新世纪高等学校教材

北京高等教育精品教材

数学与应用数学系列教材

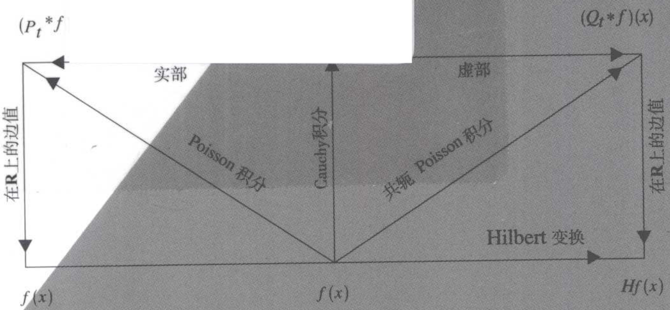
XIANDAI FENXI JICHU

（第2版）

现代分析基础

北京师范大学数学科学学院　主　编

丁　勇　编　著



北京师范大学出版集团

北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材

北京高等教育精品教材

数学与应用数学系列教材

现代分析基础（第2版）

XIANDAI FENXI JICHU

北京师范大学数学科学学院 主 编

丁 勇 编 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代分析基础／丁勇编著．—2版．—北京：北京师范大学出版社，2013.6

(新世纪高等学校教材．数学与应用数学系列教材)

ISBN 978-7-303-15900-0

Ⅰ．①现…　Ⅱ．①丁…　Ⅲ．①分析（数学）－基础理论－高等学校－教材　Ⅳ．①O171

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第019791号

营销中心电话　010-58802181 58805532

北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com

电子信箱　gaojiao@bnupg.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnupg.com

北京新街口外大街19号

邮政编码：100875

印　　刷：北京京师印务有限公司

经　　销：全国新华书店

开　　本：170 mm × 230 mm

印　　张：17.5

字　　数：320千字

版　　次：2008年1月第1版

2013年6月第2版

印　　次：2013年6月第1次印刷

定　　价：33.00元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆

美术编辑：毛　佳　　装帧设计：毛　佳

责任校对：李　菡　　责任印制：孙文凯

第 2 版 前 言

1915年北京高等师范学校成立数理部, 1922年成立数学系. 2004年成立北京师范大学数学科学学院. 经过近百年的风风雨雨, 数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验. 将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

培养人才和编写教材是北京师范大学数学科学学院两项非常重要的工作. 教材的编写是学院的基本建设之一. 学院要抓好教材建设; 教师要研究教学方法. 在教材方面, 学院要推出一批自己的高水平教材.

2005年5月, 由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部岳昌庆、王松浦进行了沟通和协商, 由北京师范大学数学科学学院主编(李仲来教授负责), 准备对学院教师目前使用的, 或北京师范大学出版社已经没有存书的部分教材进行修订后再版, 另有一些教材需要重新编写. 计划用几年时间, 出版数学与应用数学系列教材、数学教育主干课程系列教材、大学公共课数学系列教材、数学学科硕士研究生系列教材共4个系列约60余部的主要课程教材.

从2005年起, 由学院组织和动员全院在职和退休教师之力量, 主编出版数学一级学科4个系列课程教材. 教材编写涉及面之广、数量之大、持续时间之长, 这在一所高校数学院系内是为数不多的, 其数量在中国数学界列全国第一. 经过8年的编写, 至今已经出版了50余部教材, 原计划的大多数教材已经出版, 对于学院来讲, 这是一件值得庆贺的大事. 现在可以说, 数学科学学院和北京师范大学出版社基本上是干成了一件大事. 这是很难办圆满的一件大事. 剩下的一些教材在两三年内多数可以出版. 若留下缺憾, 则需要后人去补充.

从数量上看, 按教材系列, 出版数学与应用数学系列教材28部、数学教育主干课程系列教材9部、大学公共课数学系列教材7部、数学学科硕士研究生系列教材10部. 按出版教材版次, 第1版21部、第2版21部、第3版12部. 还出版了3部教辅教材.

从质量上看, 7部教材被评为普通高等教育"十一五"国家级规划教材; 7部教材被评为普通高等教育本科"十二五"国家级规划教材; 7部教材被评为北京市高

等教育精品教材；《师范院校数学学科4个系列教材建设》项目获2012年北京师范大学教育教学成果一等奖.

写教材要慢一点，质量要好一点，教材修订连续化，教材出版系列化，是编写教材要注意的几项基本原则. 学院希望教材要不断地继续修改和完善，对已经出版的研究生教材，我们准备再版. 在2012年，经由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部岳昌庆进行协商，由北京师范大学数学科学学院主编(李仲来教授负责)，准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的已经出版第1版的研究生教材进行修订后出版第2版.

教材的建设是长期的、艰苦的任务，每一位教师在教学中要自主地开发教学资源，创造性地编写和使用教材. 学院建议：在安排教学时，应考虑同一教师在3～5年里能够稳定地上同一门课,并参与到教材的编写或修订工作中去. 在学院从事教学的大多数教师，应该在一生的教学生涯中至少以自已为主，编写或修订一种教材为己任，并注意适时地修订或更新教材. 我们还希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校数学一级学科硕士研究生和课程与教学论(数学) 等硕士研究生使用和参考. (李仲来执笔)

北京师范大学数学科学学院
2012-03-08

第2版作者的话

本书第1版于2008年1月在北京师范大学出版社出版, 2011年被评为“北京市高等教育精品教材”. 因已售罄, 应出版社要求得以再版.

在第2版中, 补充了单边Hardy-Littlewood极大算子的定义及性质(见§1.2.3)和Stein算子解析族插值定理(见§1.4.3); §2.3中扩充了复测度Fourier分析的内容; 新增了§5.4关于Fourier乘子和Littlewood-Paley理论的内容. 此外, 还增加了若干新的注记, 并由此补充了一些相关的研究成果(包括新近成果), 因而第2版的参考文献也比第1版增加了一倍多. 特别地, 我们改正了第1版中的疏漏之处和打印错误.

新疆大学江寅生教授、首都师范大学李中凯教授、中国科学院大学燕敦验教授、厦门大学伍火熊教授、西北师范大学陶双平教授、新疆大学王新霞博士指正了第1版中的打印错误, 李中凯教授和北京师范大学邓冠铁教授指出第1版§2.3中函数与测度卷积定义中的疏漏之处. 上述专家们的意见和建议, 为本书的修订提供了非常宝贵的信息. 作者在此向他们表示衷心的感谢!

感谢所有使用过本书的教师和学生. 诚恳希望专家和读者对书中的错误和不妥之处继续不吝指正.

感谢北京师范大学出版社为本书第2版的编辑出版所做的工作.

丁勇 (dingy@bnu.edu.cn)

2012年12月

第 1 版 前 言

研究生教材建设是研究生培养工作的重要环节，是研究生教学改革措施之一，也是衡量学校研究生教学水平和特色的重要依据．纵观我院的研究生教育，可分为几个阶段：1953~1960年我院招收10个研究生班；1962~1965年改为招收少量的硕士研究生；1966~1976年“文化大革命”时期，研究生停止招生．1978年，我院恢复招收硕士研究生，研究生所学课程除外语和自然辩证法公共课程外，主要学习几门专业课．每年导师根据招生情况，分别制定每个研究生的培养计划．从1982年开始，首次开展制定攻读硕士学位研究生培养方案的工作．为拓宽研究生的知识面，对每届研究生开设5门专业基础理论课：泛函分析、抽象代数、实分析、复分析、微分流形，每人至少选3门；从1983年起，增加代数拓扑，共6门基础理论课，安排有经验的教师讲课且相对固定，考试要求严格，使研究生受到正规的训练．由于不同院校开设的本科生课程有一定的差距，经过这个阶段的学习后，基本上达到了一个相同的水平，为从本科生到研究生基础水平过渡提供了保障．在1992年修订教学计划时，增加了概率论基础和计算机基础．这样，基础理论课共开设8门．从1997学年开始，规定研究生每人至少选4门．从2000年开始，改为开设12门基础课，增加应用分析基础、偏微分方程、李群、随机过程．经过近30年系统的研究生培养工作，学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了比较丰富的培养经验，将这些经验落实并贯彻到研究生教材编写中去是大有益处的．

在20世纪90年代，北京师范大学出版社出版了基础课教材：泛函分析、实分析、随机过程，但未系统策划出版系列教材．2005年5月，由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部岳昌庆、王松浦进行了沟通和协商，由北京师范大学数学科学学院组编(李仲来教授负责)，准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的北京师范大学出版社出版的几部教材进行修订后再版，进一步计划用几年时间，出版数学一级学科硕士研究生的基础课程系列教材．我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善．本套教材可供高等院校数学一级学科硕士研究生和课程与教学论(数学) 硕士研究生使用和参考．

北京师范大学数学科学学院　2006-01-18

第1版作者的话

"应用分析基础"是北京师范大学数学科学学院2000年硕士研究生培养方案中列入的学位基础课程之一. 在2007年6月由北师大研究生院组织的研究生培养方案的修订工作中, 根据一些专家教授的建议, 在原"应用分析基础"课程的内容中补充20世纪70年代以来在分析领域中取得的某些重要进展, 同时将该课程更名为"现代分析基础", 并仍列为北师大数学学院硕士研究生的学位基础课程.

2002年以来, 编者已为北师大数学学院的四届硕士研究生讲授了该门课程. 在教学中我们曾选用了1999年Wolf数学奖得主、美国科学院院士E. M. Stein和美国著名数学家G. Weiss 的名著《Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces》([120])作为该课程的主要参考书. 本书是在编者的"应用分析基础"讲义之上, 参考了国内外一些重要专著和文献后修改补充编写而成的.

全书共分六章. 第一章中介绍的知识在现代分析中是最基本且十分重要的, 它们的应用也始终贯穿于全书之中. 第二章主要介绍Fourier变换的经典理论. Fourier变换是现代分析中最重要的工具之一, 已广泛应用于偏微分方程、调和分析、复分析、概率论、小波分析及数值分析等众多研究领域. 第三章介绍速降函数空间$\mathscr{S}$及其对偶空间$\mathscr{S}'$（缓增广义函数类）. 运用缓增广义函数理论, 可十分有效地拓广经典的Fourier变换理论, 从而使得广义函数在现代分析,特别是推动偏微分方程和调和分析理论的发展中发挥了极其重要的作用. 第四章介绍$\mathbb{R}^n$上调和函数的一般理论. 它来源于复分析并且密切联系着偏微分方程和调和分析理论,同时在概率论中亦有重要的应用. 在这一章我们还讨论了$\mathbb{R}^{n+1}$的上半空间$\mathbb{R}^{n+1}_+$上调和函数的径向和非切向边界值问题, 介绍了球面调和函数的基本内容和一些重要性质. 第五章介绍Calderón-Zygmund奇异积分算子的基本知识. Calderón-Zygmund奇异积分算子自20世纪50年代初创立以来便在现代调和分析中始终居于中心位置. 它一方面来源于Cauchy型积分理论, 另一方面来源于偏微分方程理论. 半个多世纪以来, 奇异积分算子理论已发展成为丰富而系统的理论体系. 1992年Wolf数学奖和2006年Abel奖得主、国际数学家联盟前主席、瑞典皇家科学院院士L. Carleson说: Harmonic analysis has a position in mathematics comparable to that of the theory of the atom in physics. (调和分析在数学中的地位可与原子理论在物理学中的地位相比.)（见Notices of AMS, **48** (2001), p. 482.）而调和分析理论和方法也正是通过奇异积分及其相关算子（如: 极大算子、振荡积分、分数次积分、Littlewood-Paley算子、交换子等）在Lebesgue空间

等各类函数空间中的性质而在偏微分方程、复分析、小波分析等研究领域中发挥着重要作用. 在最后一章我们介绍了小波分析中的部分内容. 二十多年来, 小波分析在理论和应用方面均得以迅速发展, 现已被广泛应用于数值分析、信号处理、图像处理、语音识别、地震和石油勘探等领域. 在这一章我们仅介绍小波分析中最基本的理论和知识, 如基本小波、小波变换、小波框架、多尺度分析、正交小波等, 同时也可看到前面的知识在小波分析中的运用.

本书在内容选取中注重现代分析中基本思想、基本理论和基本方法的讲解, 同时也注意介绍某些研究前沿问题和最新研究进展. 根据本人以往教学和科研的体会, 我们在本书中给出了若干注记. 它们或对有关结论作进一步阐明、或指出运用结论中应注意的问题、或给出与结论相关联的背景知识和最新研究进展、或提出某些目前尚未解决的重要问题等. 目录中带*号的内容供有兴趣的读者阅读. 凡已具备"实变函数", "复变函数"及"泛函分析" 等课程知识的读者, 学习本课程应当没有问题.

本课程是北京师范大学研究生院2005–2006年建设的硕士研究生精品课程之一. 本书是北京师范大学数学科学学院2005–2008年建设的硕士研究生基础课程系列教材之一. 最近本书也被北京市教委列为2007年北京市高等教育精品教材建设立项项目. 编者非常感谢北京师范大学研究生院和数学科学学院在本课程讲授和本书编写过程中所给予的支持. 北京师范大学陆善镇教授对本书的编写思想提出了十分重要的指导性意见, 美国Auburn大学韩永生教授与编者就书中某些内容有过深入的讨论, 北京大学刘和平教授给出了很好的建议, 编者在此向他们表示最诚挚的谢意. 此外, 编者也十分感谢北京师范大学出版社为本书的编辑出版所做的大量工作.

限于本人学识水平, 本书中难免存在错误和不妥之处, 恳请专家和读者不吝赐教指正.

编者　(dingy@bnu.edu.cn)

2007年12月

本书中主要函数空间的定义和相关记号

- $\mathbb{R}^n$: n维欧氏空间. $x\cdot y=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j$ 记x和y的内积, $|x|=(x\cdot x)^{1/2}$为x的模. 仍用0记$\mathbb{R}^n$中的零元$(0,0,\cdots,0)$.
- $\mathbb{Z}_+$: 全体非负整数. $\mathbb{Z}_+^n:=\mathbb{Z}_+\times\cdots\times\mathbb{Z}_+$. $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$称为多重指标,$|\alpha|:=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$称为$\alpha$的阶.
- $|E|$: $\mathbb{R}^n$中Lebesgue可测集（本书中简称可测集）E的测度.
- $L^p(\mathbb{R}^n)\,(1\leqslant p<\infty)$: $\mathbb{R}^n$上p次Lebesgue空间, 其定义为
$$L^p(\mathbb{R}^n)=\left\{f:\|f\|_p=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^pdx\right)^{1/p}<\infty\right\}.$$
- $L^\infty(\mathbb{R}^n)$: $\mathbb{R}^n$上本性有界函数空间, 其定义为
$$L^\infty(\mathbb{R}^n)=\left\{f:\|f\|_\infty=\inf_{\substack{E\subset\mathbb{R}^n\\|E|=0}}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus E}|f(x)|\right)<\infty\right\}.$$
- $L^p_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)\,(1\leqslant p<\infty)$: $\mathbb{R}^n$中的任何紧集上均p次可积函数的全体.
- $L(\log^+L)^\beta(E)$: E上的Zygmund类, 即所有满足$|f|(\log^+|f|)^\beta\in L^1(E)$的函数$f$的全体, 其中: E在$\mathbb{R}^n$中可测, $\beta>0$且$\log^+t=\max\{\log t,0\}\,(t>0)$.
- p': 数$p\,(1\leqslant p\leqslant\infty)$的共轭数,即$p'$满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.
- D^α (α为多重指标): $|\alpha|$阶微分算子, 其定义为: $D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$.
- $C^m(\mathbb{R}^n)$ $(m\in\mathbb{Z}_+)$: $\mathbb{R}^n$ 上具有m阶连续偏导数的函数空间, 其定义为:
$$C^m(\mathbb{R}^n)=\{f:D^\alpha f\in C(\mathbb{R}^n),\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\ |\alpha|\leqslant m\},$$
这里$C(\mathbb{R}^n)$为$\mathbb{R}^n$上连续函数空间(此时$\alpha=0$). 记$C^\infty(\mathbb{R}^n)$为$\mathbb{R}^n$上具有无穷阶导数的函数空间.
- $C_0(\mathbb{R}^n)$: 即$C(\mathbb{R}^n)$中满足$|x|\to\infty$时极限为0的函数空间.
- ${\rm supp}(f)$: 函数f的支集, 其定义为: ${\rm supp}(f)=\overline{\{x\in\mathbb{R}^n:f(x)\neq0\}}$. 如${\rm supp}(f)$ 为$\mathbb{R}^n$ 中的紧集,则说f具有紧支集.
- $C_c^m(\mathbb{R}^n)$ $(m\in\mathbb{Z}_+)$: $\mathbb{R}^n$上具有紧支集的$C^m(\mathbb{R}^n)$函数空间. $C_c(\mathbb{R}^n)$为$\mathbb{R}^n$上具有紧支集的连续函数空间,而$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$为具有紧支集的$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数空间.

目　录

第一章 基本知识

§1.1 卷积

定义1.1.1 设f, g为$\mathbb{R}^n$ 上的两个可测函数, 如果对a.e.[1] $x \in \mathbb{R}^n$, 积分

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt$$

存在, 那么称其为f与g的卷积, 记为$f*g$. 即

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

由卷积的定义立即可得到下面的

命题1.1.1 对于任意的$f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 卷积运算满足以下性质:

(a) $f*g = g*f$; (可交换性)

(b) $(f*g)*h = f*(g*h)$; (可结合性)

(c) $(\alpha f + \beta g)*h = \alpha(f*h) + \beta(g*h), \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$; (线性)

(d) $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$. (连续性)

证明 略. □

[注1.1.1] 按通常的函数乘法, 两个$L^1(\mathbb{R}^n)$中函数的乘积未必是$L^1(\mathbb{R}^n)$中的函数. 例如: 令

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & x \in (0,1), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (0,1), \end{cases}$$

那么$f, g \in L^1(\mathbb{R})$, 但$f \cdot g \notin L^1(\mathbb{R})$. 命题1.1.1表明, 如果视卷积为$L^1(\mathbb{R}^n)$上的"乘法"运算, 那么$L^1(\mathbb{R}^n)$是$\mathbb{C}$上的交换Banach代数（加法为通常的函数加法）, 但它是无单位元的(见习题二第3题).

命题1.1.1(d)是下面结论的特殊情形.

[1]本书中"a.e." 表示几乎处处(almost everywhere)或(对于)几乎每个(for almost every).

定理1.1.2 (Young不等式) 设$1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$满足$1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. 若$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$及$g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 则$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.1.1}$$

证明 首先设$1 \leqslant q < \infty$. 注意到

$$\frac{1}{q'}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{r}=1, \quad \frac{p}{r}+\frac{p}{q'}=1, \quad \frac{q}{r}+\frac{q}{p'}=1.$$

对q', r, p', 应用Hölder不等式得到

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p/q'}(|f(y)|^{p/r}|g(x-y)|^{q/r})|g(x-y)|^{q/p'}dy \\
&\leqslant \|f\|_p^{p/q'}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p|g(x-y)|^q dy\right)^{1/r}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x-y)|^q dy\right)^{1/p'} \\
&= \|f\|_p^{p/q'}\|g\|_q^{q/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p|g(x-y)|^q dy\right)^{1/r}.
\end{aligned}$$

由上式并应用Fubini定理, 有

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_r &\leqslant \|f\|_p^{p/q'}\|g\|_q^{q/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p|g(x-y)|^q dxdy\right)^{1/r} \\
&= \|f\|_p^{p/q'}\|g\|_q^{q/p'}\|f\|_p^{p/r}\|g\|_q^{q/r} \\
&= \|f\|_p\|g\|_q.
\end{aligned}$$

如$q=\infty$, 则必有$p=1$且$r=\infty$, 此时(1.1.1)显然成立. □

[注1.1.2] Young不等式表明, 如p, q, r满足定理1.1.2中的关系, 那么对取定的$g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 卷积是$L^p(\mathbb{R}^n)$到$L^r(\mathbb{R}^n)$的有界线性算子.

例1.1.1 记$I=[0,1] \subset \mathbb{R}$, χ_I为I的特征函数.[2] 容易验证,

$$(\chi_I * \chi_I)(x)=\begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ 2-x, & x \in (1,2], \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

上面的例子启示我们, 通过卷积运算可以改善函数的连续性.

[2] “χ_E”表示集合E的特征函数, 即: 如$x \in E$, 那么$\chi_E(x)=1$, 否则$\chi_E(x)=0$.

命题1.1.3 卷积运算满足以下性质:

(a) 设$1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. 那么$f * g$是$\mathbb{R}^n$上一致连续的有界函数;

(b) 如$\operatorname{supp}(f) \subset E_1$且$\operatorname{supp}(g) \subset E_2$, 那么$\operatorname{supp}(f * g) \subset E_1 + E_2$;[3]

(c) 设$1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. 那么$f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$;

(d) 设$f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C_c^m(\mathbb{R}^n)$. 那么$f * g \in C^m(\mathbb{R}^n)$, 且对$|\alpha| \leqslant m$,

$$D^\alpha (f * g)(x) = (f * D^\alpha g)(x).$$

证明 留作习题. □

由命题1.1.3立即可得

推论1.1.4

(a) 设$f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 那么$f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(b) 设$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\operatorname{supp}(f)$为紧集. 那么当$g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$时,$f * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

现运用推论1.1.4给出局部紧Hausdorff空间上Urysohn引理在$\mathbb{R}^n$上形式的直接证明.

定理1.1.5 设$K \subset \mathbb{R}^n$为紧集, 而$U \subset \mathbb{R}^n$为开集, 且$K \subset U$. 则存在$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使得对任意的$x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, 且

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$$

证明 记

$$\eta = \begin{cases} \inf\{|x-y| : x \in K \text{ 且 } y \notin U\}, & U \neq \mathbb{R}^n, \\ 1, & U = \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

则$\eta > 0$. 令$V = \bigcup_{y \in K}\{x : |x-y| < \frac{\eta}{2}\}$. 显然有$K \subset V$且$\overline{V} \subset U$. 现取$\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使得$\psi \geqslant 0$, $\operatorname{supp}(\psi) \subset \{x : |x| < \frac{\eta}{2}\}$且$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 1$. 由推论1.1.4(b), 知$f = \psi * \chi_V$即为所求. □

---

[3] "$E_1 + E_2$"表示集合E_1和E_2的和, 即: $E_1 + E_2 = \{x + y : x \in E_1 \text{ 且 } y \in E_2.\}$

§1.2 Hardy-Littlewood 极大算子

§1.2.1 极大算子M的弱(1,1)型和(p,p)型

定义1.2.1 设$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 那么$f$的中心Hardy-Littlewood极大函数 Mf定义为:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2.1}$$

这里(及以后), $B(x,r)$记以x为中心, r为半径的开球, 即$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$, (简记$B(0,r)$为$B(r)$).

中心Hardy-Littlewood极大函数的另一个定义方式是

$$\bar{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(t)|dt. \tag{1.2.2}$$

这里（及以后）记$Q(x,r)$为$\mathbb{R}^n$中以x为中心, 边长为r, 且边与坐标轴平行的方体.

定义1.2.2 设$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 那么$f$的非中心Hardy-Littlewood极大函数$\tilde{M}f$定义为:

$$\tilde{M}f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)|dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2.3}$$

其中上确界取自$\mathbb{R}^n$中一切包含x, 边与坐标轴平行的方体.

[注1.2.1] 极大函数Mf也可以通过卷积来表现. 事实上, 如记v_n为$\mathbb{R}^n$ 中单位球$B(1)$的测度, 那么$Mf(x) = \sup\limits_{r>0}(|f| * \varphi_r)(x)$,这里$\varphi(t) = \frac{1}{v_n}\chi_{B(1)}(t)$,而$\varphi_r(t) = \frac{1}{r^n}\varphi(\frac{t}{r})$.

命题1.2.1 (Hardy-Littlewood极大函数定义的等价性) 设$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 那么存在仅与$n$有关的常数$A, B$, 使得对一切$x \in \mathbb{R}^n$,

$$Mf(x) \leqslant A\bar{M}f(x) \leqslant A\tilde{M}f(x) \leqslant BMf(x). \tag{1.2.4}$$

证明 留作习题. □

由命题1.2.1, 对于$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 如无特别说明, 此后统称$Mf, \bar{M}f$以及$\tilde{M}f$为$f$的Hardy-Littlewood极大函数, 并依据问题的需要可选用不同的定义方式.

命题1.2.2 (Hardy-Littlewood极大函数的下半连续性) $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$中任意函数$f$的Hardy-Littlewood极大函数$Mf$在$\mathbb{R}^n$中是下半连续的.