x}{y}$, 正割 $\sec\alpha = \frac{r}{x}$, 余割 $\csc\alpha = \frac{r}{y}$.

正弦、余弦、正切、余切、正割、余割, 每一个都是角的集合到某个比值集合的函数, 这六个函数统称为角 α 的三角函数.

2. 任意角的三角函数线(单位圆定义法)

单位圆: 在直角坐标系中, 我们称以原点为圆心、以单位长度为半径的圆为单位圆.

设任意角 α 的终边与单位圆相交于点 P , 点 P 在 x 轴上的射影为 M , 过单位圆与 x 轴正半轴的交点 A 作单位圆的切线交角 α 的终边于点 T . 规定 MP 、 OM 、 AT 为有向线段的数量, 则 $\sin\alpha = MP$ 称为角 α 的正弦线, $\cos\alpha = OM$ 称为角 α 的余弦线, $\tan\alpha = AT$ 称为角 α 的正切线(图 1-1-2).

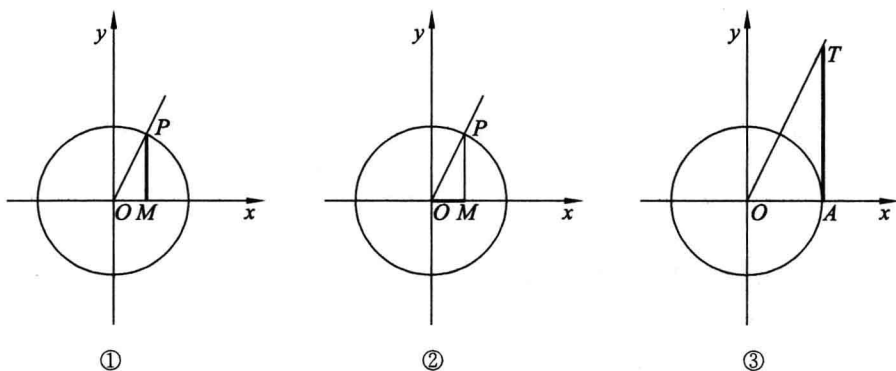


图 1-1-2

设点 P 的坐标为 (x, y) , 点 T 的坐标为 (x', y') , 则 $\sin\alpha = y, \cos\alpha = x$,

当角 α 为第一、第四象限角时, $x' = 1$, 当角 α 为第二、第三象限角时, $x' = -1$.

对第一、第四象限角 $\alpha, \tan\alpha = y'$;

对第二、第三象限角 $\alpha, \tan\alpha = -y'$.

对于第一、第四象限角 $\alpha, \tan\alpha = y'$ 的正切线是 AT , 而第二、第三象限角 $\alpha, \tan\alpha = -y'$ 的正切线仍旧可以是 AT (图 1-1-3) $(\frac{y'}{-1} = \frac{AT}{OA} = AT)$.

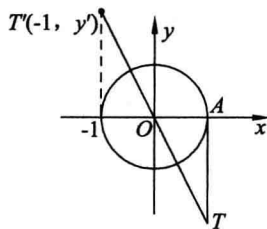


图 1-1-3

我们又把三角函数的单位圆定义法叫做三角函数的几何定义法. 单位圆定义可以用几何图形直观地研究三角函数.