GAOZHONG
DAISHU CESHI
YU PINGXI

高中代数测试与评析

（上册）

SHANGHAI
JIAOYU
CHUBAN
SHE

SHANGHAI
JIAOYU
CHUBANSHE

上海教育出版社

高中代数测试与评析

（上 册）

姚善源 周继光 编

上海教育出版社

(沪)新登字107号

高中代数测试与评析

（上　册）

姚善源　周继光　编

上海教育出版社出版发行

（上海永福路123号）

各地新华书店经销　　　江苏宜兴印刷二厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 7.25　字数 158,000

1994年8月第1版　　1994年8月第1次印刷

印数 1— 4,550本

ISBN 7-5320-3729-0/G·3639　　定价：4.85元

前　言

教学应当遵循教学规律，循序渐进．基础知识学不扎实，更深更多的东西就学不好．实践表明，如果脱离学生实际，教学中片面追求“多”、“深”、“难”，其结果适得其反．因此只有从学生的实际出发进行教学，才能取得较好的效果．我们认为，从教学大纲的基本要求出发，按照一般中学中等程度学生的接受水平，对课本的每一单元学习提出具体的目标，并根据目标精心设计基础测试题，然后通过学生的自我检测，及时发现问题，及时补救．这样能使教和学做到目标明、反馈快、负担轻、针对性强，从而有效地提高课堂教学的效率．我们在这一思想的指导下，编写了《高中代数测试与评析》(上册)．

本书有以下两个特点：

一是与现行高中课本配套，密切配合教学进程，与教材同步，为教学所实用．

二是取材立足课本，但稍有变通．在练习的形式上，力求弥补课本的不足；在练习的内容上，注意以新带旧，并适当为后继学习铺垫台阶．这样使学生易懂易学，使用方便．

本书分章、分单元编写，每单元安排了“学习目标”、“基础测试”、“测试讲评”、“针对训练”四个栏目，便于测试、反馈与训练同时进行．

“学习目标”，根据现行大纲的基本要求，提出具体、明确、可测的目标，便于学生在单元学习中掌握学习的要求和范围，以增强学习的自觉性．

“基础测试”，按照学习目标中识记、理解、应用的水平要求，以客观性试题为主进行设计，力求题量适度，难度适中．每份试卷分A、B两组．A组试题体现高中数学最基本的要求，题目难度不大，有利于增强学生学习的信心，调动学生学习的积极性．试题突出基础知识、基本技能、基本方法的测试，便于全面检查学生掌握“三基”的情况．B组试题体现了知识的基本联系，以便检查学生的思维能力．每份试卷的答题时间为40分钟左右．同时，每份试卷都给出A、B两组的评分．A组满分80分，B组满分20分，共计100分，以便根据学生的得分与答卷时间，对学生在这一单元的学习水平作出评价，便于师生有针对性地教和学．

“测试讲评”，对学生测试中的常见错误进行分析讲评，帮助学生找出错误的原因，并指出纠正的方法．同时，对测试题所涉及的有关知识进行归纳和整理，并给予解题方法的指导和规律的点拨．

“针对训练”，选编适量典型性、代表性、思考性较强的题目，供学生单元学习结束后进行针对性复习与练习时选用．

每一章末都安排一至两份自我测试题供学生在阶段复习或期中、期末复习时选用．“自我测试题”的知识覆盖面较大，具有一定的综合性，有利于学生加深对概念的理解和提高综合运用知识的能力．

本书末附有测试题和训练题的答案或提示，便于学生练习后自检．

编　者

1994年1月

目　录

第一章　二次函数、幂函数、指数函数和对数函数

一　二次函数

【学习目标】

1．能说出二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质.

2．会用"配方法"确定二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的顶点坐标、对称轴.

3．会把二次函数 $y=ax^2$ 的图象平行移动得到函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象.

4．会用"待定系数法"求二次函数的解析式.

5．会由二次函数的解析式画出它的图象或判断其大致形状，并能从图象上观察在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴的左(右)侧，y 随着 x 的增大而增大还是随着 x 的增大而减小.

6．会求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最大值或最小值，并会解决与二次函数最大(小)值有关的实际问题.

【基础测试】

卷　一

(A　组)

1．填空题.$(5'\times 12=60')$

(1) 当__________时, 函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 是二次函数.

(2) 周长为 l(cm) 的扇形的面积 y(cm^2) 和它的半径 x(cm) 间的函数关系式是____________.

(3) 抛物线 $y=-5x^2$ 的顶点是______, 开口向______.

(4) 已知函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$, 当 $x_1<x_2<0$ 时, 对应的函数值 y_1 和 y_2 的大小关系是______ $<$ ______.

(5) 把函数 $y=-2x^2$ 的图象向下平移 3 个单位, 就得到函数____________的图象.

(6) 把函数 $y=-2x^2$ 的图象向左平移 5 个单位, 就得到函数____________的图象.

(7) 抛物线 $y=x^2+4x+1$ 的顶点坐标是__________.

(8) 抛物线 $y=x^2+4x+1$ 的对称轴是____________.

(9) 已知函数 $y=x^2+4x+1$, 当________时, y 随着 x 的增大而减小.

(10) 已知函数 $y=-x^2+3x-1$, 当__________时, y 随着 x 的增大而增大.

(11) 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 和 y 轴的交点坐标是________.

(12) 抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-3$ 上纵坐标是 -4 的点的横坐标是____________________.

2. 求出抛物线 $y=-\frac{2}{3}x^2+2x-1$ 的顶点和对称轴. (10′)

3. 怎样平行移动抛物线 $y=-3x^2$ 才能得到抛物线 $y=-3x^2-6x+1$? (10′)

（B　组）

1．求证：当 $b^2-4ac<0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 和 x 轴没有交点．　(10′)

2．求证：当 $a<0$，$b^2-4ac>0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在 x 轴的上方．　(10′)

卷　二

（A　组）

1．填空题：(5′×4=20′)

(1) 当__________时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 关于 y 轴对称．

(2) 当__________时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点．

(3) 函数 $y=x^2+5x-3$ 的最____值是__________．

(4) 当 $x=$________时，函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-3$ 取得最大值．

2．选择题*：(6′×2=12′)

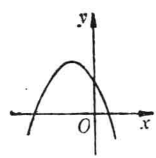
(1) 下右图是函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，那么 a、b、c 的值满足　（　）

(A) $a<0$, $b>0$, $c>0$;

(B) $a<0$, $b<0$, $c>0$;

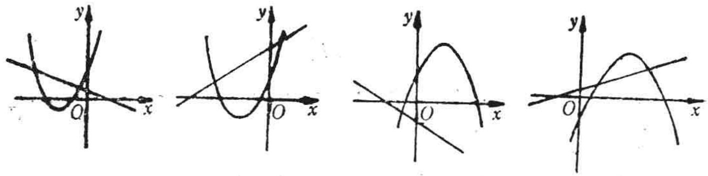
(C) $a<0$, $b<0$, $c<0$;

(D) $a<0$, $b>0$, $c<0$.



(2) 函数 $y=ax+b$ 和 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ 的图象是　（　）

* 本书的选择题均有四个选择支，其中有且只有一个是正确的。



(A)　　　(B)　　　(C)　　　(D)

3．填空题：$(6'\times3=18')$

(1) 已知二次函数的图象过点$(1,\ 3)$、$(-1,\ 2)$和$(0,5)$，那么它的解析式是________________.

(2) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标是$(-2,\ 3)$，且过点$(1,\ -2)$，那么 $a=$______，$b=$______，$c=$______.

(3) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点$(-4,\ 0)$、$(2,\ 0)$和$(1,\ 3)$，那么$a=$____，$b=$______，$c=$______.

4．画出函数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3x-4$ 的图象．　$(10')$

5．周长为 l 的矩形，长、宽各为多少时，它的面积最大？最大面积是多少？　$(10')$

6．已知圆心距为 6cm 的两个圆外切，求这两个圆的面积的和的最小值．　$(10')$

(B　组)

1．求函数 $y=-3x^2+4x+2(-1\leqslant x\leqslant2)$ 的最大值和最小值．　$(10')$

2．已知三角形的一个内角为 60°，夹这个角的两边的和是 8cm，求这个三角形的周长的最小值．　$(10')$

【测试讲评】

1．函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象可以由函数 $y=ax^2$ 的图

象平行移动而得到，可见函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与函数 $y=ax^2$ 的图象的形状相同，只是位置不同．所以二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的形状由 a 决定，b、c 只影响它的位置．

(1) 抛物线 $y=ax^2$ 的顶点是原点，对称轴是 y 轴，要求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标，一般需要把二次三项式 ax^2+bx+c 配方，化成 $a(x+m)^2+k$ 的形式．这里 $m=\frac{b}{2a}$，$k=\frac{4ac-b^2}{4a}$．如卷一（A 组）第 2 题，一般先配方：

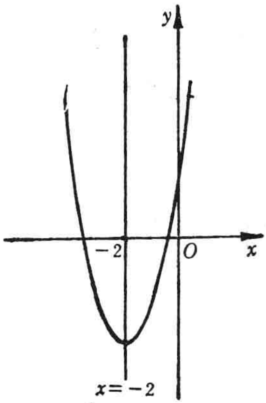
$$
\begin{aligned}
y&=-\frac{2}{3}x^2+2x-1=-\frac{2}{3}(x^2-3x)-1\\
&=-\frac{2}{3}\left[x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-1\\
&=-\frac{2}{3}\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]-1\\
&=-\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

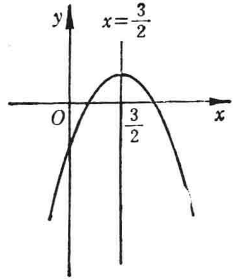
从而求得顶点坐标是 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，对称轴是直线 $x=\frac{3}{2}$．

(2) 如何平移抛物线 $y=ax^2$ 得到抛物线 $y=ax^2+bx+c$，是向左还是向右，是向上还是向下，往往容易搞错．解题时，一般先求出抛物线的顶点位置，然后与原点位置比较．如卷一（A 组）第 3 题，由配方求出抛物线 $y=-3x^2-6x-1$ 的顶点坐标是 $(-1, 4)$，可知其顶点在第二象限，因此把抛物线 $y=-3x^2$ 向左平移 1 个单位，再向上平移 4 个单位即可得到抛物线 $y=-3x^2-6x+1$．

(3) 根据抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴 $\left(\text{直线 } x=-\frac{b}{2a}\right)$ 与它的开口方向（由系数 a 的正、负决定），容易判断抛

物线 $y=ax^2+bx+c$ 在它的对称轴的左(右)侧，y 是随着 x 的增大而增大，还是 y 随着 x 的增大而减小. 如卷一(A 组)第 1(9)题，$a>0$，抛物线开口向上，对称轴是直线 $x=-2$，画出它的大致形状(下左图)，由图可知，当 $x<-2$ 时，y 随着 x 的增大而减小.





又如卷一(A 组)第 1(10)题，$a<0$，抛物线开口向下，对称轴是直线 $x=\frac{3}{2}$，由上右图可知，当 $x<\frac{3}{2}$ 时，y 随着 x 的增大而增大. 注意：解这类题目时，可以由 a、b 的值直接代入 $x=-\frac{b}{2a}$，求出对称轴，并且只要根据抛物线的对称轴和开口方向，画出它的大致图形即可.

(4) 函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最大(小)值，一般可以通过配方求得.

在 $a>0$ 时，由 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$ 可得

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a},$$

所以当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数 y 有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；

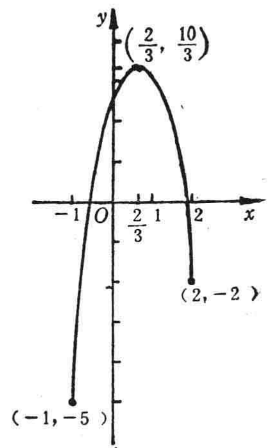
在 $a<0$ 时，由 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\leqslant 0$ 可得

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a},$$

所以当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数 y 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

注意：这里的 $-\frac{b}{2a}$、$\frac{4ac-b^2}{4a}$ 分别是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点的横坐标和纵坐标. 因此如果已知抛物线的顶点坐标和系数 a 的正、负，完全可以从抛物线的大致图形上直观得出上面的结论.

这里还要指出，当函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的定义域不是一切实数时，那么这个函数就可能同时有最大值和最小值. 如卷二(B 组)第 1 题，$y=-3x^2+4x+2=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$ $(1\leqslant x\leqslant 2)$. 它的图象如右图所示. 当 $x=-1$ 时，$y=-5$；当 $x=2$ 时，$y=-2$. 所以这个函数有最大值 $\frac{10}{3}$，最小值 -5. 一般地，函数 $y=ax^2+bx+c(\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$，它的最大值和最小值在 $x=-\frac{b}{2a}$ 或 $x=\alpha$ 或 $x=\beta$ 处取得.



2. 求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的解析式，一般用“待定系数法”，确定系数 a、b、c 需要三个条件.

(1) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的三点坐标. 如卷二

(A 组)第 3(1)题，只要列出关于 a、b、c 的三元一次方程组，即可解得 $a=-\frac{5}{2}$，$b=\frac{1}{2}$，$c=5$.

(2) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标和另一点的坐标，那么可以把解析式写成 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式. 如卷二(A 组)第 3(2) 题，由于已知抛物线的顶点坐标是$(-2,3)$，所以可设 $y=a(x+2)^2+3\cdots$①，把点$(1, -2)$的坐标代入①，得 $a=-\frac{5}{9}$，再将 a 的值代入①，并化为一般式，可求得 $b=-\frac{20}{9}$，$c=\frac{7}{9}$.

(3) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的两个交点坐标$(x_1, 0)$、$(x_2, 0)$和另一点的坐标，那么可以把解析式写成 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$的形式. 如卷二(A 组)第 3(3)题，由于已知抛物线与 x 轴的交点坐标是$(-4, 0)$、$(2, 0)$，所以可设 $y=a(x+4)(x-2)\cdots$②，把$(1, 3)$的坐标代入②，可得 $a=-\frac{3}{5}$. 再将 a 的值代入②，并化成一般式，可得 $b=-\frac{6}{5}$，$c=\frac{24}{5}$. 这里还可以根据抛物线的对称性，直接得出它的顶点的横坐标是 $\frac{x_1+x_2}{2}$.

(4) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 和 y 轴的交点的坐标，那么 c 就等于交点的纵坐标. 它的特殊情形是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，这时 $c=0$. 如卷一(A 组)第 1(11)题，卷二(A 组)第 1(2)题.

3. 图象是研究函数的工具. 画二次函数

$$y=ax^2+bx+c$$

的图象时，一般先配方，把解析式化成

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

的形式，求出抛物线的顶点和对称轴，然后在对称轴两侧列出 3 组对称点的坐标(这样列表、描点，可以做到心中有数)，再用光滑曲线连接，就能得出较准确的抛物线. 如卷二(A 组)第 4 题，配方得出 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{1}{2}$ 后，可以这样列表：

x	…	0	1	2	3	4	5	6	…
y	…	-4	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-4	…

这里还要指出，函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的形状和位置与系数 a、b、c 密切相关，我们由此可以根据它的图象确定 a、b、c 的正、负. 如卷二(A 组)第 2(1)题，由抛物线的开口向下，可知 $a<0$；由顶点在第二象限，可知 $-\frac{b}{2a}<0$，$b<0$；由图象和 y 轴的交点在原点上方，可知 $c>0$. 所以应选(B). 上面这种解选择题的方法，称为"直接法". 解选择题时，常常还采用"筛选法". 如卷二(A 组)第 2(2)题，a 的正、负对抛物线来说决定它的开口方向，对直线来说决定它的向上方向与 x 轴的正方向的夹角是锐角还是钝角，由此容易排除(A)、(D)，又在(C)中，直线的位置决定 $b<0$，但抛物线的对称轴的位置决定 $b>0$，因此(C)也应当排除，所以应选(B).

4．求二次函数的最大值和最小值，可以解决某些能列出二次函数式的实际问题，在生产实际中有着广泛的应用. 如卷二(A 组)第 5 题，设矩形的长为 x，那么宽为 $\frac{l-2x}{2}$，面积

$$S=x\cdot\frac{l-2x}{2}=-x^2+\frac{l}{2}x=-\left(x-\frac{l}{4}\right)^2+\frac{l^2}{16},$$

所以当长为 $\frac{l}{4}$，宽为$\frac{l}{4}$ 时，矩形的面积最大，最大面积为 $\frac{l^2}{16}$.

即当矩形为正方形时，它的面积最大. 解这类题目的一般方法是，先适当选择一个自变量，根据题意列一个二次函数的解析式，然后再利用配方法求得函数的最大值或最小值.

【针对训练】

1. 填空题：

(1) 当______时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在原点.

(2) 当______时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$过点(1, 0).

(3) 当______时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在 y 轴的左侧.

(4) 当______时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点(0, −3).

(5) 当______时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 全部在 x 轴的下方.

(6) 当______时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在 x 轴上.

(7) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 和 x 轴的两个交点的横坐标是 −7 和 −4，那么它的对称轴是__________.

(8) 把抛物线 $y=-2x^2$ 向左平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位，得到抛物线__________.

(9) 已知函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象关于直线 $x=-\frac{5}{2}$ 对称，且开口向下，那么当______时，y 随着 x 的增大而减小.

(10) 抛物线 $y=-\frac{2}{3}x^2+4x-1$ 的顶点坐标是______，对

称轴是__________，最____值是____.

2．根据下列条件，写出二次函数的解析式.

(1) 当 $x=-3$ 时，函数的最大值是 -1；当 $x=0$ 时，函数值是 -6.

(2) 图象过点 $(-3,\ 0)$、$(6,\ 0)$ 和 $(-1,\ -5)$.

(3) 图象的顶点坐标是 $\left(-\dfrac{3}{2},\ -5\right)$，且过原点.

3．已知等腰梯形的周长是 12 cm，一个内角是 60°，腰长是多少时，它的面积最大？最大面积是多少？

4．画出函数 $y=x^2-2|x|$ 的图象.

5．a 取什么值时，函数 $y=ax^2+(2-a)x+a+1$ 有最大值 1？

6．a 取什么值时，函数 $y=x^2-2ax+a+2a^2$ 有最小值？最小值是多少？

7．求函数 $y=\dfrac{1}{x^2+2x+3}$ 的定义域和它的最大值.

8．设 θ 是三角形的一个内角，抛物线

$$y=x^2\cos\theta+x\sin\theta-2$$

的顶点在直线 $y=\dfrac{1}{4}x-2$ 上，求 θ.

二　一元一次不等式组和一元二次不等式

【学习目标】

1．会解一元一次不等式组，并能把它的解集在数轴上表示出来.