初中二分册

数学奥林匹克同步训练

（修订版）

魏鸿增 主编

地质出版社

数学奥林匹克同步训练

（修订版）

初中二分册

主编　魏鸿增
编者　张谊宾　闫崇正
　　　王春森　杨春宏　程海奎

地质出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克同步训练：初中二分册/魏鸿增主编；张谊宾等编，-北京：地质出版社，1994.4（2000.1重印）
ISBN 7-116-01570-1

Ⅰ.数… Ⅱ.①魏…②张… Ⅲ.数学-初中-教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（94）第02911号

地质出版社出版发行
（100083 北京海淀区学院路29号）
责任编辑：赵 薇
*
北京隆华印刷厂印刷 新华书店总店科技发行所经销
开本：787×1092 1/32 印张：6.5 字数：147000
2000年1月北京第一版修订·2000年1月北京第三次印刷
印数：15001—25000册 定价：6.80元
ISBN 7-116-01570-1
G·135

修订版说明

《数学奥林匹克同步训练(初中版)》自1994年出版以来，由于它“以教学大纲内容为主，与现行教材同步”的特点而受到广大同学、老师的欢迎与关心。本书被许多学校、班级选做培训教材与参考书，并成为同学们喜爱的课外读物，在一定程度上满足了加强、提高对青少年进行素质教育的社会需要。

当前，中央提出“科教兴国”的伟大战略方针。如何迎接21世纪知识经济的挑战，如何培养大批高素质的优秀人才，已是中学学科教育特别是数学学科教育的重要任务与核心目标。在新世纪到来之际，为共同的战略目标，为满足社会、学校对本书的需求，编者根据这套书的综合使用情况及专家的审查意见进行一次修订，这是很有必要的。这次修订本着“循序渐进、启迪思维、培养能力、提高素质”的精神，继续突出“与现行教材同步进行加宽与提高”这一特点，以发挥出它更高的效益。编者本着对广大青少年的无限厚望，愿意通过这套书在“把传统的应试教育转化到现代素质教育；把知识的直接灌输转化为培养科学精神和创新意识”这两大根本转变上做出新的尝试。

最后，我们在此衷心感谢关心本书第一版并提出过宝贵意见的专家、老师和同学们。

编　者

1999年12月于北京

前　言

近年来，我国中学数学竞赛活动开展的很活跃，特别是由于我国中学生在国际数学奥林匹克竞赛中频频取得优异成绩，更加激发了广大青少年钻研数学的浓厚兴趣.数学奥林匹克越来越成为中学生课外生活中具有很强吸引力的重要活动.

初中阶段是学生长身体、增智慧的好时期，中学生是数学奥林匹克优秀选手的预备大军.在国家、社会及家长的关注下，我国各级各类奥林匹克学校成批出现，对青少年的数学教育已呈现出较高的层次.在此形势下我们编写本书，是对数学竞赛规律的有益探索，同时也是适应竞赛培训工作的客观需求和满足广大青少年和家长的迫切愿望的.

本书是以数学竞赛大纲为依据，参照初中数学教学大纲，按年级组织内容并编写的数学奥林匹克同步训练教材.全书注重基本内容、基本方法、典型例题及解题技巧的有机结合，并配有足量的精选习题(附解答).在整体构思上立足同步训练，着眼数学竞赛；在内容编排上注意循序渐进，兼顾各部分内容的有机联系；在解题方法上突出系统性和实用性，注意加强各种技巧的灵活运用.本书将使学生在同步水平基础上，开扩视野，启迪思维，不断提高数学能力和竞技水平."同步提高"是本书异于其它同类书本的一个显著特点，同步培训、快速奏效是我们共同的追求.

由于水平所限，难免有疏漏之处，敬请读者批评指正.

编　者

目　　录

第一章　根　　式

§1　根式的概念和性质

1. 算术根

在实数范围内我们有:

定理　对于给定的正实数 a 及自然数 n,总存在唯一确定的正实数 x,使得 $x^n=a$.

这个定理称为算术根存在定理,其中 x 叫做 a 的 n 次算术根,亦即正数的正的 n 次方根叫做该正数的算术根,简称算术根,记作$\sqrt[n]{a}$. 零的 n 次算术根为零. 故当 $a\geqslant 0$ 时,$\sqrt[n]{a}$总表示一个非负数.

2. 方根与根式

若一个实数 x 的 n 次幂等于 a,即 $x^n=a$,则 x 叫做 a 的 n 次方根. 仍记为$\sqrt[n]{a}$,不过当 $a<0$ 时它不表示算术根.

表示方根的式子称为根式.

一个实数的 n 次算术根一定是它的 n 次方根,反之则不然.

$a>0$	n 奇数	有唯一方根$\sqrt[n]{a}$
	n 偶数	有且仅有两个方根$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$
$a=0$	$\sqrt[n]{0}=0$	
$a<0$	n 奇数	有唯一方根$\sqrt[n]{a}=-\sqrt[n]{-a}$
	n 偶数	不存在

可见,在实数范围内,任意实数的 n 次方根都可以用算术根表示出来.必须注意,负数只有奇次方根.

例如 $\sqrt[3]{x-a}$.

当$x \geqslant a$时,$\sqrt[3]{x-a}$是算术根.

当 $x<a$ 时,可以用算术根表示为

$\sqrt[3]{x-a}=\sqrt[3]{-(a-x)}=-\sqrt[3]{a-x}$.

3. 算术根的运算性质

由算术根、n 次方根的定义以及自然数幂的乘方法则可以证明:

(1) 对任意自然数 n 及实数 $a \geqslant 0$,有

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

(2) 对实数 $a \geqslant 0$,m、n、p 为大于 1 的自然数,有

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}.$$

(3) 对实数 $a \geqslant 0$,$b \geqslant 0$,有$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

(4) 对实数$a \geqslant 0$,有$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$.

(5) 对实数$a \geqslant 0$,$b>0$,有$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

(6) 对实数$a \geqslant 0$,有$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

(7) 当 n 为奇数时,对任意实数 a,有

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

(8) 当 n 为偶数时,对任意实数 a,有

$$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a, & 当a \geqslant 0, \\ -a, & 当a<0. \end{cases}$$

(9) 当 n 为奇数时,对任意实数 a,有

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

现以(2)、(7)为例进行证明.

证 (2) $(\sqrt[n]{a^m})^{np} = [(\sqrt[n]{a^m})^n]^p = (a^m)^p = a^{mp}$.

由题设，$\sqrt[n]{a^m} \geqslant 0$，$a^{mp} \geqslant 0$，再由算术根定义知$\sqrt[n]{a^m}$是 a^{mp} 的 np 次算术根，而 a^{mp} 的 np 次算术根是$\sqrt[np]{a^{mp}}$，由算术根的唯一性知

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}.$$

证(7) 若 $a \geqslant 0$,归结为(1),由算术根的定义可证.

若 $a<0$.

$$\begin{aligned}(\sqrt[n]{a})^n &= (\sqrt[n]{(-1)(-a)})^n = (\sqrt[n]{-1}\sqrt[n]{-a})^n \\ &= (-\sqrt[n]{-a})^n = -(\sqrt[n]{-a})^n \\ &= -(-a) = a.\end{aligned}$$

算术根的运算性质对非算术根未必成立. 例如,$\sqrt[3]{-2} \neq \sqrt[6]{(-2)^2}$;当 $a<0, b<0$ 时,$\sqrt{ab} \neq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. 因此,必须把非算术根化为算术根之后,才能再利用性质进行变形和计算. 这些性质是根式的化简、求积、求商、乘方、开方以及化异次根式为同次根式的主要依据.

例 1 化简$x+\sqrt{(x-1)^2}$.

解 $x+\sqrt{(x-1)^2} = x + |x-1| = \begin{cases} 2x-1, & 当x \geqslant 1. \\ 1, & 当x<1. \end{cases}$

例 2 把因子移到根号内:$(x-1)\sqrt[3]{x+2}$.

解 这里需要讨论 $x-1$、$x+2$ 的符号.

若 $x \leqslant -2$ 时,$x-1<0$,$x+2 \leqslant 0$.

所以，$$\begin{aligned}(x-1)\sqrt[3]{x+2} &= -(x-1)\sqrt[3]{-(x+2)} \\ &= \sqrt[3]{(1-x)^3}\sqrt[3]{-(x+2)}\end{aligned}$$

$$=\sqrt[3]{-(1-x)^3(x+2)}.$$

若$-2<x\leqslant 1$时，$x-1\leqslant 0, x+2>0$.

$$\begin{aligned}(x-1)\sqrt[3]{x+2}&=-(1-x)\sqrt[3]{x+2}\\&=-\sqrt[3]{(1-x)^3}\sqrt[3]{x+2}\\&=-\sqrt[3]{(1-x)^3(x+2)}.\end{aligned}$$

若$x>1$时，$x-1>0, x+2>0$.

$$\begin{aligned}(x-1)\sqrt[3]{x+2}&=\sqrt[3]{(x-1)^3}\sqrt[3]{x+2}\\&=\sqrt[3]{(x-1)^3(x+2)}.\end{aligned}$$

例 3 把$\sqrt{a^2+x^2}$、$\sqrt[3]{a-x}$化为同次根式.

解 $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt[6]{(a^2+x^2)^3}$.

当$x\leqslant a$时，$\sqrt[3]{a-x}$是算术根，

$$\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[6]{(a-x)^2}.$$

当$x>a$时，$\sqrt[3]{a-x}$不是算术根，化为算术根计算得

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a-x}&=\sqrt[3]{-(x-a)}=\sqrt[3]{-1}\sqrt[3]{x-a}\\&=-\sqrt[3]{x-a}=-\sqrt[6]{(x-a)^2}.\end{aligned}$$

例 4 计算：(1) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{-a}$;

(2)$\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}$.

解 (1)存在域是$-a\geqslant 0$，即$a\leqslant 0$，$\sqrt[3]{a}$不是算术根.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{-a}&=-\sqrt[3]{-a}\cdot\sqrt[6]{-a}=-\sqrt[6]{(-a)^2}\cdot\sqrt[6]{-a}\\&=-\sqrt[6]{(-a)^3}=-\sqrt{-a}.\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$，$\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$不是算术根，于是

$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}\\&=-\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}\end{aligned}$$

$$= -\sqrt[6]{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}$$
$$= -\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}$$
$$= -\sqrt[6]{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})} = -\sqrt[6]{25-24}$$
$$= -\sqrt[6]{1} = -1.$$

§2 根式的化简与运算

1. 复合二次根式的化简

形如$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$的二次根式称为复合二次根式. 将复合二次根式化成简单根式的代数和，是简化根式的要求之一，也是必须掌握的一种方法与技巧. 首先观察下面两个等式:

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{6}+2 = 5+2\sqrt{6},$$
$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{6}+2 = 5-2\sqrt{6}.$$

由方根的定义得

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3}+\sqrt{2},$$
$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

这里容易发现 5 是 3 与 2 的和，6 是 3 与 2 的积.

一般地，如果设

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{a\pm 2\sqrt{\frac{b}{4}}} \equiv \sqrt{x\pm 2\sqrt{xy}+y}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2} = \sqrt{x}\pm\sqrt{y} \qquad (x>y),$$

则其中 x, y 可以用以下方法求得:

由 $\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{a\pm 2\sqrt{\frac{b}{4}}} \equiv \sqrt{x}\pm\sqrt{y}$,

等式两端平方有

$$a \pm 2\sqrt{\frac{b}{4}} = x \pm 2\sqrt{xy} + y.$$

比较等式两端各项,得

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = \dfrac{b}{4}. \end{cases}$$

解联立方程求得

$$x = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}},\ y = \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

或把 x,y 作为方程$z^2 - az + \dfrac{b}{4} = 0$的两个根,也可以解得同样的结果.

所以,$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.

由此我们得到,复合二次根式$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$可以简化为两个简单根式代数和的条件为:$a>0, b>0$ 且 $a^2-b=k^2(k>0)$.

例 1 化简$\sqrt{15 - \sqrt{200}}$.

解 因为 $a^2-b=225-200=25$ 是完全平方数,故直接代公式得

$$\begin{aligned}\sqrt{15 - \sqrt{200}} &= \sqrt{\frac{15 + \sqrt{25}}{2}} - \sqrt{\frac{5 - \sqrt{25}}{2}} \\ &= \sqrt{10} - \sqrt{5}.\end{aligned}$$

例 2 化简$\sqrt{9 + \sqrt{72}}$.

解 因为 $a^2-b=81-72=9$ 是一完全平方数,代入公式得

$$\sqrt{9+\sqrt{72}}=\sqrt{\frac{9+\sqrt{9}}{2}}+\sqrt{\frac{9-\sqrt{9}}{2}}=\sqrt{6}+\sqrt{3}.$$

由于导出公式的基本思想就是将外层根号内的表达式看成一个完全平方式，因此在化简时我们不妨对根号内的表达式直接配方来进行计算. 如例 2:

$$\begin{aligned}\sqrt{9+\sqrt{72}}&=\sqrt{9+2\sqrt{18}}=\sqrt{6+2\sqrt{18}+3}\\&=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}+\sqrt{3}.\end{aligned}$$

例 3 化简 $\sqrt{20-8\sqrt{6}}$.

解 $$\begin{aligned}\sqrt{20-8\sqrt{6}}&=\sqrt{20-2\sqrt{96}}=\sqrt{12-2\sqrt{96}+8}\\&=\sqrt{(\sqrt{12}-\sqrt{8})^2}=\sqrt{12}-\sqrt{8}\\&=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}=2(\sqrt{3}-\sqrt{2}).\end{aligned}$$

注意: 使用配方法时，内层根式前系数为 2 的要求是不可少的.

例 4 化简 $\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

解 因为 $a^2-b=9-5=4$, 为完全平方数.

所以 $$\begin{aligned}\sqrt{3-\sqrt{5}}&=\sqrt{3-2\sqrt{\frac{5}{4}}}=\sqrt{\frac{1}{2}-2\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}}\\&=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2}=\left|\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right|\\&=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

若一时难以配出完全平方，则也可沿用推导公式的过程，利用待定常数法或直接解一个一元二次方程来化简.

例 5 化简 $\sqrt{16-\sqrt{240}}$.

解 令 $16-\sqrt{240}=16-2\sqrt{60}\equiv(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$,

$$16-2\sqrt{60}\equiv x+y-2\sqrt{xy},$$

解方程 $\begin{cases} x+y=16, \\ xy=60. \end{cases}$

或 $z^2-16z+60=0,$

得 $x=10, y=6.$

所以 $\sqrt{16-\sqrt{240}}=\sqrt{10}-\sqrt{6}.$

例 6 化简 $\sqrt{8-\sqrt{63}}$.

解 因为$\sqrt{8-\sqrt{63}}=\sqrt{8-2\sqrt{\dfrac{63}{4}}}$.

解方程 $\begin{cases} x+y=8, \\ xy=\dfrac{63}{4}. \end{cases}$

或 $z^2-8z+\dfrac{63}{4}=0,$

得 $x=\dfrac{9}{2}$，$y=\dfrac{7}{2}$.所以，

$$\sqrt{8-\sqrt{63}}=\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{14}).$$

多重复合二次根式应从里向外化简.

例 7 化简$\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}$.

解 $\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}$

$$=\sqrt{3+2\sqrt{5+2(1+\sqrt{2})}}$$

$$=\sqrt{3+2\sqrt{17+2\sqrt{72}}}=\sqrt{3+2(\sqrt{9}+\sqrt{8})}$$

$$=\sqrt{9+2\sqrt{8}}=1+\sqrt{8}=1+2\sqrt{2}.$$

2. 共轭因式法

共轭因式

$$x=a+\sqrt{b} \quad 与 \quad y=a-\sqrt{b},$$

或 $$x=\sqrt{m}+\sqrt{n} \quad 与 \quad y=\sqrt{m}-\sqrt{n},$$

它们的和与积都会使表达式简化,从而便于运算:

例 8 已知:$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$.

求证:$a^2+b^2=1$.

证明 应用共轭因式法.

$$\begin{aligned}&(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})(a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2})\\&=a^2(1-b^2)-b^2(1-a^2)=a^2-b^2\end{aligned}$$

由已知 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1,$ ①

所以 $a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}=a^2-b^2.$ ②

①+② $2a\sqrt{1-b^2}=a^2-b^2+1,$

$$a^2-2a\sqrt{1-b^2}+(1-b^2)=0,$$

$$(a-\sqrt{1-b^2})^2=0,$$

$$a=\sqrt{1-b^2}.$$

所以 $a^2+b^2=1.$

例 9 设$z_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (n 个根号).

证明$\dfrac{2-z_n}{2-z_{n-1}}>\dfrac{1}{4}$.

证明 首先注意 $z_n<2$,实际上

$$z_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}<\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{4}}}=2,$$

所以 $\dfrac{2-z_n}{2-z_{n-1}}=\dfrac{2-\sqrt{z_{n-1}+2}}{2-z_{n-1}}$

$$=\frac{(2-\sqrt{z_{n-1}+2})(2+\sqrt{z_{n-1}+2})}{(2-z_{n-1})(2+\sqrt{z_{n-1}+2})}$$

$$=\frac{2-z_{n-1}}{(2-z_{n-1})(2+\sqrt{z_{n-1}+2})}$$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{z_{n-1}+2}}=\frac{1}{z_n+2}>\frac{1}{4}.$$

例 10 已知:$A=\sqrt{3+\sqrt{5}}$,$B=\sqrt{3-\sqrt{5}}$.求证:

$$11<A^3-B^3<A^3+B^3<13.$$

证明 由于

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2),$$

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2),$$

而 $A=\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1)$,

$B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1)$:

$A+B=\sqrt{10}$,$A-B=\sqrt{2}$,$AB=2$.

则 $A^3+B^3=\sqrt{10}\ (3+\sqrt{5}-2+3-\sqrt{5})=4\sqrt{10}$

$\approx 12.65.$

$A^3-B^3=\sqrt{2}\ (3+\sqrt{5}+2+3-\sqrt{5})=8\sqrt{2}$

$\approx 11.3.$

所以 $11<A^3-B^3<A^3+B^3<13.$

例 11 已知线段 a、b、c 组成一个三角形.求证 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 也组成一个三角形.

证明 由于三角形任何一边小于另外两边之和,大于另