国际数学奥林匹克题库

Russia

Olympic

俄罗斯圣彼得堡数学奥林匹克题解

林 常 编译

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

国际数学奥林匹克题库

俄罗斯圣彼得堡数学奥林匹克题解

林 常 编译

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

俄罗斯圣彼得堡数学奥林匹克题解 / 林常编译. —
杭州：浙江大学出版社，2010.7
ISBN 978-7-308-07751-4

Ⅰ.①俄… Ⅱ.①林… Ⅲ.①数学课一中小学一解题
Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 123540 号

俄罗斯圣彼得堡数学奥林匹克题解
林　常　编译

责任编辑　杨晓鸣
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州求是图文制作有限公司
印　　刷　临安市曙光印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　14
字　　数　280 千字
版 印 次　2010 年 7 月第 1 版　2010 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-07751-4
定　　价　23.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88925591

国际数学奥林匹克与奥林匹克数学(代序)

数学是锻炼思维的体操,以数学为内容的竞赛已有悠久的历史.在公元16世纪意大利的Tartalia和Cardano曾以解一元三次方程为内容进行过激烈的竞赛.在9世纪,法国科学院等也曾以悬赏的形式征求对数学难题的解答,通过有奖比赛而得到重要的数学发现.

国际数学奥林匹克的权威人士认为,以激发数学才能和引起数学兴趣为目的,中学生自愿参加的数学竞赛,是从匈牙利开始的.

1894年,著名数学家、物理学家L. Eötrös男爵就任匈牙利文化大臣.从这一年起,便开始了为选拔有数学才能的学生的国家考试.开始命名为Eötrös竞赛,后来又以对这一竞赛做出了贡献的J. Kurschak的名字命名,这一竞赛对匈牙利的数学发展起了很重要的作用.后来很多有成就的数学家都曾是这一竞赛的优胜者,例如:1897年的优胜者利波特·费叶尔,在傅立叶级数的可积性理论方面做出了许多出色的工作.1898年的优胜者忒奥多耳·冯·卡门是著名的应用力学家和工程师,对航空和航天技术的发展有过卓越的贡献.1903年的优胜者阿尔伏瑞德·哈尔提出了哈尔测度.马赛尔·黎斯是1904年的优胜者,在泛函分析中提出黎斯凸性定理.而1912年的优胜者嘎波尔·基格,他和波利亚合著的《分析中的定理和问题》至今仍享有盛名.

继匈牙利之后,罗马尼亚于1902年由《数学杂志》组织过数学竞赛.在以后的30年中再没有其他国家系统举办过重大的类似活动,直到匈牙利数学竞赛造就的大师们纷纷登台的时候,欧洲其他国家才睁开惊奇的目光,产生了浓厚的兴趣,并争相效仿.

1934年,前苏联在列宁格勒(今圣彼得堡)大学举办中学生数学奥林匹克,首次将中学生的数学竞赛与体育竞赛的奥林匹克相提并论,把这种活动命名为"数学奥林匹克".

1949年,保加利亚举办了数学竞赛.

1950年,波兰举办了数学竞赛.

1951年,捷克斯洛伐克举办了数学竞赛.

1956年,中国举办了数学竞赛.

1958年,印度举办了数学竞赛.

此后还有前东德、瑞典(1961)、越南、前南斯拉夫、荷兰、古巴、意大利(1962)、蒙古、卢森堡(1963)、西班牙(1964)、英国、芬兰、阿根廷、比利时(1965)、以色列(1968)、加拿

大、希腊(1969)、前西德(1970)、澳大利亚(1971)、美国(1972)等国举办了数学竞赛.

事实表明,20 世纪 50 年代以来,世界各地的这股举办中学生数学竞赛的热潮,它既为国际数学奥林匹克(IMO)的诞生准备了条件,又为世界数学奥林匹克的发展提供了动力.

1956 年,经罗马尼亚罗曼教授的积极活动,东欧国家正式确定了开展国际数学奥林匹克竞赛的计划.并在 1959 年 7 月在罗马尼亚古都布拉索举行了第一届国际数学奥林匹克竞赛.保加利亚、捷克、匈牙利、波兰和罗马尼亚各派出了由 8 名学生组成的代表队,前苏联(实际是莫斯科)派出了 4 名学生组成的代表队.以后几年,参赛的国家并未增多.在 1963 年和 1964 年,南斯拉夫和蒙古先后加入,1965 年芬兰加入,1967 年法国、英国、意大利和瑞典也参加进来.从此参加的国家逐渐增多.1971 年共有 34 个队,以后逐年发展,2008 年共有 103 个国家及地区的 549 名选手参加了第 49 届 IMO.

随着世界各地各级各类数学竞赛活动的蓬勃开展,对数学奥林匹克竞赛的试题的研究也悄然兴起.国际数学奥林匹克的发展使得竞赛的试题也形成一定的规范:它不再限定在各国高中数学的范围,而更多的是一般中学不怎么涉及的领域.如初等数论、组合论、一般几何、不等式等方面.而且试题的难度不在于了解和解决试题所需要的数学知识的多少,而在于对数学本质的洞察力以及是否具有创造力和数学的机智,试题无模式可套,要求学生探索思考,寻找规律.

由于 IMO 试题的上述特点,有人认为 IMO 试题代表的是一种特殊的数学,可以称为"奥林匹克数学".

对于数学奥林匹克活动而言,其中最吸引人的,无疑就是那一道道闪耀着数学智慧,散发着数学美的试题.

数学大师华罗庚教授曾经说过:"出题比做题要难,题目要出得妙,出得好,要测得出水平.一次数学竞赛成功与否,主要取决于命题."

基于数学竞赛试题的重要作用,对竞赛试题的研究和分析就成为一项重要的工作.为加强交流学习,开阔视野,给数学奥林匹克爱好者提供学习的源泉,我们特组织编写了"国际数学奥林匹克题库"系列丛书.

"国际数学奥林匹克题库"汇集了国内外重大数学竞赛的试题和解答.这些竞赛试题构思独特,新颖别致,灵活深邃,内容广,内涵深.解这些题不仅需要扎实的基础知识和基本技能,也需要灵活的思维和坚强的毅力.因此,对于有志于参加数学竞赛的同学来说,本丛书中的问题是不可或缺的训练材料.

"国际数学奥林匹克题库"的编写也是对国际数学竞赛资料的一次大整理,可作为各数学竞赛老师的一份重要资料,作为数学爱好者了解数学竞赛的一个窗口.

丛书的编写过程中,我们参考了一些国内外的资料,在此对这些资料的作者表示感谢.

本丛书篇幅较大,内容庞杂.虽然作者仔细认真地核查多遍,但囿于我们的水平,不当乃至错误之处恐难避免,敬请读者不吝指正.请将您的意见发到 sxjszcbjb@163.com.或至网站:http://www.jsmaths.com 留言.

编　者

2010 年 1 月于苏州

目　录

一、俄罗斯圣彼得堡数学奥林匹克试题

1. 第 60 届

轮次		题号
第一轮	9	1,2,3,4,5
	10	6,7,4,8,5
	11	9,3,4,10,11
第二轮	9	12,13,14,15,16,17,18
	10	19,20,21,22,23,17,24
	11	25,12,26,22,27,17,28
选拔赛	9—10	29,30,31,32,33,34,35,36
	11	37,38,39,40,41,42,43,44
239MO	8—9	45,46,47,48,49,50,51,52
	10—11	45,47,53,54,55,56,57,58

1. 请将数 14,27,36,57,178,467,590,2345 排在圆周上使得任两个相邻数有公共的十进制数码(不要求同位).

2. 正整数 A,B,C 满足:A 除以 B 得到的商大于余数的 2 倍,B 除以 C 得到的商大于余数的 2 倍.求证,A 除以 C 得到的商也大于余数的 2 倍.

3. 点 D 在$\triangle ABC$ 的中线 BM 上,过 D 作 AB 的平行线,过 C 作 BM 的平行线,二者交于 E 点.求证,$BE=AD$.

4. 若干个正数之和等于平方和,它们的立方和与四次方和哪个大?

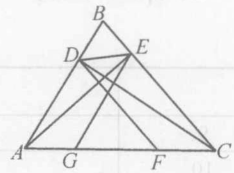
5. 256 个选手参加单淘汰赛(每轮配对比赛,输方淘汰出局,直至决出冠军).选手编号为 1～256,一场比赛称为有趣的,若对局双方号数之差不大于 21.设每场比赛都是有

趣的，求证，1 号选手最多胜 2 场.

6. 三人各写 100 个不同的单词，然后彼此比对. 若一个单词至少有两人写到，就将它全部删去. 是否可能最后第一人剩下 54 个词，第二人剩下 75 个词，第三人剩下 80 个词？

7. 求所有正整数 a,b,c,d 使得 $(2^a+2^b)^2=2^c+2^d$.

8. 锐角三角形 ABC 中 AE,CD 为高，在 AC 边上取点 F,G 使得 $DF/\!/BC,EG/\!/AB$. 求证，$DEFG$ 是圆内接四边形.



9. A,B,C,D,E 五人参加象棋循环赛，每两人赛一局，每局胜方得 1 分，平局各得0.5 分. 赛后统计得到：A 恰胜 2 局，B 每局皆平，C 只输给总分最后一名，D 的总分比 E 多 0.5. 试求每人的总分.

10. 求满足下述条件的所有十进制三位数 n：

(1)n 除以 $S(n)+1$ 的余数为 1($S(n)$是 n 的十进制数码和)；

(2)n 的反序数也具有上述性质.

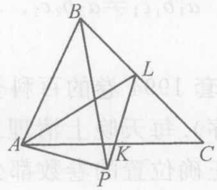
11. 棱锥 $SABC$ 的底面$\triangle ABC$ 中 $AB=17,AC=10,BC=9$，高 $SD=30$，垂足 D 是 BC 的中点. 过 A 且平行于 BC 的截面将高分为 4∶1，截面面积是多少？

12. 一家工厂的所有员工或为骑士(总讲真话)或为无赖(总讲假话). 他们同时声称：1)厂里没有 10 人的工作量比我大；2)不少于 100 人的工资比我高.

已知，所有员工的工作量互不相同，工资也互不相同. 该厂共有多少个员工？

13. 正整数 $a\geqslant b\geqslant 3$. 设用 ab 根木条可以拼成 a 个 b 边形，求证，用它们也可拼成 b 个 a 边形.

14. AL 是$\triangle ABC$ 的角平分线，K 是 AC 边上的点，$CK=CL$. 直线 LK 与角 B 的平分线交于 P 点. 求证，$AP=PL$.



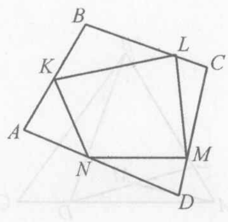
15. 正整数 a,b,c,d 满足$\dfrac{a^2+b}{a+c}=d$. 求证，$d\leqslant b+(c-1)^2$.

16. A 选定一个实数 x，B 欲通过提问来确定这个数. 每步 B 可任取 k 个不大于 100 的不同正整数，然后 A 将 x 与其中一数的和告诉 B. k 最大是多少时 B 总能经过若干步提问确定 x？

17. 水平放置的正方形平行分割为矩形，已知每条穿过正方形的水平直线恰与 n 个矩形相交，而每条穿过正方形的竖直直线恰与 m 个矩形相交（只考虑不过矩形的边的直线）. 矩形个数最少是多少？

18. 任意四边形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 上各取一点 K,L,M,N. 设三角形 ANK,BKL,CLM,DMN 的面积分别为 S_1,S_2,S_3,S_4，求证，

$$\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2}+\sqrt[3]{S_3}+\sqrt[3]{S_4}\leqslant 2\sqrt[3]{S_{ABCD}}.$$



19. 一家股份公司有 1994 个股东，已知，任意 1000 个股东合起来就具有控制权（即占不少于一半的股份）. 一个股东所占股份份额最多是多少？

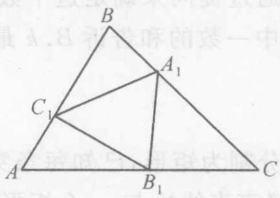
20. 称一个三角形为不高的，指三角形至少有两条高的长度不大于 1. 平面上有四个点，它们构成的任一三角形都是不高的. 求证，存在一条直线，这四点到它的距离都不大于$\dfrac{1}{2}$.

21. 正整数 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 满足 $a_1+a_2=31, b_1+b_2=32, c_1+c_2=1994$. 求证，

$$a_1b_1c_1 \neq a_2b_2c_2.$$

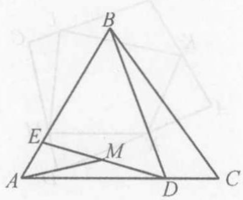
22. 图书馆的书架上摆放着一套 1994 卷的百科全书. 每天早上馆员取出 3 卷，放回时仍放在这三个位置(但可改变次序). 每天晚上清理工将两卷对调. 求证，若开始时由清理工摆放，她可使得任何时刻放在正确位置的卷数都少于 5 本.

23. $\triangle ABC$ 的三边 AB, BC, CA 上各取一点 C_1, A_1, B_1. 设 S_1, S_2, S_3 分别是三角形 $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ 的面积，求证，$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{S_{\triangle ABC}}$.



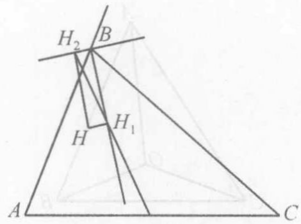
24. A 选定一个实数 x，B 欲通过提问来确定这个数. 每步 B 可任取 5 个不大于 9 的不同正整数，然后 A 将 x 与其中一数的和告诉 B. B 能保证确定 x 的最少步数是多少?

25. 等边三角形 ABC 的边 AC, AB 上分别取一点 D, E 使得 $AE=CD$. 设 M 是线段 DE 的中点，求证，$AM=\frac{1}{2}BD$.



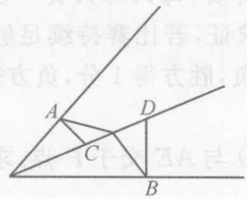
26. 正整数 a, b, x, y 满足 $(a^2+b^2) \mid (ax+by)$. 求证，x^2+y^2 与 a^2+b^2 有大于 1 的公因数.

27. H 是$\triangle ABC$ 的垂心，H_1、H_2 分别是它到角 B 的内外平分线的垂足. 求证，直线 H_1H_2 平分 AC 边.



28. 给定有限数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 每步操作可任选 $k<n$，将数列的项 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 依次换成 $a_{k+1}-a_k, a_{k+1}-a_{k-1}, \cdots, a_{k+1}-a_1$. 求证，可经若干步操作使得除去末项外的每一项都不小于两相邻项的算术平均值（约定 $a_0=0$），而且这样的终态数列是唯一的.

29. 一个角的两边上各取一点 A, B，并作所在边的垂线分别与角平分线交于 C, D 点. 求证，线段 CD 的中点与 A, B 等距离.

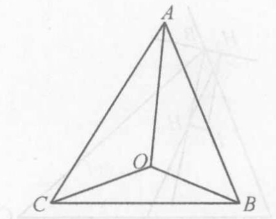


30. 正整数 $a, b, n(n>1)$ 满足 $(ab)\mid(a+b)^n$. 求证，$b\mid a^{n-1}$.

31. 正方形 $ABCD$ 的内点 P 与四顶点的连线段将它分割成四个三角形. 求证，其中两个的面积之比属于区间 $\left[\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right]$.

32. 黑板上开始时写着数 1994，每步将现有的数加上它的最大素因子. 求证，必会出现 1995 的倍数.

33. 非等腰的锐角三角形 ABC 的内点 O 满足 $\angle OBC=\angle OCB=20°$，$\angle BAO+\angle OCA=70°$，求 $\angle A$.



34. 1995×1995 表的每个方格放＋或－号. 每步可任选互不同行且互不同列的 1995 格同时变号. 求证，必可经若干步操作使得－号不多于 1994 个.

35. 考虑所有这样的正整数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{1994}$：$a_1=1$，$a_{k+1}\leqslant 1+a_k(k\geqslant1)$. 求证，和为偶数的这种数列的个数等于和为奇数的这种数列的个数.

36. 200 名网球手参加积分循环赛，每人每天赛一场，每天赛前所有选手按当时的总分排序，配成 100 个相邻对比赛. 求证，若比赛持续足够多天，必有一天有两人的总分之差大于 50.（网球每场比赛分出胜负，胜方得 1 分，负方得 0 分）.

37. 锐角三角形 ABC 的高 BD 与 AE 交于 P 点. 求证，$AB^2=AP\cdot AE+BP\cdot BD$.

38. 整数 $x,y>1$ 且 $(x+y-1)\mid(x^2+y^2-1)$. 求证，$x+y-1$ 是个合数.

39. 求证，对任意正实数 a,b 成立不等式 $a^a+b^b>ab$.

40. 圆周上的 1994 个点染 10 色. 已知，任意 100 个相继点都出现所有 10 色. 求证，有 90 个相继点出现所有 10 色.

41. 实数 a,b,c 满足：$\dfrac{1+bc}{b-c}$，$\dfrac{1+ca}{c-a}$，$\dfrac{1+ab}{a-b}$ 为整数. 求证，这三个整数两两互素.

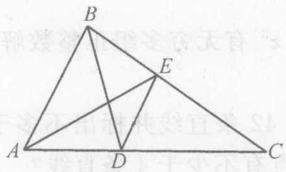
42. 求证，边长为 a,b,c,d（次序任意）的四边形的面积不大于 $\dfrac{1}{4}((a+c)^2+bd)$.

43. 设 a_n 是 2^{5^n} 的十进制第 $n+1$ 位数码（右起）. 求证，(a_n) 不是周期数列.

44. 丘克与盖克做下述染色游戏：盖克在平面上取一些点，并在一些点间连线段，使得不形成闭合折线．然后两人轮流每步给一个未染色的点染4色之一，要求任何两个相邻点不同色．丘克染第一点．若所有点都染了色，则丘克胜，反之（未全部染完但无法再染）则盖克胜．谁可保证获胜？

45. 一群人中每个人都有熟人（熟人关系是相互的）．求证，可将他们划分为两组，使得每人都有不和他同组的熟人．

46. $\triangle ABC$ 中，点 D 在 AC 边上，$\angle ABD=\angle BCD$，$AB=CD$，AE 是 $\angle A$ 的平分线．求证，$ED/\!/AB$．



47. 36 张扑克牌（每种花色 9 张）分给 6 人，设对任意两人 A，B，都有两种花色 α，β 满足：A 和 B 持有 α 的张数，持有 β 的张数分别一样（两种张数不必相同）．求证，必有一人持有 4 张同一花色的牌．

48. 求证，对任意两个奇偶不同的整数 a，b，存在整数 c，使得 $c+ab$，$c+a$，$c+b$ 都是完全平方数．

49. $\triangle ABC$ 中的 Ceva 线 AA_1，BB_1，CC_1 交于 O 点．求证，O 在 $A_1B_1C_1$ 的中位三角形内．（中位三角形是以三边中点为顶点的三角形）

50. 线段 L 被另外的一组线段 $\{M_i\}$ 的并集覆盖．求证，可以去掉一些 M_i，使得 L 被余下的线段组只覆盖一层的部分不少于总长的 $\frac{2}{3}$．

51. 是否存在公差不为 0 的正整数无穷等差数列，其各项的正因数个数单调不减？

52. 在无穷大的正方形道路网格中三个警察合力捕捉一个小偷．四人的最大速度彼此相等．警察一旦与小偷处在同一条网格线上就算捉住了小偷，但是在捉住之前看不到小偷的位置．求证，他们一定能在有限时间内捉到小偷．

53. 平面上给出一组向量，每条之长都不大于1.求证，可将每条向量旋转同一角度(一些顺时针方向，另一些逆时针方向)，使得所得向量之和的长度不大于1.

54. 对于实数 x,y,z，求 $\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos 2z+\sin z\cdot\cos 4x$ 的最大值.

55. 求所有连续函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对一切实数 x,y 成立 $f(f(x+y))=f(x)+f(y)$.

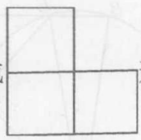
56. 四面体的每个二面角都是锐角.求证，它们的余弦的乘积不大于$\frac{1}{729}$.

57. 求证，方程 $x^3+y^3+1=z^3$ 有无穷多组正整数解.

58. 能否在平面上作不多于42条直线并标出不多于40个点，使得每条直线上有不少于4个标出点，而过每个标出点有不少于4条直线?

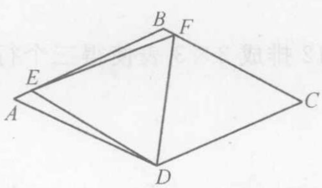
2. 第 61 届

轮次		题号
第一轮	9	1,2,3,4,5
	10	6,7,8,9,10
	11	7,11,8,12,13
第二轮	9	14,15,16,17,18,19,20
	10	21,22,23,24,25,20,26
	11	27,28,22,23,29,30,31
选拔赛	9	32,33,34,35,36,37,38,39
	10	32,34,35,40,41,38,42,43
	11	32,44,45,46,41,47,48,49
239MO	8—9	50,51,52,53,54,55,56,57
	10—11	58,51,59,60,61,62,63,64

1. 一个边长为整数的矩形可以分割成形(小方格边长为1).求证,它也可分割为1×3矩形.

2. 求方程组的实数解$\begin{cases}8a^2+7c^2=16ab\\9b^2+4d^2=8cd\end{cases}$.

3. 菱形 $ABCD$ 的边 AB,BC 上的点 E,F 满足 $\dfrac{CF}{BF}=\dfrac{BE}{AE}=1994$. 设 $DE=DF$,求$\angle EDF$.



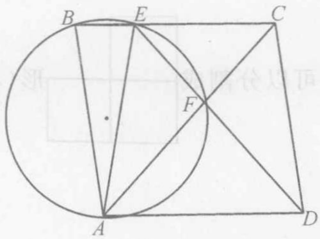
4. 两支足球队进行 129 轮的点球对抗赛，每轮两队各射一球. 若某轮射完时一队已经确保获胜，就结束比赛. 设比赛结束时所有射过的球恰有一半射中，获胜方射中多少个球？

5. 求方程的正整数解 $105^x+211^y=106^z$.

6. 十进制六位数被 8 整除. 它的数码和最大是多少？

7. 某岛国的居民或是骑士（总讲真话）或是无赖（总讲假话），该国有 3 个政党 A，B，C，每个居民恰参加一个政党. 给每个居民提三个问题：1）你是否 A 党党员；2）你是否 B 党党员；3）你是否 C 党党员. 得到的肯定回答分别占 60%，50%. 40%. B 党党员中骑士多还是无赖多？

8. 菱形 $ABCD$ 中 BC 边上的点 E 满足 $AE=CD$. 线段 DE 与 $\triangle ABE$ 的外接圆周交于 F 点. 求证，A，F，C 共线.



9. 考虑三维空间中满足条件 $0<x<100$，$0<y<100$，$0<z<100$ 的所有整点，写出每点的最大坐标与最小坐标之和. 所有这些和数的总和是多少？

10. 实数 $x,y\in[0,1]$. 求证不等式 $\dfrac{x}{\sqrt{2y^2+3}}+\dfrac{y}{\sqrt{2x^2+3}}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

11. 能否将 lg4，lg5，…，lg12 排成 3×3 表使得三个行和与三个列和整体相同（次序可不同）？

12. 实数 $x,y\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$. 求证不等式 $\dfrac{x}{\sqrt{4y^2+1}}+\dfrac{y}{\sqrt{4x^2+1}}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.