



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
《自动控制原理》立体化教材

自动控制原理习题解析

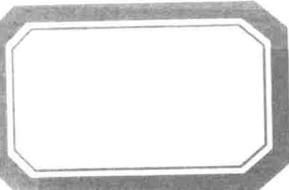
(第二版)

胡寿松 主编



科学出版社





“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
《自动控制原理》立体化教材

自动控制原理习题解析

(第二版)

胡寿松 主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书为胡寿松教授主编的教材《自动控制原理(第六版)》的学习指导性教学配套用书,兼容胡寿松教授主编的《自动控制原理(第五版)》。本书系统地给出了《自动控制原理(第六版)》中全部 260 道习题的详解,这些习题包含了概念题、基本题、证明题、工程应用题、MATLAB 题、设计题和难题等七类题型。

本书在习题解析过程中给出了解题思想的友情提示,指明解题过程的注意事项,其解题步骤科学、完善,且一题多解,以便相互校核;特别是在对绝大多数习题的解析过程中给出了相应的 MATLAB 验证程序,便于研究参数的不同选择对系统性能的影响,以选取最佳参数,从而丰富解题内容,可进一步升华读者对控制理论的掌握和应用。书中附赠的《MATLAB 辅助分析与设计软件 1.2》光盘,不但便于读者使用,而且给任课教师提供了生成数量不限的习题的题库功能,便于教师因人施教。

本书可作为自动控制、工业自动化、电气自动化、仪表及测试、机械及动力自动化等专业自动控制原理(含经典控制理论和现代控制理论)课程的教学配套教材,亦可供广大考研人员和从事自动控制类的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理习题解析/胡寿松主编. —2 版. —北京:科学出版社,2013. 1
“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材·《自动控制原理》立体化教材
ISBN 978-7-03-036555-2

I. ①自… II. ①胡… III. ①自动控制理论—高等学校—题解 IV. ①TP13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 017622 号

责任编辑:匡 敏 马长芳 刘俊来 / 责任校对:陈玉凤

责任印制:闫 磊 / 封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 6 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2013 年 1 月第 二 版 印张:25

2013 年 1 月第八次印刷 字数:645 000

定价:49.00 元(含光盘)

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

本书是与胡寿松教授主编的教材《自动控制原理(第六版)》(科学出版社)配套的学习指导性教学用书,兼容胡寿松教授主编的教材《自动控制原理(第五版)》(科学出版社)。

为了满足广大读者学习和掌握自动控制技术的需求,同时也是为了杜绝众多强行与胡寿松主编《自动控制原理》配套的错误百出的所谓“三导”习题解答对读者的错误导向,我们编撰了这一本习题解析,以正视听。

本书系统地给出了《自动控制原理(第六版)》一书中全部习题的详解,这些习题包含了概念题、基本题、证明题、工程应用题、MATLAB 题、设计题和难题等七类题型。在习题解析过程中*,给出了解题指导思想的友情提示,且在科学、完善的解答后,给出求解的 MATLAB 文本,这不但便于核实运算结果的正确性,而且便于修改参数,完善控制系统设计性能。本书图文并茂,可使读者进一步升华对控制理论的掌握和应用。书中附赠《MATLAB 辅助分析与设计软件 1.2》光盘,以利于教和学。

本书强化了理论联系实际的举措,紧密结合工程应用,其中设计及应用习题涉及多个应用领域。在民用工业控制方面,有双摆系统建模、机器人关节指向控制、造纸系统张力控制、机械爪系统性能分析、打磨机器人参数选择、热轧机控制、自动化高速公路系统、汽车点火系统调节、机器人双手协调控制、运动场摄像机移动控制、磁悬浮系统分析、汽车悬架系统控制等;在航空航天方面,有宇航员机动控制、飞机横滚控制、垂直起飞飞机稳定性分析、火星漫游车导向控制、空间站方位控制、变质量民航机控制、航天飞机机械臂控制、空间机器人控制、卫星回收系统参数选择、空间站柔性臂控制、太阳黑子观测系统控制、空间机器人的内模控制等;在船舶工业方面,有船舶航向控制、游船消摆控制等;在生物医疗保健方面,有城市生态系统建模、医用激光操纵系统控制、医用麻醉系统参数选择、电动轮椅速度控制等。众多的工程应用,可使读者开阔眼界,扩大专业知识领域。

我们相信,通过学习和应用本书,读者一定會在定性分析能力、定量计算能力、综合运用能力、MATLAB 编程能力以及数形结合能力等方面,得到进一步提高。

本书由南京航空航天大学胡寿松教授主编。在本书编著过程中,得到了陶洪峰、张军峰、张敏、孙新柱、何亚群、刘亚、王源、徐德友、杜贞斌、张正道、侯霞、蔡俊伟、许洁、袁侃、张绍杰、夏莹、黄红梅、胥霜霞、黄小波、刘春生、丁勇、陈复扬、王凤如、王从庆等的支持和协助,在此深致谢忱。

对于本书存在的疏漏和不妥之处,恳请广大读者不吝指正。

胡寿松

2012 年 12 月

* 本书各章题目中的图号同于主教材《自动控制原理(第六版)》,而解题过程中出现的图,其图号以题排序。

目 录

前言

第一章	自动控制的一般概念.....	1
第二章	控制系统的数学模型.....	8
第三章	线性系统的时域分析法	38
第四章	线性系统的根轨迹法	83
第五章	线性系统的频域分析法.....	134
第六章	线性系统的校正方法.....	177
第七章	线性离散系统的分析与校正.....	219
第八章	非线性控制系统分析.....	255
第九章	线性系统的状态空间分析与综合.....	300
第十章	动态系统的最优控制方法.....	359
参考文献		393

第一章 自动控制的一般概念

1-1 图 1-21 是液位自动控制系统原理示意图。在任意情况下,希望液面高度 c 保持不变,试说明系统工作原理并画出系统方块图。

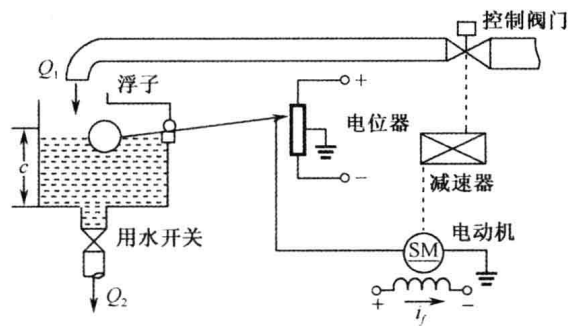


图 1-21 液位自动控制系统原理图

解 本题研究液位自动控制系统工作原理,并绘制相应的系统方块图。

当电位器电刷位于中点位置时,电动机不动,控制阀门有一定的开度,使水箱中流入水量与流出水量相等,从而液面保持在希望高度 c 上。一旦流入水量或流出水量发生变化,水箱液面高度 c 便相应变化。例如,当液面升高时,浮子位置亦相应升高,杠杆作用使电位器电刷从中点位置下移,从而给电动机提供一定的控制电压,驱动电动机通过减速器减小阀门开度,使进入水箱的流量减少。此时,水箱液面下降,浮子位置相应下降,直到电位器电刷回到中点位置,系统重新处于平衡状态,液面恢复给定高度。反之,若水箱液位下降,则系统会自动增大阀门开度,加大流入水量,使液位升到给定高度 c 。

液位自动控制系统原理方块图如图 1-1-1 所示。

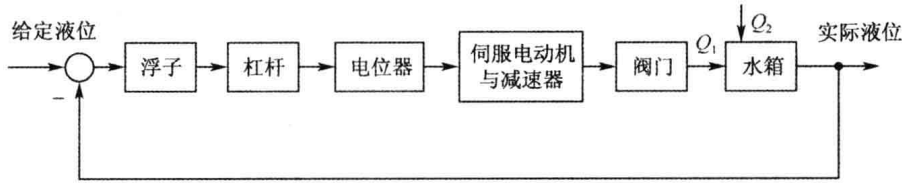


图 1-1-1 液位自动控制系统方块图

1-2 图 1-22 是仓库大门自动控制系统原理图。试说明系统自动控制大门开闭的工作原理并画出系统方块图。

解 本题研究位置控制系统工作原理以及相应系统方块图的绘制。

当合上开门开关时,电位器桥式测量电路产生一个偏差电压信号。此偏差电压经放大器放大后,驱动伺服电动机带动绞盘转动,使大门向上提起。与此同时,与大门连在一起的电位器电刷上移,使桥式测量电路重新达到平衡,电动机停止转动,开门开关自动断开。反

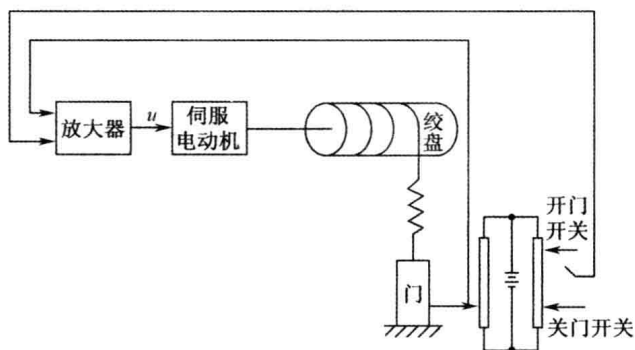


图 1-22 仓库大门自动控制系统原理图

之,当合上关门开关时,伺服电动机反向转动,带动绞盘转动使大门关闭,从而实现了远距离自动控制大门开启的要求。

仓库大门自动控制系统原理方块图如图 1-2-1 所示。

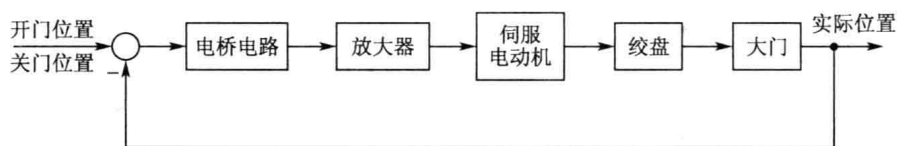


图 1-2-1 仓库大门自动控制系统方块图

1-3 图 1-23(a)和(b)均为自动调压系统。设空载时,图(a)和图(b)的发电机端电压均为 110V。试问带上负载后,图(a)和图(b)中哪个系统能保持 110V 电压不变? 哪个系统的电压会稍低于 110V? 为什么?

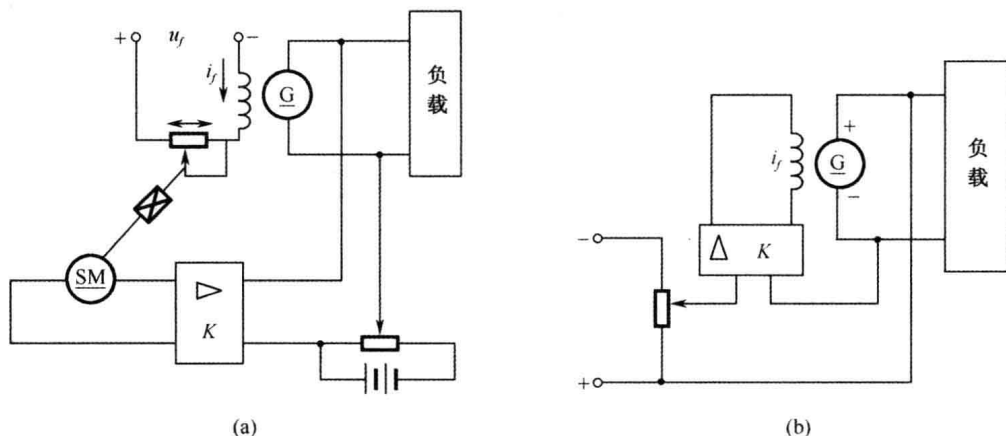


图 1-23 自动调压系统

解 本题通过自动调压系统工作原理的分析,使学生学会区分有差系统 and 无差系统。

系统带上负载以后,图 1-23(a)和(b)两个系统的端电压均会下降。但是图 1-23(a)中的系统由于自身调压作用能够恢复到 110V,而图 1-23(b)中的系统不能够恢复到 110V,其

端电压将稍低于 110V。

对于图 1-23(a)中的自动调压系统,当发电机两端电压低于给定电压时,其偏差电压经放大器放大使伺服电机 SM 转动,经减速器带动电刷,使发电机的激磁电流增大,提高发电机 G 的端电压,从而使偏差电压减小,直到偏差电压为零,致使伺服电机停止转动。因此,图 1-23(a)中的自动调压系统能保持端电压 110V 不变。

对于图 1-23(b)中的自动调压系统,当发电机两端电压低于给定电压时,其偏差电压直接经放大器使发电机的激磁电流增大,提高发电机的端电压,即发电机 G 的端电压回升,此时偏差电压减小,但偏差电压始终不能为零,因为当偏差电压为零时,激磁电流也为零,发电机不能工作。因此,图 1-23(b)中的自动调压系统端电压会低于 110V。

1-4 图 1-24 为水温控制系统原理示意图。冷水在热交换器中由通入的蒸汽加热,从而得到一定温度的热水。冷水流量变化用流量计测量。试绘制系统方块图,并说明为了保持热水温度为期望值,系统是如何工作的? 系统的被控对象和控制装置各是什么?

解 本题通过温度控制系统工作原理的分析,使学生掌握系统方块图的绘制方法,并正确区分被控对象和控制装置。

水温控制系统的方块图如图 1-4-1 所示。

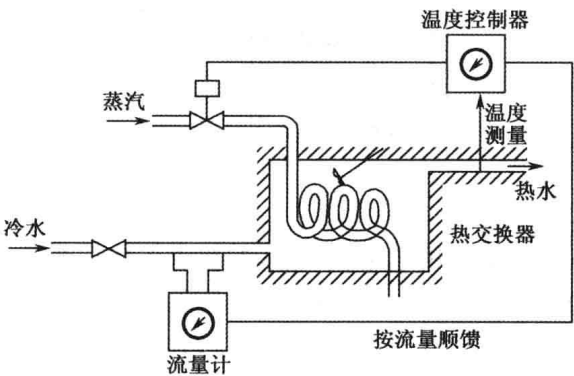


图 1-24 水温控制系统原理图

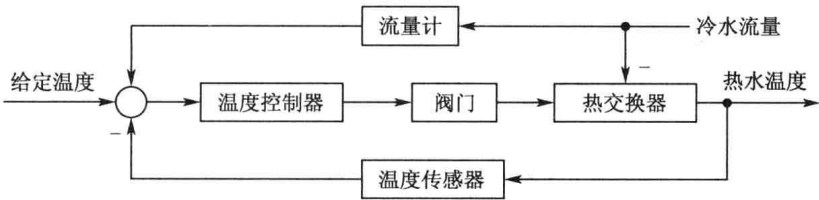


图 1-4-1 水温控制系统方块图

水温控制系统是复合控制系统,它的控制方式是把按偏差的闭环控制与按扰动补偿的顺馈控制结合起来。

采用温度负反馈,由温度控制器对热水温度进行自动控制。若热水温度过高,控制器使阀门关小,减小蒸汽量,热水温度回到给定值。冷水流量是主要扰动量,用流量计测量扰动信号,将其送到控制器输入端,进行扰动顺馈补偿。当冷水流量减少时,补偿量减小,通过温度控制器使阀门关小,蒸汽量减少,以保持热水温度恒定。

系统的被控对象是热交换器,被控量是热水温度,控制装置是温度控制器。

1-5 图 1-25 是电炉温度控制系统原理示意图。试分析系统保持电炉温度恒定的工作过程,指出系统的被控对象、被控量以及各部件的作用,最后画出系统方块图。

解 本题以炉温控制系统为例,要求通过工作原理分析,绘制系统方块图,并明确系统组成。

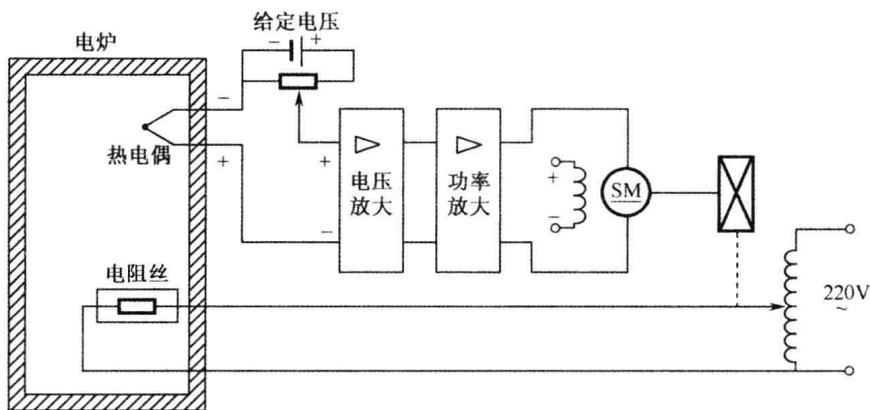


图 1-25 电炉温度控制系统原理图

电炉使用电阻丝加热,并要求保持炉温恒定。图中采用热电偶来测量炉温并将其转换为电压信号,将测量得到的电压信号反馈到输入端,与给定电压信号反极性连接,实现负反馈。二者的差值称为偏差电压,它经电压放大和功率放大后驱动直流伺服电动机。电动机经减速器带动调压变压器的可动触头,改变电阻丝的供电电压,从而调节炉温。

当炉温偏低时,测量电压 u 小于给定电压 u_0 ,二者比较的偏差电压为 $\Delta u = u_0 - u$ 。由于 Δu 为正,电动机“正”转,使调压器的可动触头上移,电阻丝的供电电压增加,电流加大,炉温上升,直至炉温升至给定值为止。此时, $u = u_0$, $\Delta u = 0$,电动机停止转动,炉温保持恒定。

当炉温偏高时, Δu 为负,经放大后使电动机“反”转,调压器的可动触头下移,使供电电压减小,直至炉温等于给定值为止。

系统的被控对象是电炉,被控量是电炉炉温,伺服电动机、减速器、调压器是执行机构,热电偶是检测元件。

电炉温度控制系统的方块图如图 1-5-1 所示。

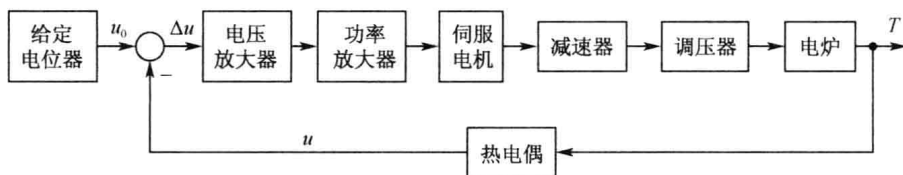


图 1-5-1 电炉温度控制系统方块图

1-6 图 1-26 是自整角机随动系统原理示意图。系统的功能是使接受自整角机 TR 的转子角位移 θ_o 与发送自整角机 TX 的转子角位移 θ_i 始终保持一致。试说明系统是如何工作的,并指出被控对象、被控量以及控制装置各部件的作用并画出系统方块图。

解 本题以角度随动系统为例,要求分析系统工作原理,绘出系统方块图,并明确系统组成。

发送自整角机的转子与给定轴(主动轴)相连;接收自整角机的转子与负载轴(从动轴)相连。TX 与 TR 组成角差测量电路。若发送自整角机的转子离开平衡位置转过一个角度 θ_i ,则在接收自整角机转子的单相绕组上将感应出一个偏差电压 u_e ,它是一个振幅为 u_{em} 、频率与发送自整角机激磁频率相同的交流调幅电压,即

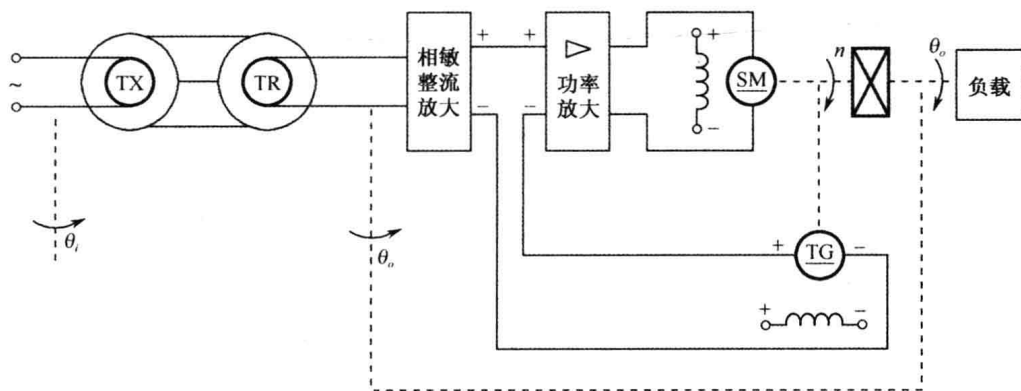


图 1-26 自整角机随动系统原理图

$$u_e = u_{en} \sin \omega t$$

在一定范围内, u_{en} 正比于 $\theta_i - \theta_o$, 即 $u_{en} = k_e (\theta_i - \theta_o)$, 其中 k_e 为自整角机传递系数, 所以可得

$$u_e = k_e (\theta_i - \theta_o) \sin \omega t$$

上式为随动系统中接收自整角机所产生的偏差电压的表达式, 它是一个振幅随角偏差 ($\theta_i - \theta_o$) 的改变而变化的交流电压。因此, u_e 先经过相敏整流放大器变为直流电压, 再经过功率放大器放大, 放大后的直流信号作用在伺服电动机电枢两端。电动机通过减速器带动负载和接收自整角机的转子, 使其跟随发送自整角机的转子旋转, 实现 $\theta_o = \theta_i$, 以达到跟随的目的。为了使电动机转速恒定、平稳, 引入了测速负反馈。

系统的被控对象是负载轴, 被控量是负载轴转角 θ_o , 电动机和减速器是执行机构, 相敏整流放大器与功率放大器起着放大信号的作用, 测速发电机是检测反馈元件, 用以改善系统性能。

自整角机随动系统的方块图如图 1-6-1 所示。

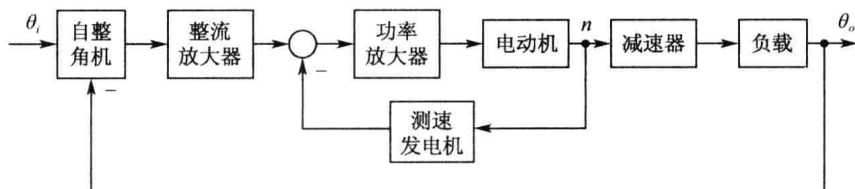


图 1-6-1 自整角机随动系统方块图

1-7 在按扰动控制的开环控制系统中, 为什么说一种补偿装置只能补偿一种与之相应的扰动因素? 对于图 1-6 按扰动控制的速度控制系统, 当电动机的激磁电压变化时, 转速如何变化? 该补偿装置能否补偿这个转速的变化?

解 本题研究按扰动控制的开环控制系统的工作原理。

按扰动控制的开环控制系统, 是利用可测量的扰动量产生一种补偿作用, 以减小或抵消扰动对输出的影响。显然, 这种控制方式是直接从扰动取得信息, 并以此改变被控量, 所以它只适用于扰动是可测量的场合, 而且一个补偿装置只能补偿一种扰动因素, 对其余扰动

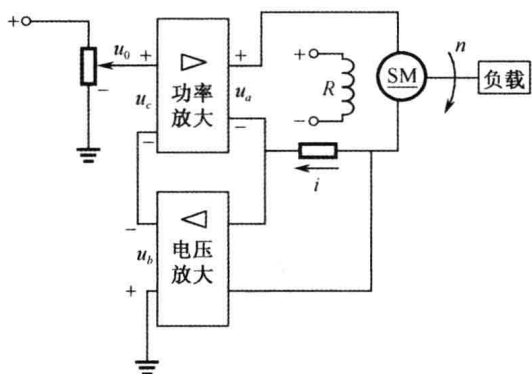


图 1-6 按扰动控制的速度控制系统

加水过程中,谷物流量、加水前谷物湿度以及水压都是对谷物湿度控制的扰动作用。为了提高控制精度,系统中采用了谷物湿度的顺馈控制,试画出系统方块图。

解 本题要求掌握自动控制系统方块图的绘制方法。

该谷物湿度控制系统是一个按扰动补偿的复合控制系统,如图 1-27 所示。被控对象是传送装置,被控量是输出谷物的湿度,输入量是希望的谷物湿度。谷物湿度控制系统的方块图如图 1-8-1 所示。

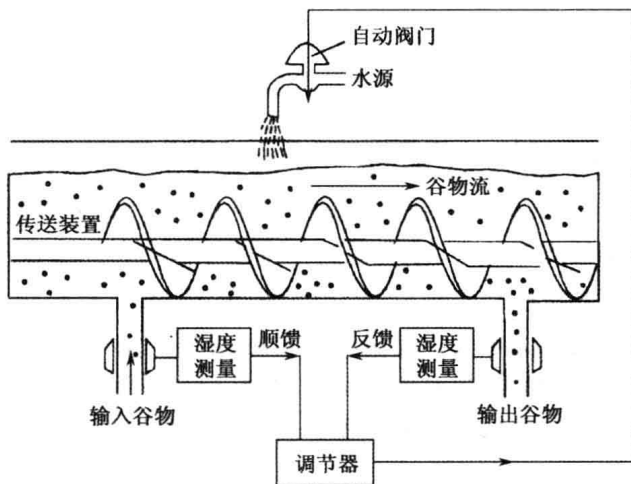


图 1-27 谷物湿度控制系统原理图

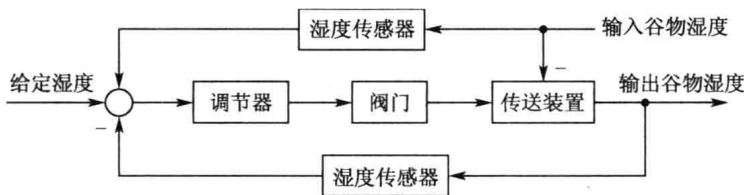


图 1-8-1 谷物湿度控制系统方块图

1-9 图 1-28 为数字计算机控制的机床刀具进给系统。要求将工件的加工任务编制成程序预先存入数字计算机。加工时,步进电动机按照计算机给出的信息动作,完成加工任务。试说明该系统的工作原理。

解 本题研究按给定量控制的开环控制系统的工作原理。

数字计算机控制的机床刀具进给系统是一开环控制系统,被控对象是刀具,被控量是刀具位置,给定量是程序设定的刀具位置。该系统的工作原理是,先由计算机将预先编好的加工过程控制程序转换为控制 X 、 Y 、 Z 三个方向运动的电脉冲信号,然后经过脉冲分配与功率放大,将放大后的信号输入到步进电动机,由步进电动机来控制刀具与工件的相对运动位

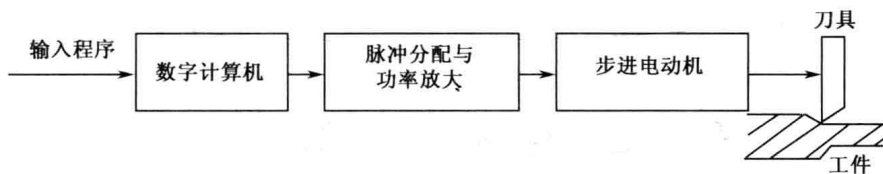


图 1-28 机床刀具进给系统

置,保证刀尖的运动轨迹符合工件的轮廓形状,这样就可加工出所要求的零件。

1-10 下列各式是描述系统的微分方程,其中 $c(t)$ 为输出量, $r(t)$ 为输入量,试判断哪些是线性定常或时变系统,哪些是非线性系统。

- (1) $c(t) = 5 + r^2(t) + t \frac{d^2 r(t)}{dt^2}$;
- (2) $\frac{d^3 c(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 6 \frac{dc(t)}{dt} + 8c(t) = r(t)$;
- (3) $t \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) + 3 \frac{dr(t)}{dt}$;
- (4) $c(t) = r(t) \cos \omega t + 5$;
- (5) $c(t) = 3r(t) + 6 \frac{dr(t)}{dt} + 5 \int_{-\infty}^t r(\tau) d\tau$;
- (6) $c(t) = r^2(t)$;
- (7) $c(t) = \begin{cases} 0, & t < 6, \\ r(t), & t \geq 6. \end{cases}$

解 本题研究自动控制系统的分类。

可用线性微分方程或差分方程描述的系统,称为线性系统。如果微分方程或差分方程的系数全为常数,则称为线性定常系统;否则称为线性时变系统。

用非线性方程描述的系统称为非线性系统。非线性方程的特点是系数与变量有关,或者方程中含有变量及其导数的高次幂或乘积项。

基于以上定义,可得:

- (1) 非线性时变系统;
- (2) 线性定常系统;
- (3) 线性时变系统;
- (4) 非线性时变系统;
- (5) 线性定常系统(将方程两边同时求导);
- (6) 非线性定常系统;
- (7) 线性延迟系统。

第二章 控制系统的数学模型

2-1 在图 1-21 的液位自动控制系统中,设容器横截面积为 F ,希望液位为 c_0 。若液体高度变化率与液体流量差 $Q_1 - Q_2$ 成正比,试列写以液位为输出量的微分方程式。

解 本题研究建立液位控制系统的微分方程数学模型。

当 $Q_1 = Q_2$ 时,液位的高度为 c_0 ;当 $Q_1 \neq Q_2$ 时,液位的高度 c 将发生变化。

由于液体高度变化率与液体流量差 $Q_1 - Q_2$ 成正比,所以有

$$F \frac{dc}{dt} = Q_1 - Q_2$$

则以液位为输出量的微分方程式为

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{F} (Q_1 - Q_2)$$

2-2 设机械系统如图 2-47 所示,其中 x_i 是输入位移, x_o 是输出位移。试分别写出各系统的微分方程。

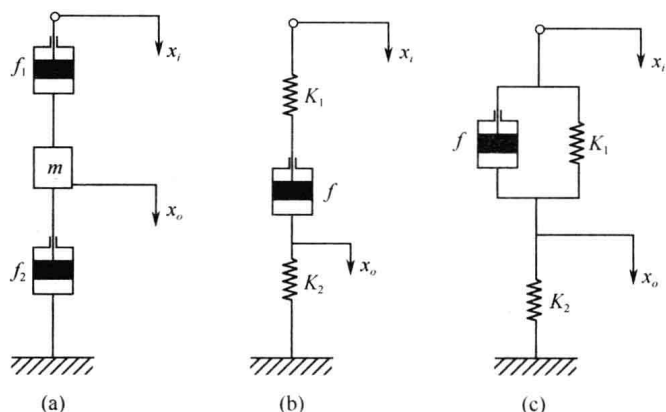


图 2-47 机械系统

解 本题研究建立机械系统的微分方程数学模型。

(1) 对于图 2-47(a)所示系统,根据力平衡方程,在不计重力时,可得

$$f_1(\dot{x}_i - \dot{x}_o) - f_2\dot{x}_o = m\ddot{x}_o$$

则系统的微分方程式为

$$m \frac{d^2 x_o}{dt^2} + (f_1 + f_2) \frac{dx_o}{dt} = f_1 \frac{dx_i}{dt}$$

(2) 对于图 2-47(b)所示系统,在上部分弹簧与阻尼器之间取辅助点 A,并设 A 点位移为 x ,方向向下。根据力平衡方程,在不计重力时,可得方程

$$K_1(x_i - x) = f(\dot{x} - \dot{x}_o)$$

$$K_2 x_o = f(\dot{x} - \dot{x}_o)$$

消去中间变量 x ,由于

$$K_2 x_o = K_1 (x_i - x), \quad x = x_i - \frac{K_2}{K_1} x_o, \quad \dot{x} = \dot{x}_i - \frac{K_2}{K_1} \dot{x}_o$$

故有 $K_1 K_2 x_o = K_1 f \dot{x} - K_1 f \dot{x}_o = f K_1 \dot{x}_i - f K_1 \dot{x}_o - f K_2 \dot{x}_o$

则系统的微分方程式为

$$f(K_1 + K_2) \frac{dx_o}{dt} + K_1 K_2 x_o = K_1 f \frac{dx_i}{dt}$$

(3) 对于图 2-47(c) 所示系统, 根据力平衡方程, 在不计重力时, 可得

$$K_1 (x_i - x_o) + f(\dot{x}_i - \dot{x}_o) = K_2 x_o$$

则系统的微分方程式为

$$f \frac{dx_o}{dt} + (K_1 + K_2) x_o = f \frac{dx_i}{dt} + K_1 x_i$$

2-3 试证明图 2-48(a) 的电网络与图 2-48(b) 的机械系统有相同的数学模型。

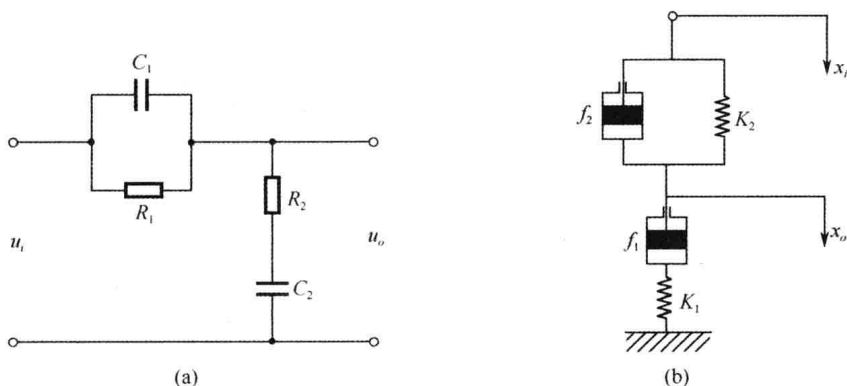


图 2-48 电网络与机械系统

解 本题研究用拉氏变换法建立系统的传递函数数学模型。

(1) 对于图 2-48(a), 根据复数阻抗的方法可得电网络的传递函数为

$$\begin{aligned} G_u(s) &= \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{\frac{R_1 \cdot \frac{1}{C_1 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} + \left(R_2 + \frac{1}{C_2 s}\right)} \\ &= \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2)s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1} \end{aligned}$$

(2) 对于图 2-48(b), 在弹簧 K_1 和阻尼器 f_1 之间引入辅助点, 设其位移为 x , 方向向下。根据力平衡方程, 在不计重力时, 可得

$$K_2 (x_i - x_o) + f_2 (\dot{x}_i - \dot{x}_o) = f_1 (\dot{x}_o - \dot{x}), \quad K_1 x = f_1 (\dot{x}_o - \dot{x})$$

对上述两式进行拉氏变换, 考虑初始条件为零, 可得

$$K_2 X_i(s) - K_2 X_o(s) + f_2 \cdot s X_i(s) - f_2 \cdot s X_o(s) = f_1 \cdot s X_o(s) - f_1 \cdot s X(s)$$

$$K_1 X(s) = f_1 \cdot s X_o(s) - f_1 \cdot s X(s)$$

消去中间变量 $X(s) = \frac{f_1 s}{K_1 + f_1 s} X_o(s)$, 有

$$(K_2 + f_2 s)X_i(s) = \left(K_2 + f_2 s + \frac{K_1 f_1 s}{K_1 + f_1 s}\right)X_o(s)$$

则机械系统的传递函数为

$$\begin{aligned} G_b(s) &= \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{f_1 f_2 s^2 + (K_1 f_2 + K_2 f_1)s + K_1 K_2}{f_1 f_2 s^2 + (K_1 f_2 + K_2 f_1 + K_1 f_1)s + K_1 K_2} \\ &= \frac{\frac{f_1 f_2}{K_1 K_2} s^2 + \left(\frac{f_1}{K_1} + \frac{f_2}{K_2}\right)s + 1}{\frac{f_1 f_2}{K_1 K_2} s^2 + \left(\frac{f_1}{K_1} + \frac{f_2}{K_2} + \frac{f_1}{K_2}\right)s + 1} \end{aligned}$$

通过比较 $G_a(s)$ 、 $G_b(s)$ 可知:两传递函数的类型相同,即图 2-48(a)的电网络与图 2-48(b)的机械系统有相同的数学模型。

2-4 试分别列写图 2-49 中各无源网络的微分方程式。

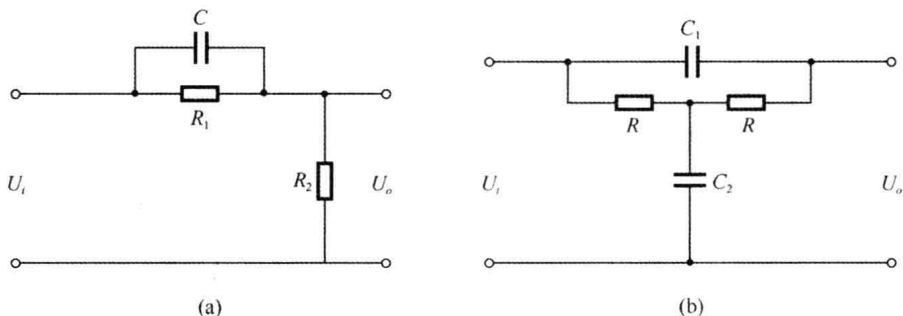


图 2-49 无源网络

解 本题研究网络数学模型的建立方法。

(1) 对于图 2-49(a)所示的无源网络,设通过电阻 R_1 的电流为 i_1 (方向自左向右),通过电容 C 的电流为 i_2 (方向自左向右),通过电阻 R_2 的电流为 i (方向自上向下),根据电压平衡可得

$$\begin{cases} R_1 i_1 = \frac{1}{C} \int i_2 dt \\ u_o = R_2 i = R_2 (i_1 + i_2) \\ u_i = R_1 i_1 + u_o \end{cases}$$

于是
$$i_1 = \frac{u_i - u_o}{R_1}, \quad i_2 = R_1 C \frac{di_1}{dt} = R_1 C \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{d(u_i - u_o)}{dt}$$

从而
$$u_o = R_2 i = R_2 \left[\frac{u_i - u_o}{R_1} + R_1 C \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{d(u_i - u_o)}{dt} \right]$$

整理后可得图 2-49(a)所示的无源网络的微分方程为

$$R_1 R_2 C \frac{du_o}{dt} + (R_1 + R_2) u_o = R_1 R_2 C \frac{du_i}{dt} + R_2 u_i$$

(2) 对于图 2-49(b)所示的无源网络,设通过左侧电阻 R 的电流为 i_1 (方向自左向右),通过右侧电阻 R 的电流为 i_2 (方向自右向左),通过电容 C_1 的电流为 i_2 (方向自左向右),通过电容 C_2 的电流为 i (方向自上向下),根据电压平衡可得

$$\begin{cases} Ri_1 = Ri_2 + \frac{1}{C_1} \int i_2 dt \\ u_i = \frac{1}{C_1} \int i_2 dt + u_o \\ u_o = Ri_2 + \frac{1}{C_2} \int i dt \end{cases}$$

于是
$$i_1 = i_2 + \frac{1}{RC_1} \int i_2 dt, \quad i_2 = C_1 \frac{d(u_i - u_o)}{dt}$$

从而
$$\frac{du_o}{dt} = R \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} i$$

又因为 $i = i_1 + i_2$, 则

$$\frac{du_o}{dt} = R \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \left[i_2 + \frac{1}{RC_1} \int i_2 dt + C_1 \frac{d(u_i - u_o)}{dt} \right]$$

即
$$\frac{du_o}{dt} = RC_1 \frac{d^2(u_i - u_o)}{dt^2} + \frac{1}{C_2} \left[\frac{u_i - u_o}{R} + 2C_1 \frac{d(u_i - u_o)}{dt} \right]$$

整理后可得图 2-49(b)所示的无源网络的微分方程

$$R^2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_o}{dt^2} + R(2C_1 + C_2) \frac{du_o}{dt} + u_o = R^2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_i}{dt^2} + 2RC_1 \frac{du_i}{dt} + u_i$$

2-5 设初始条件为零, 试用拉氏变换法求解下列微分方程式, 并概略绘制 $x(t)$ 曲线, 指出各方程式的模式。

(1) $2\dot{x}(t) + x(t) = t$;

(2) $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t)$;

(3) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 1(t)$ 。

解 本题考察用拉氏变换法求解线性定常微分方程。

(1) $2\dot{x}(t) + x(t) = t$ 。由拉氏变换可得

$$X(s) = \frac{1}{s^2(2s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{2}{s+0.5}$$

由拉氏反变换可得

$$x(t) = t - 2 + 2e^{-0.5t}$$

由 $x(t)$ 的表达式易得系统的特征根为 $\lambda = -0.5$, 故该方程的运动模式为 $e^{-0.5t}$ 。因此, $x(t)$ 曲线如图 2-5-1 所示。

(2) $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t)$ 。由拉氏变换可得

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{(s + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}$$

由拉氏反变换可得

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-0.5t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t = 1.155 e^{-0.5t} \sin(0.866t)$$

由 $x(t)$ 的表达式易得系统的特征根为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故该方程的运动模态为 $e^{-0.5t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$ 。因此, $x(t)$ 曲线如图 2-5-2 所示。

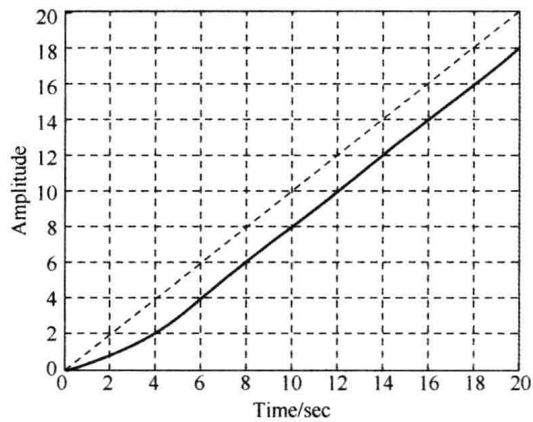


图 2-5-1 单位斜坡响应曲线

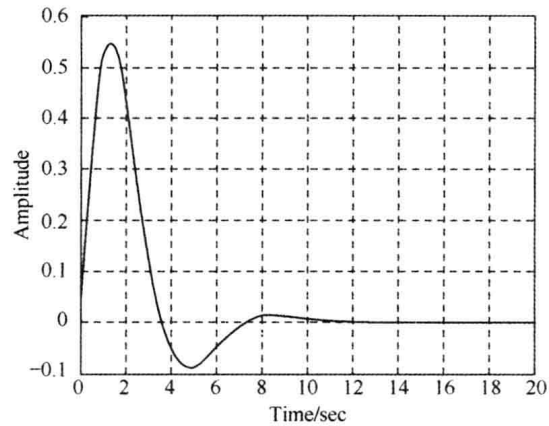


图 2-5-2 单位脉冲响应曲线

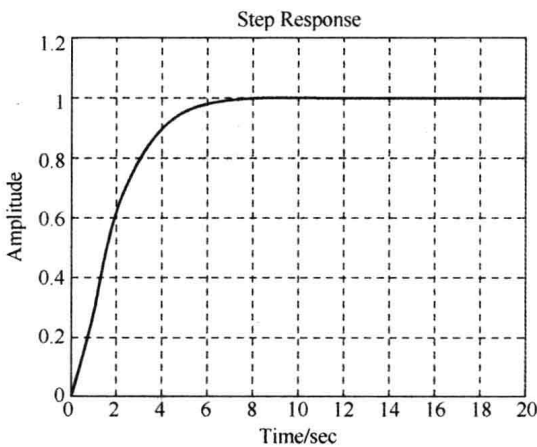


图 2-5-3 单位阶跃响应曲线

(3) $\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+x(t)=1(t)$ 。由拉氏变换可得

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s(s^2+2s+1)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

则由拉氏反变换可得

$$x(t)=1-te^{-t}-e^{-t}$$

由 $x(t)$ 的表达式易得系统的特征根为

$$\lambda_{1,2}=-1$$

故该方程的运动模态为 te^{-t} , e^{-t} 。因此, $x(t)$ 曲线如图 2-5-3 所示。

2-6 在液压系统管道中,设通过阀门的流量 Q 满足流量方程

$$Q=K\sqrt{P}$$

式中, K 为比例系数; P 为阀门前后的压差。若流量 Q 与压差 P 在其平衡点 (Q_0,P_0) 附近作微小变化,试导出线性化流量方程。

解 本题考察流量非线性微分方程的线性化,具体做法是,对非线性微分方程在其平衡点附近用泰勒级数展开并取前面的线性项,得到等效的线性化方程。

在平衡点 (Q_0,P_0) 处,对流量 Q 泰勒展开并取一次项近似可得

$$Q\approx Q_0+\dot{Q}\Big|_{\substack{Q=Q_0\\P=P_0}}(P-P_0)=Q_0+\frac{K}{2\sqrt{P_0}}(P-P_0)$$

则线性化流量方程为

$$\Delta Q=\frac{K}{2\sqrt{P_0}}\Delta P$$