"十二五"规划大学教材

高等数学

张平安　赵宝利　主编

东北师范大学出版社
Northeast Normal University Press

"十二五"规划大学教材

高等数学

主　编　　张平安　赵宝利

东北师范大学出版社
长　春

图书在版编目（C I P）数据

高等数学 / 张平安，赵宝利主编. —长春：东北师范大学出版社，2011. 9
ISBN 978 - 7 - 5602 -7379 -2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张…②赵… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 199400 号

□责任编辑：王春彦 □封面设计：徐元清
□责任校对：张 琪 □责任印制：赖志明

东北师范大学出版社出版发行
长春净月经济开发区金宝街 118 号（邮政编码：130117）
电话：0431—85685389
传真：0431—85685389
网址：http：//www. nenup. com
电子函件：sdcbs@mail. jl. cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
北京市彩虹印刷有限责任公司印装
北京顺义区顺平路南彩段 5 号（邮政编码：101300）
2011 年 11 月第 1 版 2011 年 11 月第 1 次印刷
幅面尺寸：185 mm×260 mm 印张：15. 5 字数：412 千

定价：29. 90 元

如发现印装质量问题，影响阅读，可直接与承印厂联系调换

前　言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的一门科学，随着现代科学技术和数学科学的发展，“数量关系”和“空间形式”有了越来越丰富的内涵和更加广泛的外延。数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一门科学，而且是一种文化。高等数学是工科本、专科生的一门必修的重要的基础理论课。它的主要任务是讨论函数、极限、连续；一元函数微积分学；向量代数和空间解析几何；多元函数微积分学；无穷级数；常微分方程等方面的基本概念、基本理论和基本运算方法，使学生为学习后续课程和进一步获取数学知识奠定必要的数学基础。

本书作为高等院校使用的数学教材，在编写过程中，立足大学特色，以应用为目的，本着“联系实际、深化概念、注重应用”的教学原则，突出强调数学概念与实际问题的联系.不过多强调灌输其逻辑的严密性、思维的严谨性，不追求过分复杂的计算和变换，而重视数学应用意识，以培养学生灵活运用和解决问题、分析问题的能力。

本书将数学知识应用到各种实际问题中，用大量的实例反映数学的应用，加深学生对数学知识的理解，从而使数学源于实际，又反作用于实际。章、节例题设计实用，每章有思考题和习题，且附有答案，方便教与学。

本书编写的内容力求简洁易懂、突出实用性，在教学中可根据不同专业和学时多少在内容上有所取舍，充分考虑大学生的数学基础，较好地处理了初等数学与高等数学的过渡与衔接. 适度淡化逻辑论证，充分利用几何说明，帮助学生理解有关概念和理论。

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，敬请各教学单位和广大读者在使用本书的过程中给予批评指正，以便再版时修正。

编　者

目 录

第一章　函数、极限与连续

极限是高等数学中的一个重要的基本概念，它是学习微积分学的理论基础. 本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，着重讨论函数的极限，并介绍函数的连续性.

第一节　集合与函数

一、集合的概念和基本运算

集合是数学中一个原始的概念，它不能用更简单的概念来描述. 能说明集合这个概念的例子不计其数，如全体实数的集合，一个房间中的人员，等等. 一般地，我们称集合是具有某种特性的事物的全体. 通常我们用大写字母 A,B,C,M,N 等来表示；构成集合的那些事物称为集合的元素，用小写字母 a,b,c,x,y 等来表示. 事物 a 是集合 A 的元素，记之为 $a \in A$(a 属于 A). 否则 $a \notin A$(a 不属于 A).

由有限个元素构成的集合称为有限集，可以用列举法来表示这样的集合，例如集合 A 是由 0,1,2,3,4,5 构成的数集，则 A 可以记作 $A = \{0,1,2,3,4,5\}$.

由无穷多个元素构成的集合称为无限集. 我们用如下形式来表示无限集.

$$M = \{x \mid x \text{ 所具有的特性}\}.$$

例如，全体实数构成的集合 $\mathbf{R}$ 可表示为 $\mathbf{R} = \{x \mid x\text{是实数}\}$；又如平面上以原点为圆心、半径为 1 的圆周上的所有点构的集合 M，如果采用 (x,y) 表示平面上点的坐标，则 M 可以表示为

$$M = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}.$$

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即当 $x \in A$ 时必有 $x \in B$，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$(A 包含于 B) 或 $B \subset A$(B 包含于 A). 例如全体自然数的集合 $\mathbf{N}$ 是全体整数集合 $\mathbf{Z}$ 的子集，而全体整数集合 $\mathbf{Z}$ 又是全体有理数集合 $\mathbf{Q}$ 的子集，全体有理数集 $\mathbf{Q}$ 又是全体实数集 $\mathbf{R}$ 的子集，记为 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A = B$. 例如，设 $A = \{1,2\}$，$B = \{2,1\}$，$C = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$，则 $A = B = C$.

另外，我们简单介绍一下集合的运算.

1. 集合的并：$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.
2. 集合的交：$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.
3. 集合的差：$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$.

不含任何元素的集合称为空集，记作 ϕ，并规定空集为任何集合的子集，例如：

$$\{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\} = \phi.$$

在本课程中所用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合，如果没有特别声明，以后提到的数均为实数.

区间是一类常用的数集. 设 a 和 b 均为实数，且 $a < b$，则 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间，记

作(a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记作$[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

类似地，我们还有所谓的半开区间，$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$. 其中 a,b 称为区间的端点，$b-a$ 称为区间的长度. 上述区间都称为有限区间，即区间长度为有限. 并且这样的区间可以表示为数轴上长度有限的线段. 如图 1－1 所示.

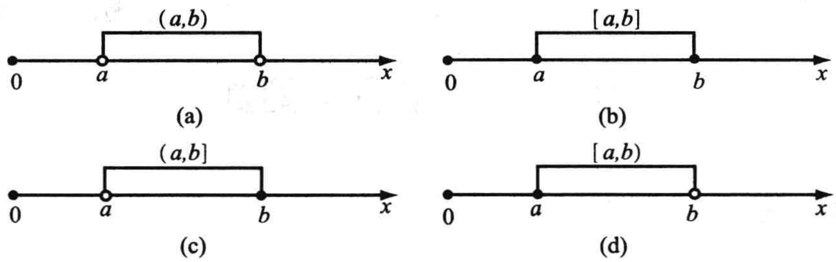


图 1－1

此外还有所谓的无限区间，引进记号$+\infty$(正无穷大)和$-\infty$(负无穷大)，类似有限区间的表达形式如下：

$$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x<+\infty\}=\{x \mid x \geqslant a\}$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid -\infty<x<b\}=\{x \mid x<b\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

在此区间同样可以用数轴上的无长半直线或直线来刻画.

区间的一般通用记号为"I"，我们经常会说"…… 区间 I……".

一类特殊的区间 —— 邻域，是一个重要的概念. 设 a,δ 均为实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为 a 的 δ 邻域，记为$U(a,\delta)$，即$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$，点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，注意到

$$|x-a|<\delta \Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta,$$

所以$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$. 区间长为 2δ，如图 1－2 所示.

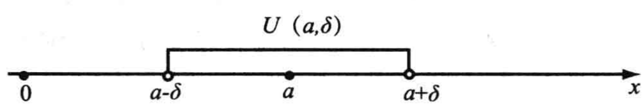


图 1－2

而$\overset{o}{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心邻域，这里，$0<|x-a|<\delta \Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta$ 且 $x \neq a$.

二、函数概念

函数是微积分学所研究的主要对象，为了建立函数的概念，我们先举两个例子.

例 1 自由落体运动. 设物体下落的时间为 t，落下的路程为 s，假定开始下落的时间 $t=0$，则 s 与 t 之间的对应关系可以由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

确定，其中 g 是重力加速度. 假定物体落地的时刻为 $t = T$，那么当 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时，s 按照上述公式就有确定的值与之对应.

例 2　圆内接正多边形的周长. 设圆的半径为 r，S_n 为圆内接正 n 边形的周长，则我们有 $S_n = 2n r \sin \frac{\pi}{n}$，当 n 在 3，4，5，… 自然数中任意取定一个数值时，按上式 S_n 就有确定的数值与之对应.

在上述两个例子中，我们遇到了各种不同的量，g，π，s，t，S_n，n，其中一类量在考察过程中保持不变，只取一个固定的值，称之为常量，如 g，π；而另一类量在考察过程中可以取不同的数值，称之为变量，如 s，t，S_n，它们都是变量. 在习惯上常用字母 a，b，C，d 等表示，变量用 x，y，z，t 等表示.

（一）函数的概念及表示法

由例 1、例 2 我们可以发现，在某个变化过程中，往往出现多个变量，这些变量不是彼此孤立，而是相互影响和相互制约的. 一个量或一些量的变化会引起另一个变量的改变，如果这些影响是确定的，是按照某一规则的，则我们认为这些变量存在着函数关系.

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定的法则总有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$，数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的各个数值，我们得到所有对应的 y 构成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称之为函数的值域.

函数 $y = f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可以用其他字母来表示，如"φ"，"F"，等等，这时函数就记为 $y = \varphi(x)$，$y = F(x)$，等等.

注 1　函数定义中有两个基本要素：定义域 D 和函数关系 f，也就是说函数的确定与否，取决于 D 和 f.

注 2　在函数的定义域的确定中，对于实际问题而言，我们通常根据问题的实际意义确定函数的定义域. 如果函数是用抽象的算式表达，则我们规定：函数的定义域就是自变量所能取的使得算式有意义的一切实数值.

例 3　已知 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(-x)$，$f(\frac{1}{x})$，$f(x+1)$，$f(x^2)$

解

$$f(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1, f(\frac{1}{2}) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$f(-x) = \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \frac{1+x}{1-x}, f(\frac{1}{x}) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1},$$

$$f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = -\frac{x}{2+x}, f(x^2) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

例 4　求下列函数的定义域.

(1) $f(x) = \frac{3}{5x^2 + 2x}$　　　(2) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

(3) $f(x) = \lg(4x-3)$　　　　　(4) $f(x) = \arcsin(2x-1)$

解　(1) 因为分式的分母不能为零，所以有 $5x^2+2x \neq 0$，即 $x \neq -\dfrac{2}{5}$，且 $x \neq 0$. 定义域：$\left(-\infty,-\dfrac{2}{5}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{5},0\right) \cup (0,+\infty)$.

(2) 在偶次根式中，被开方式必须非负，所以有 $9-x^2 \geqslant 0$，即 $-3 \leqslant x \leqslant 3$. 定义域：$[-3,3]$.

(3) 因为在对数式中，真数必须大于零，所以 $4x-3>0$，即 $x>\dfrac{3}{4}$. 定义域：$\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

(4) 反正弦或反余弦中式子的绝对值小于等于1，所以有 $|2x-1| \leqslant 1$. 解之得 $0 \leqslant x \leqslant 1$. 所以定义域：$[0,1]$.

下面我们再举几个函数的例子：

例 5　函数 $y=x^2$，其图形是一条抛物线，其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$. 值域 $W=[0,+\infty]$，如图 1－3 所示.

例 6　函数 $y=x^3$，其图形是一条立方抛物线，其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$. 值域 $W=[-\infty,+\infty]$，如图 1－4 所示.

例 7　函数 $y=\dfrac{1}{x}$，其图形称为等轴双曲线，其定义域 $D=\mathbf{R}\{0\}$，值域 $W=\mathbf{R}\{0\}$. 如图 1－5 所示.

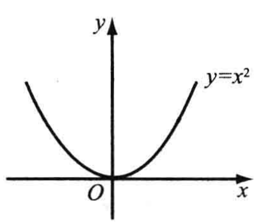


图 1－3

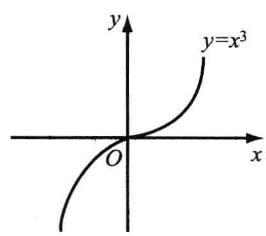


图 1－4

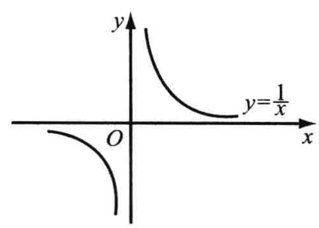


图 1－5

例 8　数 x 的绝对值记为 $|x|$，如果将 x 看做变量，则有函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，它的另一表达形式为 $f(x)=\sqrt{x^2}$，其图形如图 1－6 所示.

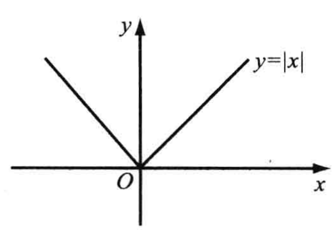


图 1－6

例 9　函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases}$ 称为符号函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，

值域 $W=\{-1,0,1\}$. 其图形如图 1－7 所示，对任何实数 x，有 $x=|x|\cdot \operatorname{sgn}x$.

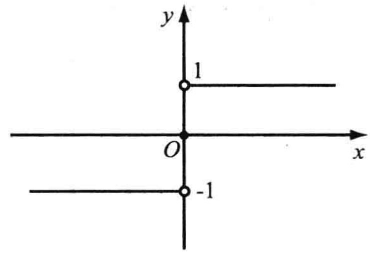


图 1－7

从上述两个例子我们可以发现：有时一个函数是用几个式子来表示的，这种在不同范围中用不同的式子表示的函数称为分段函数.

例 10　函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$ 是一个分段函数，它的定义域 $D=[0,+\infty]$，当自变量 x 取 $[0,1]$ 上的数值时，对应的函数值 y 由 $y=2\sqrt{x}$ 所确定，当 x 取开间 $(1,+\infty)$ 内的数值时，y 由 $y=1+x$ 所确定. 例如：$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，$f(1)=2\sqrt{1}=2$，$f(3)=1+3=4$. 其图形如图 1－8 所示.

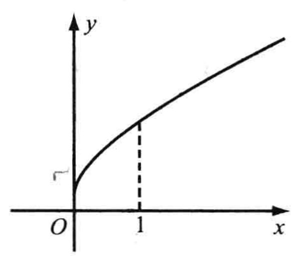


图 1－8

（二）函数的几种特性

(1) 有界性. 函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果存在正数 M，使得对任一 $x\in X$ 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界；如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 内无界.

注　有界的概念与数集 X 紧密相关. 例如 $f(x)=\frac{1}{x}$，其定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(x)$ 在 $[1,2]\subset D$ 上有界. 但在 $(0,1)$ 内无界.

若 $X=D$，则 $f(x)$ 称为有界函数，如 $f(x)=\sin x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$，均有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $f(x)=\sin x$ 为有界函数.

(2) 单调性. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的，如图 1－9 所示.

如果对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数$f(x)$在区间 I 内是单调减少的，如图 1－10 所示.

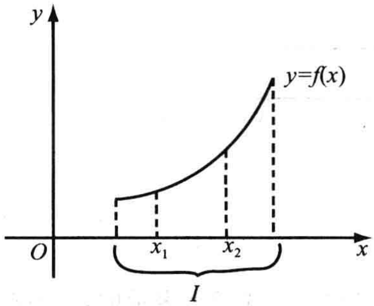


图 1－9

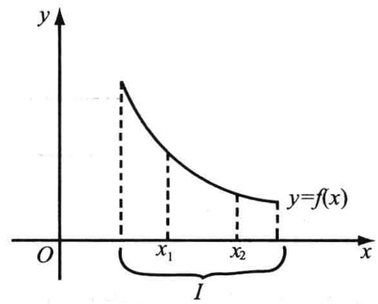


图 1－10

注 1　函数的单调性与区间 I 有关，如 $y = x^2$，它在$[0, +\infty)$内单调增加，而在$(-\infty, 0]$内单调减少；在$(-\infty, +\infty)$内则不是单调函数.

注 2　若定义中的 $I = D$，则称$f(x)$为单调函数. 如 $y = x^3$，它在$(-\infty, +\infty)$内总是单调增加的.

例 11　讨论函数 $y = 2x + 3$ 在其定义域上的单调性.

解　函数 $y = 2x + 3$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，在$(-\infty, +\infty)$内任取两点 x_1, x_2，且 $x_1 < x_2$，于是 $f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 + 3) - (2x_2 + 3) = 2(x_1 - x_2) < 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$ 所以 $y = 2x + 3$ 在$(-\infty, +\infty)$内单调增加.

(3) 奇偶性. 设函数$f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$，则 $-x \in D$)，如果对任一 $x \in D$，$f(-x) = -f(x)$恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对任一 $x \in D$，$f(-x) = f(x)$恒成立，则称$f(x)$为偶函数.

例如：$f(x) = x^2$ 是偶函数，这是因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$；$f(x) = x^3$ 为奇函数，因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

注 1　函数奇偶性的讨论必须要求函数的定义域关于原点对称.

注 2　并不是所有的函数均能分奇、偶，即存在非奇偶的函数. 如：$f(x) = x^2 + x$.

注 3　奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 12　判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 8$；

(2) $f(x) = \dfrac{1}{2}(a^{-x} - a^x)$　　$(a > 0, a \neq 1)$

(3) $f(x) = 5x^2 + \sin x$

解　(1) 因为 $f(-x) = 2(-x)^4 - 3(-x)^2 + 8 = 2x^4 - 3x^2 + 8 = f(x)$，所以$f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 8$ 为偶函数.

(2) 因为 $f(-x) = \dfrac{1}{2}(a^{-(-x)} - a^{-x}) = -\dfrac{1}{2}(a^{-x} - a^x) = -f(x)$，所以 $f(x) = \dfrac{1}{2}(a^{-x} - a^x)$ 是奇函数.

(3) 因为 $f(-x) = 5(-x)^2 + \sin(-x) = 5x^2 - \sin x$，显然，$f(-x) \neq -f(x)$ 且 $f(-x) \neq f(x)$，所以$f(x) = 5x^2 - \sin x$ 即不是奇函数，也不是偶函数.

例 13　设函数$f(x)$在 **R** 上有定义.

(1) 证明：$F(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 是偶函数.

(2) 证明：定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 都可以表示成奇函数与偶函数之和.

证明(1) $F(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))]=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=F(x)$

所以 $F(x)$ 是偶函数.

(2) $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=F(x)+G(x)$

由(1) 知 $F(x)$ 为偶函数，类似(1) 可以证明 $G(x)$ 也是一个奇函数，命题获证.

(4) 周期性. 对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的正数 l，使得对于定义域中的任何 x 值，$x\pm l$ 仍在定义域内，且关系式：$f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则 $f(x)$ 称为周期函数，l 为 $f(x)$ 的周期. 通常，我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 均为以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

三、反函数

定义 2　设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 W，如果对于 W 中的每一个 y 值，都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 W 上以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，我们称这个新函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$.

当然我们可以说 $y=f(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，就是说，它们互为反函数，显然由定义可知，单调函数一定有反函数，习惯上，我们用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$.

从上面的定义容易得出，求反函数的过程可以分为两步：第一步从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$；第二步交换字母 x 和 y.

例 14　求 $y=4x-1$ 的反函数.

解　由 $y=4x-1$ 可得 $x=\frac{1}{4}(y+1)$，然后交换 x 和 y，得 $y=\frac{1}{4}(x+1)$，即 $y=\frac{1}{4}(x+1)$ 是 $y=4x-1$ 的反函数.

注　函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

四、基本初等函数

基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数六大类，它们是微积分中所研究对象的基础，其中大部分函数在中学已经学过，但我们在这里对它们重新分类，并将系统地讨论它们的定义域、值域、图像及基本特性.

(一) 常数函数 $y=C$

常数函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，由于无论 x 取何值，都有 $y=C$，所以，常数函数的图形是过点$(0,C)$ 平行于 x 轴的一条直线，如图 1－11 所示. 常数函数是偶函数.

(二) 幂函数 $y=x^a$(a 为实数)

幂函数的情况比较复杂，我们分 $a>0$ 和 $a<0$ 来讨论.

当 a 取不同的值时，幂函数的定义域将不同，为了便于比较，我们只讨论 $x\geqslant 0$ 的情形，

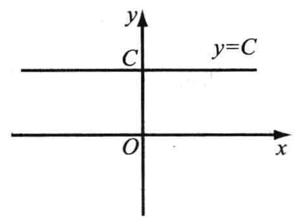
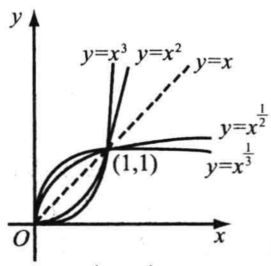


图 1－11

而 $x<0$ 时的图像可以根据函数的奇偶性来确定.

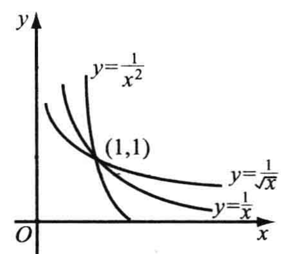
当 $a>0$ 时,函数的图像通过原点(0,0) 和点(1,1),在(0,$+\infty$) 上单调增加且无上界,如图 1－12 所示.

当 $a<0$ 时,函数的图像不过原点,但仍通过点(1,1) 在(0,$+\infty$) 内单调减少、无界,曲线分别以 x 轴和 y 轴为水平渐近线和垂直渐近线. 如图 1－13 所示.



($a>0$)

图 1－12



($a<0$)

图 1－13

(三) 指数函数：$y=a^x(a>0,a\neq1)$

指数函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 由于无论 x 取何值,总有 $a^x>0$,且 $a^0=1$,所以指数函数的图像全部在 x 轴上方,且通过点(0,1),即函数的值域为(0,$+\infty$).

当 $a>1$ 时,函数单调增加、无界,曲线以 x 轴的负半轴为渐近线.

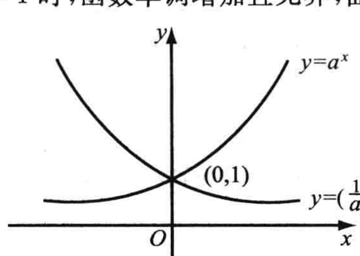
当 $0<a<1$ 时,函数单调减少且无界,曲线以 x 的正半轴为渐近线,如图 1－14 所示.

注 要特别注意指数函数与幂函数的区别:在幂函数 $y=x^a$ 中,x 是自变量,它在底数的位置,指数 a 是常数;而在指数函数 $y=a^x$ 中,自变量 x 在指数位置,底数是常数 a.

(四) 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$

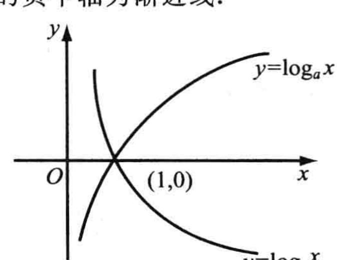
对数函数的定义域是(0,$+\infty$),图像全部在 y 轴的右边,值域是$(-\infty,+\infty)$. 无论 a 取何值,曲线过点(1,0)

当 $a>1$ 时,函数单调增加且无界,曲线以 y 轴的负半轴为渐近线.



$a>1$

图 1－14



$a>1$

图 1－15

当 $0 < a < 1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 y 轴的正半轴为渐近线，如图 1－15 所示.

注 1　对数函数 $y = \log_a x$ 和指数函数 $y = a^x$ 互为反函数它们的图像关于直线 $y = x$ 对称.

注 2　以无理数 e 为底的对数函数称为自然对数函数，记为 $y = \ln x$.

(五) 三角函数

三角函数包括下面的六个函数

(1) 正弦函数　$y = \sin x$；

(2) 余弦函数　$y = \cos x$；

(3) 正切函数　$y = \tan x$；

(4) 余切函数　$y = \cot x$；

(5) 正割函数　$y = \sec x$；

(6) 余割函数　$y = \csc x$.

其中的自变量 x 采用弧度制. 如 $x = \frac{\pi}{3}$ 等.

函数 $y = \sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[-1, 1]$，奇函数，以 2π 为周期，有界，如图 1－16 所示.

函数 $y = \cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[-1, 1]$，偶函数，以 2π 为周期，有界，如图 1－17 所示.

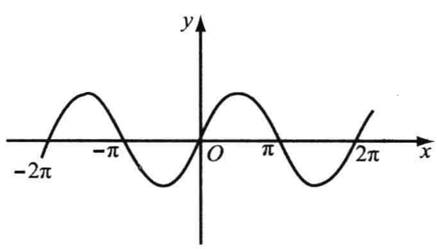


图 1－16

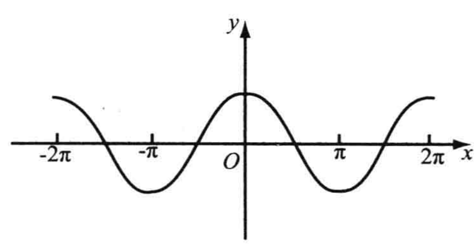


图 1－17

函数 $y = \tan x$ 的定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$，值域为 $(-\infty, +\infty)$，奇函数，以 π 为周期，在 $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 内单调增加，以直线 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为渐近线，如图 1－18 所示.

函数 $y = \cot x$ 的定义域为 $x \neq k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$，值域为 $(-\infty, +\infty)$，奇函数，以 π 为周期，在 $(k\pi, k\pi + \pi) (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 内单调减少，以直线 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$ 为渐近线，如图 1－19 所示.

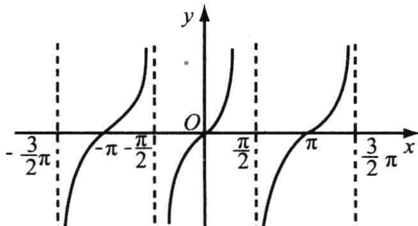


图 1－18

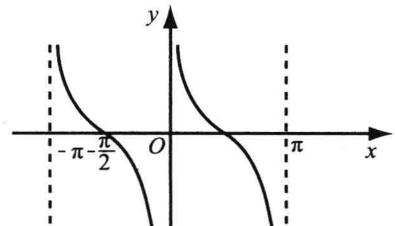


图 1－19

对于函数 $y=\sec x$ 和 $y=\csc x$ 我们不作详细的讨论，只需知道 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$ 即可.

(六) 反三角函数

常用的反三角函数有如下四个：

(1) 反正弦函数　$y=\arcsin x$；

(2) 反余弦函数　$y=\arccos x$；

(3) 反正切函数　$y=\arctan x$；

(4) 反余切函数　$y=\operatorname{arccot} x$.

它们是作为相应三角函数的反函数定义出来的. 为了避免上述反三角函数的多值性，我们对其规定了相应的主值区间. 在这个区间内，函数值与定义域中的每个自变量的取值构成一一对应关系.

$y=\arcsin x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，是单调增加的奇函数，有界，如图 1－20 所示.

$y=\arccos x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，是单调减少的函数，有界，如图 1－21 所示.

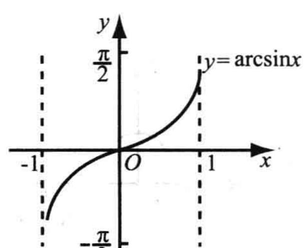


图 1－20

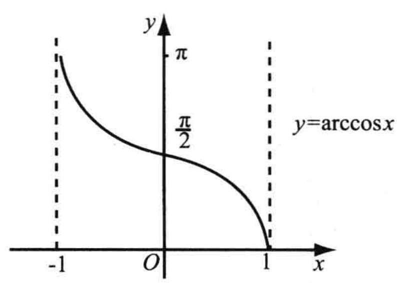


图 1－21

$y=\arctan x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，是单调增加的奇函数，有界，如图 1－22 所示.

$y=\operatorname{arccot} x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$，是单调减少的函数，有界，如图 1－23 所示.

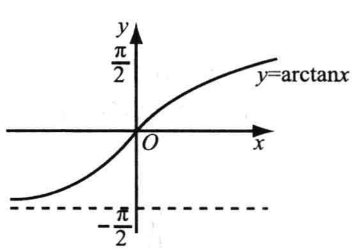


图 1－22

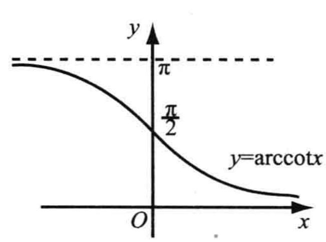


图 1－23

五、复合函数与初等函数

(一) 复合函数

定义 3　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，如果 $u=\varphi(x)$ 的值域完

全或部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中,则 y 是通过中间变量 u 构成 x 的函数,称为 x 的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$. 其中 x 是自变量,u 为中间变量.

注 1　不是任何两个函数都可以构成一个复合函数. 例如 $y=\ln u, u=x-\sqrt{x^2+1}$ 就不能复合,因为 $u=x-\sqrt{x^2+1}$ 的值域为 $u<0$,而 $y=\ln u$ 的定义域是 $u>0$,不能满足定义中可复合的条件.

注 2　复合函数不限于仅有一个中间变量,可以是多个函数复合而成,例如

$y=u^2, u=\sin v, v=(x+1)^2$,则有复合函数:

$y=\sin^2(x+1)^2=[\sin(x+1)^2]^2$.

注 3　复合函数通常不一定纯由基本初等函数复合而成,而更多的是由基本初等函数经过四则运算形成的简单函数构成的. 这样,复合函数的合成和分解往往是对简单函数的.

例 15　已知 $y=\sqrt{u}, u=2x^3+5$,将 y 表示成 x 的函数.

解　将 $u=2x^3+5$ 代入 $y=\sqrt{u}$,则 $y=\sqrt{2x^3+5}$ 为所求.

例 16　已知 $y=\ln u, u=4-v^2, v=\cos x$,将 y 表示成 x 的函数.

解　$y=\ln(4-v^2)=\ln(4-\cos^2 x)$.

例 17　指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的.

(1) $y=\sin(x^3+4)$;

(2) $y=5^{\cot\frac{1}{x}}$.

解　(1) 设 $u=x^3+4$,则 $y=\sin(x^3+4)$ 是由 $y=\sin u, u=x^3+4$ 复合而成.

(2) 设 $u=\cot\dfrac{1}{x}$,则 $y=5^u$;再设 $v=\dfrac{1}{x}$,则 $u=\cot v$,所以 $y=5^{\cot\frac{1}{x}}$ 由 $y=5^u, u=\cot v$, $v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成.

(二) 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤构成的能用一个式子表示的函数称为初等函数. 例如,$y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sin^2 x$, $y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$ 等为初等函数. 而 $y=1+x+x^2+\cdots$ 不满足有限次的运算;$y=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 不是一个解析式子表达,因此,它们就不是初等函数.

第二节　极限

一、数列极限的概念

(一) 数列

按照一定顺序排列的一列数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 称为数列,记作 $\{x_n\}$,数列中的每一个数叫作数列的项,第 n 项 x_n 称为数列的通项(一般项).

数列 $\{x_n\}$ 可看成函数 $y=f(n)=x_n$,定义域是全体正整数.