金榜®版高等学校教材同步辅导系列

配高教社《高等数学》（第六版）下册 同济大学数学系 编

高等数学

同步辅导与课后习题详解

下册 同济 第六版

金榜教学与研究专家委员会/编审

中国科学院 车颖涛 朱媛/主编

杨渊伦/副主编

吉林大学出版社

金榜®版高等学校教材同步辅导系列

高等数学

同步辅导与课后习题详解

—— 下册 同济 第六版 ——

金榜教学与研究专家委员会/编审

中国科学院 车颍涛 朱媛/主编

杨渊伦/副主编

金榜教学与研究专家委员会成员：（排名不分先后）

车颍涛	朱 媛	常利利	戴银云	于 永	鲁秀梅	孙明彦
谷 彬	廖明凯	丁常宏	宫江雷	吴 丹	申 晶	刘小寒
李学常	张 杰	项 璐	阮俊杰	盛少辉	刘慧斌	江 玲
李 岑	杨 舟	黄 飞	魏高乐	宋 雷	蒋 瑞	

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导与课后习题详解:同济第6版.下册 / 车颖涛,朱媛主编. —长春:吉林大学出版社,2008.7
(金榜版高等学校教材同步辅导系列)
ISBN 978-7-5601-3882-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①车…②朱… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 101373 号

书名:金榜版高等学校教材同步辅导系列
高等数学同步辅导与课后习题详解 同济第6版 下册
作者:车颖涛 朱媛 主编

责任编辑、责任校对:黄凤新
封面设计:金榜图文设计室
吉林大学出版社出版、发行
北京市后沙峪印刷厂 印刷
开本:880×1230 毫米 1/32
2008年7月 第1版
印张:297.5 字数:7488千字
2008年7月 第1次印刷
ISBN 978-7-5601-3882-4
总定价:567.90元

版权所有 翻印必究

社址:长春市明德路421号 邮编:130021
发行部电话:0431-88499826
网址:http://www.jlup.com.cn
E-mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

前　言

随着近几年大学连续扩招，大学生的就业压力越来越大，社会对高层次、高素质人才的需求倾向也逐步加大。这就要求大学生在学习生活中，必须越来越注重素质的培养和实际能力的提高。因此，大学生对各种基础教材、专业理论教材、教学辅导书、考试用书、工具书等学习用书的需求急剧增加。有鉴于此，我们组织全国多所知名重点大学的专家和教授，依据最新教材，编写了这套大学重点科目辅导系列丛书。本套丛书涉及的学科有数学、物理、力学、化学、电子、电气工程、工程、经济等，基本上覆盖所涉及专业的主干课程和基础课程。我们在编写此系列图书时，一方面坚持对学科内容的覆盖性；另一方面注重因材施教，准确把握不同层次学生的学习要求。

作为一种辅导性教材，本套丛书力求做到有的放矢，恰到好处。体例设计具有如下特色：

1. 知识点概括：每章首先介绍基本理论与方法，尽量避免使用抽象方法，尽可能用简单的方法，做到深入浅出。内容按照基础知识点、重要知识点和疑难知识点进行划分，方便学生对整章内容进行整体性地把握。

2. 易考题型解析及解题技巧总结：在此部分，我们列举了大量难度不等的易考常考题型，并针对每种题型给出解题思路和解题技巧，对学生的学习有着很强的启发性，能够帮助学生开阔思路、活跃思维、举一反三、触类旁通。书中例题都非常新颖，有着实际工程应用背景，很有参考价值，一改国内教材习题大同小异的弊病。

3. 课后习题详解：完全针对最经典教材最新版本的课后习题给予解答。解答过程中力求做到概念清晰、步骤完整、数据准确、附图齐全，必要时给以恰当的评注，更有助于学生深入思考以及远离解题误区。

由于编者水平有限，本书难免会有疏漏之处，恳请广大读者朋友批评指正。

联系我们：中国考试培训网 www.julian.com.cn。

编　者

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第八章　空间解析几何与向量代数

一、知识点概括

（一）基础知识点

1. 量的分类

$\begin{cases}\text{标量：仅由大小就能确定的量，例：时间、路程等；}\\ \text{向量：既有大小又有方向的向量，例：力、速度、加速度等.}\end{cases}$

2. 向量的概念及定义

(1) 向量的模：向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小，记为 $|\boldsymbol{a}|$.

(2) 零向量：模为零的向量，记为 $\mathbf{0}$，方向是任意的.

(3) 单位向量：模为 1 的向量；与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记为 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

(4) 负向量：与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等，方向相反的向量记为 $-\boldsymbol{a}$.

(5) 向量相等：若两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 大小相等且方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

(6) 向量的夹角：设有两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，任意取空间一点 O，作 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{b}$，规定不超过 π 的 $\angle AOB$（设 $\angle AOB=\varphi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi$）称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$，即 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$.

①$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 π，称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

②$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

【注】 ① 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 到 π 之间任意取值；

② 零向量与任何向量都平行，与任何向量都垂直.

(7) 向量共线：将两个向量的起点，放在一起，若终点和公共起点在一条直线上，则称两向量共线，即两向量平行，也称两向量共线.

(8) 向量共面：有三个或三个以上向量，当它们的起点放在同一点时，如果终点与公共起点在一个平面上，则称这些向量共面.

3. 向量的坐标表达式

(1) 设 $M(x,y,z)$ 为空间直角坐标中任一点，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为三个坐标轴上

的单位矢量,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

(2) 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$$

若记 $\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

则 $\boldsymbol{e}_a=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}$,且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

其中 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

(3) 设 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间直角坐标系中的两点,则有

$$\overrightarrow{MM_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.$$

$$\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.$$

$$\cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.$$

4. 向量的运算及其性质

(1) 向量的加法

① 平行四边形法则当两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,将向量起点平移至 A 点,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB,AD 为边作一平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC,向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 4－1 所示.

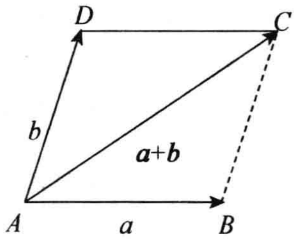

图 4－1

② 三角形法则将向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 首尾相接,则以第一个向量的起点为起点,第二个向量的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$,就是 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和向量,如图 4－2.

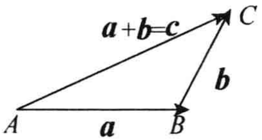

图 4－2

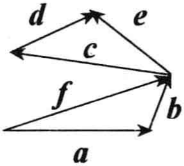

图 4－3

此方法可以推广到多个向量求和运算如图 4－3 所示. $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}$

③ 向量的加法符合下列运算规律：

交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(2) 向量的减法

将向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点平移至 O 点处，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点，$\boldsymbol{b}$ 的终点为起点的向量为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，类似地可定义$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，如图 4－4 所示.

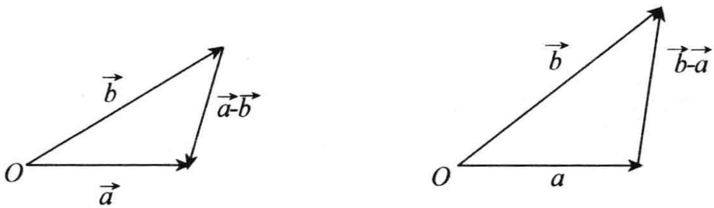

图 4－4

【注】 ① 由向量加减法的定义及三角形的性质得到三角形不等式：

$$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

② 向量加减法的坐标表示：设空间直角坐标系中有两个向量

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=\{x_1,y_1,z_1\}$$

$$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}=\{x_2,y_2,z_2\}$$

则 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}$.

(3) 数乘

① 定义：向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，大小为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 平行，当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向，当 $\lambda=0$ 时，为零向量，方向任意.

即
$$\lambda\boldsymbol{a}=\begin{cases}|\lambda\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e}_a & m>0\\ 0 & m=0\\ -|\lambda\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e}_a & m<0\end{cases}$$

② 坐标表示：设 $\boldsymbol{a}\{x,y,z\}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x,\lambda y,\lambda z\}$.

③ 数乘运算符合下列运算规律：结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

④ 定理：设向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}\Leftrightarrow$ 存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

(4) 向量的数量积

① 定义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

② 坐标表达式：设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

③ 数量积的运算规律：

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\lambda$ 为数.

(5) 向量的向量积：

① 定义　大小：设向量 $\boldsymbol{c}$ 由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式给出：

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

方向：$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所确定的平面且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 成右手系.

这样 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

② 坐标表达式：设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ 则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

③ 运算规律：

反交换律：$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$　　(λ 为数)

④ 几何意义：向量积的模是以这两个向量为邻边的平行四边形的面积.

(6) 混合积

① 定义：设已知三个向量 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$，如果先作两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，然后与第三个向量 $\boldsymbol{c}$ 再作数量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$，这样得到的数叫做三向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的混合积，记作 $[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

② 坐标表达式：设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\boldsymbol{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$ 则

$$[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}.$$

③ 几何意义：表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为模的平行六面体的体积.

④ 运算规律：轮换对称性：$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}]$.

两向量互换，混合积变号. 即 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}]=-[\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{c}]$.

(7) 向量之间的关系

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\},\boldsymbol{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$

① $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$;

② $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$；如果 x_2,y_2,z_2 中有一个为零，如 $x_2=0$，则 $x_1=0$.

③ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 λ,μ，使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=0$;

④ 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角，可由下式求出：

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}};$$

⑤ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 λ,μ,ν 使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=0$

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 共面}\Leftrightarrow[\boldsymbol{abc}]=0.$$

(8) 投影定理

① 定义：设在已知空间有一轴 u 及一点 M，过点 M 作平面垂直于 u，则平面与轴 u 的交点 M' 叫做点 M 在轴 u 上的投影. 在轴上取一点 O，及与 u 轴同向的单位向量 $\boldsymbol{e}_u$，则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 u 轴上的分量，设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}_u$，则数 λ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 u 轴上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{OM}=\lambda$. 如图 6－1 所示.

② 向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中坐标 a_x,a_y,a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影，即 $a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}$

③ 设有向线段 $\overrightarrow{OM'}$ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在轴 u 上的分量，设 λ 为 $\overrightarrow{OM}$ 在 u 的投影，即 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{OM}=\lambda$

投影定理：$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{OM}=|\overrightarrow{OM}|\cos\varphi=\lambda$，其中 $\varphi=(\widehat{\overrightarrow{OM},u})$.

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{OM'}|\cos\varphi$$
$$=|OM'|\cdot\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{OM}.$$

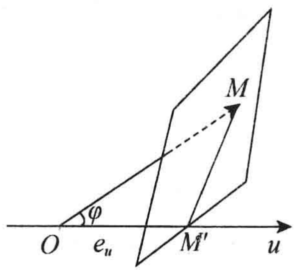

图 6－1

④ 性质：1° $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},u})$;

2° $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$;

3° $\mathrm{Prj}_u|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

(9) 平面方程：

① 一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$

1° 方程中哪个坐标不出现，则该平面就平行于哪个坐标轴；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$2^\circ D=0$ 表示过坐标原点的平面；

3° 当 $A=B=0$ 即 $Cz+D=0$ 表示一个平行于 xOy 面的平面，$Ax+D=0$ 和 $By+D=0$ 分别表示一个平行于 yOz 面和 xOz 面的平面.

② 点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为平面上的已知点，$n=\{A,B,C\}$ 为平面的法向量.

③ 三点式方程：$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$，其中 (x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，(x_3,y_3,z_3) 为平面上三点.

④ 截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，其中 a,b,c 分别为平面在三个坐标轴上的截距.

(10) 直线方程：

① 一般式方程：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

② 对称方程：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 其中 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$ 为直线的方向向量. (x_0,y_0,z_0) 为直线上的已知点.

③ 参数方程：令 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$

则得到参数方程：

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}.$$

④ 两点式方程：

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

其中 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为直线上的两个已知点.

⑤ 平面束方程：过直线 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 的所有平面满足：

$$m(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

或 $m(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

或 $(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$

(11) 曲线方程：

① 空间曲线的一般方程：

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

② 空间曲线的参数方程：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

(12) 曲面方程：

① 球面方程：球心在原点，半径为 R 的球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

球心在(a,b,c) 半径为 R 的球面方程为$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (a-c)^2 = R^2$.

② 柱面方程：$f(x,y) = 0$ 是准线为$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$，母线平行于 z 轴的柱面.

【注】 方程中缺哪个变量，方程表示的就是母线平行于哪个轴的柱面.

③ 旋转面方程：

曲线：$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$绕 x 轴旋转所成的旋转曲面方程为

$$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$$

绕 y 轴旋转所成的旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$.

【注】 旋转曲面的方程就是保留旋转轴，将另外一变量换成除旋转轴变量外的另外两个量平方和再开方加上正负号.

④ 椭球面方程：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

⑤ 单叶双曲面方程：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

⑥ 双叶双曲面方程：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

⑦ 椭圆抛物面方程：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z$.

⑧ 双曲抛物面方程：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm z$.

⑨ 二次锥面方程：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

(13) 平面之间的关系：

设平面 π_1 和 π_2 的方程分别为

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, A_2 x + B_2 y + C_2 z + D = 0$$

则① 平面 $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$；

② 平面 $\pi_1 \not\parallel \pi_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$；

③ 平面 $\pi_1 \parallel \pi_2$ 的夹角 θ，由下式确定：

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

【注】 θ 为平面法向量 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 所夹的锐角.

④ 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(14) 直线之间的关系:

设直线 l_1 和 l_2 的方程分别为

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

则 ① 直线 $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{n_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$;

② 直线 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$;

③ 直线 l_1 与 l_2 的夹角 φ 是方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ 所夹的锐角. $\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$.

④ 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $l: \frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\overrightarrow{M_1P}|}{|\overrightarrow{M_1P}|}=\frac{\left|\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_0-x_1&y_0-y_1&z_0-z_1\\m&n&p\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$ 如图 12-1 所示.

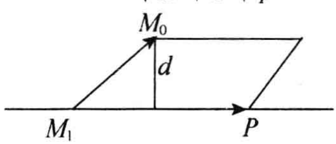

图 12-1

(15) 直线与平面的关系:

设直线 l 和平面 π 的方程分别为

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$

$$A(x-x_2)+B(y-y_2)+C(z-z_2)=0.$$

① 若直线 l 与平面 π 的夹角为 θ, 则 $\sin\theta$

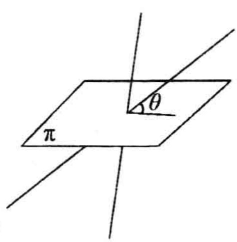

图 13-1

$= \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$，如图 13－1 所示.

② 直线 $l \parallel \pi \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$.

③ 直线 $l \perp \pi \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

(二) 重要知识点

1. 向量的运算(线性运算，数量积，向量积).

2. 单位向量，方向数和方向余弦，向量的坐标表达式的概念，用坐标表达式进行向量运算的方法.

3. 平面方程、直线方程及其求法.

4. 求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

5. 空间曲线的参数方程和一般方程.

6. 空间曲线在坐标面上的投影曲线方程.

(三) 疑难知识点

1. 平面与平面、平面与直线及直线与直线的位置关系.

2. 空间曲线在坐标面上的投影曲线方程.

3. 求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

二、易考题型解析及解题技巧总结

题型 1　向量运算

[1995 年，数一，填空 3] 设 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 2$，则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})] \cdot (\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) =$ __4__ .

【解析】 利用向量的数量积与向量积的分配律，以及混合积性质计算.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= [(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}] \cdot (\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) \\
&= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) \\
&= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \\
&\quad + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} \\
&= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = 2(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) = 2 \times 2 = 4.
\end{aligned}$$

【解题技巧总结】 用到混合积的性质：① 三向量中有两个向量相同时，混合积为 0；② 混合积的轮换性：$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

题型 2　求平面方程

[1996 年，数一，填空 2] 设一平面经过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直，则此平面方程为 __$2x + 2y - 3z = 0$__ .

【解析】 (解法一) 利用两平面垂直的定义及平面标准方程的定义知平面过原点，则平面方程为 $Ax + By + Cz = 0$. 那么法向量 $\boldsymbol{n}_1 = (A,B,C)$ 与 $\boldsymbol{n}_2 =$

$(4,-1,2)$ 垂直.

即 $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 4A - B + 2C = 0$

又 $\because$ 平面过点 $(6,-3,2) \Rightarrow 6A - 3B + 2C = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A - B + 2C = 0 \\ 6A - 3B + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ B = B \\ C = -\dfrac{3}{2}B \end{cases}$$

因此平面方程为 $Bx + By - \dfrac{3}{2}Bz = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 3z = 0$.

(解法二) 过原点及点 $(6,-3,2)$ 的直线方程为 $L: \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{2}$,

直线方程也可写成 $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$

过 L 的所有平面可写成:$\lambda(x + 2y) + \mu(2y + 3z) = 0$

即 $\lambda x + 2(\lambda + \mu)y + 3\mu z = 0$

其中与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直的平面应满足 $(\lambda, 2(\lambda + \mu), 3\mu) \cdot (4, -1, 2) = 0$.

即 $4\lambda - 2(\lambda + \mu) + 6\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -2\mu$,取 $\mu = 1, \lambda = 2$.

可得到平面方程为 $2x + 2y - 3z = 0$.

(解法三) 所求平面 π 过 $O(0,0,0)$ 与 $M_0(6,-3,2)$,其法向量 $\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{OM_0} = (6,-3,2)$;

则 π 垂直于已知平面 $\pi_0: 4x - y + 2z = 8$,它们的法向量也相互垂直 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_0$,$\boldsymbol{n}_0 = (4,-1,2)$.

$$\boldsymbol{n} \parallel \overrightarrow{OM_0} \times \boldsymbol{n}_0 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}.$$

取 $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$,则过 O 点的 π 的方程为 $2x + 2y - 3z = 0$.

(解法四) 设 $M(x,y,z)$ 是所求平面 π 上的任一点,由三向量 $\overrightarrow{OM} = (x,y,z)$,$\overrightarrow{OM_0} = (6,-3,2)$ 以及 $n_0 = (4,-1,2)$ 共面.

有 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ 即平面 π 的方程为 $2x + 2y - 3z = 0$.

【解题技巧总结】 利用平面与平面之间的关系,平面与直线之间的关系来求解此类题型.

(1) 利用平面的标准方程,以及平面的特点利用待定系数法求解.

(2) 利用平面束的方法进行求解.

(3) 利用平面的点法式方程求解,重点是求出平面的法向量.

(4) 共面向量的特性.

题型 3　求直线方程

求经过点 $A(-1,2,3)$ 垂直于直线 $L:\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$ 且与平面 $\pi:7x+8y+9z+10=0$ 平行的直线方程.

【解析】 (解法一) 设直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(A,B,C)$,那么根据题意可知 $\boldsymbol{s}$ 与已知直线的方向向量 $\boldsymbol{s}_0=(4,5,6)$ 垂直,且与平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(7,8,9)$ 垂直.

即 $\begin{cases}4A+5B+6C=0\\7A+8B+9C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=C\\B=-2C\\C=C\end{cases}$　则 $\boldsymbol{s}=(1,-2,1)$

根据直线的点法式方程可得所求的直线方程是 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

(解法二) 两平面的交线来表示直线方程,所求直线在过点 A 以 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 为法向量的平面 π_1 上,也在过点 A 以 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的平面 π_2 上.

$\pi_1:4(x+1)+5(y-2)+6(z-3)=0$

$\pi_2:7(x+1)+8(y-2)+9(z-3)=0$

故所求方程为 $\begin{cases}4x+5y+6z-24=0\\7x+8y+9z-36=0\end{cases}$.

【解题技巧总结】 利用直线与直线的关系,直线与平面的关系来求解此类题型.

求解直线的方向向量是解决此题目的重点,再用直线的点法式方程求解.

题型 4　求曲面、曲线方程

[1998 年,数一,三] 求直线 $l:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi:x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程,并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

【解析】 (解法一) 根据已知条件可知直线的参数方程为 $\begin{cases}x=t+1\\y=t\\z=1-t\end{cases}$,直线与平面 π 的交点设为 A.

将直线的参数方程代入平面中可以得到平面与直线的交点为 $(2,1,0)$

那么过直线上一点 $B(1,0,1)$ 与平面 π 垂直的直线方程为 L_1:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

那么此直线 L_1 与平面 π 的交点为 $C(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

因此直线 l_0 的方向向量

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com