

3号 自考 3号丛书

2005年

核心学案

自学考试新教材·公共课(一)

高等数学 (工专)

教材依据 / 高等教育出版社《高等数学(工专) 上下》
组编 / 全国高等教育自学考试命题研究组
陆庆乐 马知恩 / 主编

同步辅导同步过关

指定教材核心浓缩

预测试卷历年真题



航空工业出版社

00 709722



数学·力学·力学

高等教育自学考试3导丛书

重庆师大图书馆

核心学案

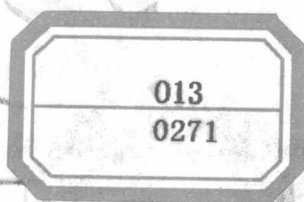
自学考试新教材

应对自考课程大规模修订后新教材内容

高等数学(工专)

教材依据/高等教育出版社《高等数学(工专)上、下》 主编/陆庆乐 马知恩
编/全国高等教育自学考试命题研究组

013
0271



CS1026807

航空工业出版社

3P

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 工专/自学考试命题研究组,《高等数学》
编委会编. —北京:航空工业出版社,2005.1
(自学考试新教材核心学案. 公共课. 第1辑)

ISBN 7-80183-527-1

I. 高... II. ①自...②高... III. 高等数学—高等
教育—自学考试—自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 128673 号

高等数学(工专)

Gaodeng Shuxue (Gong Zhuan)

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

发行部电话:010-84926529 010-64978486

三河市燕山印刷有限公司印刷

全国各地新华书店经售

2005 年 1 月第 1 版

2005 年 1 月第 1 次印刷

开本: 850 × 1168 1/32

印张: 65

字数: 2400 千字

(全 12 册) 定价: 168.00 元

简介



自強不息
厚德載物

张立勇 一个普通的农民孩子，清华大学打工8年，一直坚持刻苦自学，不仅80分以上通过四级、六级考试，托福考试630分，而且获得了北京大学本科文凭。2004年10月共青团中央向张立勇颁发了“中国青年学习成才奖”，他被誉为共青团中央树立的全国十大杰出学习青年之一。

张立勇的事迹被中央电视台“东方之子”“面对面”“新闻会客厅”等多个栏目采访报道，被北京电视台、中国教育电视台等电视媒体，新浪网、雅虎网等网络媒体，《人民日报》《中国青年报》《大学生》等报纸杂志，共100多家媒体采访报道，在社会上引起很大反响。被众多青年学子视为学习的榜样。

“**因**为我选择了这样一条自己的人生道路，所以我没有机会像大多数的学子那样，经历从学校到学校，顺利地接受高等教育的过程。我只能通过自学来圆我的大学梦。”

“**我**常常想，上帝会厚爱每一个人的，它会用不同的方式对你所付出的艰辛和努力给予补偿。但是，上帝只钟爱那些自助的人。如果你不努力，你不拼搏，所有的机会都会和你失之交臂。如果在这十年之中，我放弃了对人生理想和人生价值的追求，那么，当这一切机遇到来的时候，我又怎么可能把握住呢？”

“**大**家觉得我是一个榜样，但我个人并不这么想。社会把我放到这样的位置，充当这样的角色，能够影响一些人，这是最让我自豪的。”

----- 张立勇



★ 编委会 ★

导教·导学·导考



编委主任：程 琨 魏 莹



编委名单：（按姓氏笔画排列）

万 鹏 刘 斌 刘海飞 刘 涛

闫树茂 宋玉珍 张 沁 张远盛

肖 果 邵桂英 崔海燕 程 琨

董金波 董 蕾 蒋 怡 魏 莹



“其实人的智力相差并不悬殊,可毅力的差距却使每个人拥有各自不同的前途。尤其是对于参加自考的人来说,毅力是非常重要的,当然还需要有得当的学习方法。”

“有很多人抱怨自考难以通过,然而正是这种严格的管理制度保证了自考毕业生的质量,使自考生获得了社会的认可和一致的好评。”

——一名从自考获得本科学历后又考上硕士生直到博士生的成功者的自述

参加自学考试,除了需要具备以上成功者所提到的毅力和方法外,还应该了解自考的每门课程都采用我们通常所说的“过关”考试——只要通过课程的一次性考试,就可拿到课程的学分,通过某专业要求课程的全部考试,也会顺利获得这个专业的自考毕业证。然而,一分之差也会导致参考课程过关失败,有些考生难免多次重考才能修完规定课程。因此,在本书的编写过程中,编委们反复研讨自学考试的特点,努力寻求帮助自考生的有效途径。本书是多位学者、专家,历时数年的产物,具有以下优点。

一

掌握核心内容,了解命题动态,注重知识系统化

了解命题精神,是自学考试的核心,是达到专业标准的关键。自学考试的课程命题以课程自学考试大纲为依据,以最新指定教材为范围。本书紧紧贴住每一门课程的考试大纲和指定教材,用【考纲要求提示】、【知识结构图示】、【核心内容速记】、【同步精华题解】、【典型例题解析】等多个栏目解剖教材内容,是一套脉络清晰的速成讲义,可以使考生在厚厚的教材中抓住重点,对教材的系统学习有极强的指导作用。同时,对于临考考生,它又可以成为离开教材仍能独立使用的贴身笔记。《核心学案》摒弃了一些辅导书的题海战术,引导考生重视教材的学习。那么怎样去自学才能看懂教材并将厚书读“薄”呢?抓住重点才是关键。《核心学案》用清晰的思路,帮助考生将教材知识系统化,使考生在答卷时知识系统、逻辑清晰、胸有成竹。

二

依据权威资料,重视最新信息,紧跟时代脉搏

参加高等教育自学考试的考生,常常会感到市面上的辅导资料甚至教材都有



滞后性。全国高教自考办也认可这一事实,并采取了一些有效措施,比如在发布考试大纲和指定教材的基础上又组编了《全国高等教育自学考试活页丛书》等补充学习材料,并明文规定增补内容纳入统一命题范围,要占卷面5~10分。同时高教自考办还加快了教材的修订频率。面对这种情况,原有的一些辅导资料的严重滞后和内容缺陷也是必然的。本套《核心学案》则高度重视这一现象,在依据考试大纲和指定教材时,选用高教自考办的最新修订本(2004年起自考课程已在做大规模修订),并将活页丛书等内容融会贯通其中,有的科目还特意增加了【最新内容补充】以引起考生重视。另外,本套书还吸收了许多自考强化班的授课精华,目的是帮助考生了解最新考试动态。我们还将开通网上自考辅导随时更新有关内容和提供特色售后服务,欢迎点击 www.study-book.com.cn。

三

做到讲练结合,力求精讲精练,提高辅导命中率

本套书配有【同步精华题解】和综合演练习题,是在对考纲、教材归纳总结后选编的一些经典同步练习题。这些练习题的题型与考试题型完全一致,使考生能够迅速掌握答题方法与同步要点。另外,本书的编者还依据各科内容,遴选考点,在对历年实考真题做详细分析的基础上精编了《命题预测试卷》。这些试卷不仅题型题量完全与真考试卷保持一致,而且力求覆盖考试大纲的各科重点。考生如果在学习《核心学案》的基础上再认真研习《命题预测试卷》,既可熟悉题型、了解试卷难易度,又可将其作为自测、练习之用,找出差距,查漏补缺。因此,在《核心学案》的首印首发优惠活动中,为了帮助考生用好的学习方法提高应试过关率,我们特意将《命题预测试卷》作为《核心学案》的赠品送给每个考生。这样,本书即成为真正具有命中率的辅导用书。

总之,面对数千万的自考生,我们是抱着高度的责任感来完成这项使命的。我们的目的是:减轻考生的学习负担;我们口号是:用最短的时间使考生自考过关!因为工作量的巨大和考期的压力,也许我们遗留了某些不足,欢迎读者批评指正。来函可致: reader@study-book.com.cn,我们将高度重视,以求完善。

编者



第一章 函数

考纲要求提示	(1)
知识结构图示	(1)
核心内容速记	(1)
典型例题点拨	(3)



第二章 极限概念·函数的连续性

考纲要求提示	(7)
知识结构图示	(7)
核心内容速记	(8)
典型例题点拨	(11)



第三章 导数与微分

考纲要求提示	(15)
知识结构图示	(15)
核心内容速记	(16)
典型例题点拨	(18)



第四章 微分学应用

考纲要求提示	(23)
知识结构图示	(23)
核心内容速记	(24)
典型例题点拨	(26)



第五章 不定积分概念与积分法

考纲要求提示	(33)
知识结构图示	(33)
核心内容速记	(33)
典型例题点拨	(35)



第六章 定积分及其应用

考纲要求提示	(42)
知识结构图示	(42)
核心内容速记	(43)
典型例题点拨	(47)



第七章 空间解析几何

考纲要求提示	(53)
知识结构图示	(53)
核心内容速记	(53)
典型例题点拨	(55)



第八章 多元函数微分学

考纲要求提示	(61)
知识结构图示	(61)
核心内容速记	(61)
典型例题点拨	(64)



第九章 多元函数积分学

考纲要求提示	(71)
知识结构图示	(71)
核心内容速记	(71)
典型例题点拨	(74)



第十章 常微分方程

考纲要求提示	(80)
知识结构图示	(80)
核心内容速记	(80)
典型例题点拨	(84)



第十一章 无穷级数

考纲要求提示	(91)
知识结构图示	(91)
核心内容速记	(91)
典型例题点拨	(94)



综合演练题	(102)
-------------	-------



综合演练题参考答案	(106)
-----------------	-------



第一章 函数

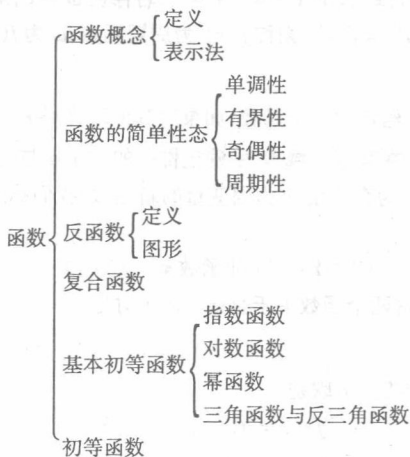


考纲要求提示

1. 深刻理解一元函数的定义;
2. 掌握函数的表示法和函数的简单性态;
3. 理解函数增量的概念;
4. 理解反函数概念和复合函数的概念;
5. 熟练掌握基本初等函数和了解什么是初等函数.



知识结构图示



核心内容速记

1. 函数

变量 y 按确定法则随变量 x 的变化而变化, 称 y 是 x 的函数. 函数有两个重要组成因素: ① 定义域; ② 对应法则. 因此, 考查一个函数时, 忽略定义域或对应法则都是无意义的.



2. 函数的简单性态 —— 单调性、有界性、奇偶性、周期性

(1) 单调性

设有函数 $y = f(x)$, $x \in D_f$, 若对任意两点 $x_1, x_2 \in D_f$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 D_f 内严格单调增加. 反之, 若对任意两点 $x_1, x_2 \in D_f$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 D_f 内严格单调减少.

(2) 有界性

若存在两个数 A 和 B , 对一切 $x \in D_f$ 恒有 $A \leq f(x) \leq B$, 则称函数 $y = f(x)$ 在 D_f 内是有界函数, 否则就称为无界函数.

(3) 奇偶性

设有函数 $y = f(x)$, 其定义域 D_f 关于原点 O 对称, 那么:

① 若对任何 $x \in D_f$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数为偶函数.

② 若对任何 $x \in D_f$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数为奇函数.

(4) 周期性

设有函数 $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 若存在 $\omega \neq 0$, 对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 恒有 $f(x + \omega) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, ω 为 $f(x)$ 的一个周期.

3. 反函数

设 $y = f(x)$ 为给定的一个函数, 如果对其值域 R_f 中的任一值 y , 都可以通过关系式 $y = f(x)$ 在其定义域 D_f 中确定惟一的一个 x 与它对应, 则得到一个定义在 R_f 上的以 y 为自变量, x 为因变量的新函数, 我们称此函数为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为

$$f^{-1}: Y \rightarrow X \text{ (即函数 } x = f^{-1}(y) \text{)}.$$

在坐标系中, 这两个函数关于直线 $y = x$ 对称.

4. 复合函数

设有两个实数集上的映射

$$f: y = f(u), \quad u \in D_f,$$

$$g: u = g(x), \quad x \in D_g.$$

如果映射 g 的值域 R_g 包含在映射 f 的定义域 D_f 中, 亦即 $R_g \subset D_f$, 于是可将 $u = g(x)$ 代入 $y = f(u)$, 得到新的函数

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad x \in D_g,$$

则我们称此函数为 f 和 g 复合而成的复合函数, u 称为中间变量.

5. 初等函数

由基本初等函数(指数函数、对数函数、幂函数、三角函数、反三角函数)

和常数经过有限次的四则运算与有限次的函数复合所产生并且能用一个解析式表出的函数,即为初等函数.



典型例题点拨

例1 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 则 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = (\quad)$.

A. $\frac{1}{2+x^2}$

B. $\frac{1}{1+(1+x^2)^2}$

C. $1+x^2$

D. $1+(1+x^2)^2$

解 选 B

因 $\frac{1}{f(x)} = 1+x^2$, 所以 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = f(1+x^2) = \frac{1}{1+(1+x^2)^2}$.

例2 下列各对函数中,是相同函数的是().

A. $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$, $\phi(x) = \sqrt{x^4-x^2}$

B. $f(x) = \arcsin(\sin x)$, $\phi(x) = x$

C. $f(x) = \lg x^2$, $\phi(x) = 2\lg x$

D. $f(x) = 1 - \cos 2x$, $\phi(x) = 2\sin^2 x$

解 选 D

因为 A、B 中两函数的对应规律不同, C 中两函数的定义域不同.

例3 函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内().

A. 有界函数

B. 无界函数

C. 上有界下无界

D. 上无界下有界

解 选 A

因为 $(|x|-1)^2 \geq 0$, 即 $x^2+1 \geq 2|x|$,

于是 $\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{2|x|}{1+x^2} \leq 1$.

例4 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上单调增, 则 $f(-\pi)$ 和 $f(\log_{\frac{1}{2}} 8)$ 的大小关系是().

A. $f(-\pi) < f(\log_{\frac{1}{2}} 8)$

B. $f(-\pi) > f(\log_{\frac{1}{2}} 8)$

C. $f(-\pi) = f(\log_{\frac{1}{2}} 8)$

D. 不能确定

解 选 B

因为 $f(x)$ 为偶函数且在 $[0, 4]$ 上单调增, 故 $f(x)$ 在 $[-4, 0]$ 上单调减, 又

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3 > -\pi, \text{ 故 } f(-\pi) > f(\log_{\frac{1}{2}} 8).$$

例5 函数 $y = \frac{x-1}{x+1}$ 的反函数是().

A. $y = \frac{x-1}{x+1}$

B. $y = \frac{1-x}{1+x}$

C. $y = \frac{x+1}{x-1}$

D. $y = \frac{1+x}{1-x}$

解 选 D

本题考查反函数的计算.

因为由 $y = \frac{x-1}{x+1}$ ($x \neq -1$) 得

$$(x+1)y = x-1, \text{即 } xy + y = x-1,$$

得

$$xy - x = -y - 1, \text{即 } x(y-1) = -(1+y),$$

所以

$$x = -\frac{1+y}{y-1} = \frac{1+y}{1-y}.$$

将上式中 x 换成 y , y 换成 x 得到反函数

$$y = \frac{1+x}{1-x}.$$

例6 设 $f(x) = \lg x$, 函数 $g(x)$ 的反函数为 $g^{-1}(x) = \frac{2(x-1)}{x+1}$, 则 $f[g(x)] = ()$.

A. $\lg \frac{2+y}{2-y}$

B. $\lg \frac{x+2}{x-2}$

C. $\lg \frac{2+x}{2-x}$

D. $\lg \frac{x-2}{x+2}$

解 选 C

令 $g^{-1}(x) = y$, 则 $y = \frac{2(x-1)}{x+1}$, 解方程得 $x = \frac{2+y}{2-y}$, 所以 $g(x) = \frac{2+x}{2-x}$,

$$\text{故 } f[g(x)] = \lg \frac{2+x}{2-x}.$$

例7 下列各组函数中,能够构成复合函数的是().

A. $y = \ln u, u = -x^2 - 1$

B. $y = 3^u, u = \sqrt{x}$

C. $y = \arccos u, u = 2 + x^2$

D. $y = \sqrt{u}, u = 2x - x^2 - 3$

解 选 B

因为 $y = 3^u$ 的定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, $u = \sqrt{x}$ 的值域为 $U = [0, +\infty)$, 且 $D \cap U \neq \emptyset$,

所以 B 中两函数能构成复合函数 $y = 3^{\sqrt{x}}, [0, +\infty)$.

例 8 函数 $y = e^x + 1$ 与函数 $y = \ln(x - 1)$ 的图形().

- A. 关于原点对称 B. 关于 x 轴对称
C. 关于 y 轴对称 D. 关于直线 $y = x$ 对称

解 选 D

该题重点考查函数与反函数图像的关系.

因为 $y = e^x + 1$ 是单调函数, 有反函数, 其反函数为 $y = \ln(x - 1)$, 因此关于直线 $y = x$ 对称.

例 9 下列函数为周期函数的是().

- A. $y = \sin x^2$ B. $y = x |\sin x|$
C. $y = \arcsin 2x$ D. $y = \lg(3x - 2)$

解 选 D

因为 $\lg\left[3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2\right] = \lg(3x + \pi - 2) = \lg[(3x - 2) + \pi] = \lg(3x - 2)$, 所以 $y = \lg(3x - 2)$ 是以 $\frac{\pi}{3}$ 为周期的周期函数.

例 10 设 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求 (1) $y = f(x^2)$; (2) $y = f(x + \frac{1}{4}) + f(x - \frac{1}{4})$ 的定义域.

解 (1) $0 \leq x^2 \leq 1$, 因此 $-1 \leq x \leq 1$, 所以 $y = f(x^2)$ 的定义域为 $[-1, 1]$.

(2) $0 \leq x + \frac{1}{4} \leq 1$ 且 $0 \leq x - \frac{1}{4} \leq 1$, 因此 $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ 且 $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$, 所以 $y = f(x + \frac{1}{4}) + f(x - \frac{1}{4})$ 的定义域为 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

例 11 设 $F(x) = \lg(x + 1)$, 证明 $F(y^2 - 2) - F(y - 2) = F(y)$.

证明 因 $F(y) = \lg(y + 1)$,

$$F(y^2 - 2) = \lg(y^2 - 2 + 1) = \lg(y^2 - 1),$$

$$F(y - 2) = \lg(y - 2 + 1) = \lg(y - 1),$$

故

$$\begin{aligned} & F(y^2 - 2) - F(y - 2) \\ &= \lg(y^2 - 1) - \lg(y - 1) \\ &= \lg(y + 1) \\ &= F(y). \end{aligned}$$



例 12 设 $f(x)$ 是奇函数, 且 $F(x) = f(x) \left(\frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2} \right)$, 证明 $F(x)$ 是偶函数.

$$\begin{aligned}\text{证明 } F(-x) &= f(-x) \left(\frac{1}{a^{-x} + 1} - \frac{1}{2} \right) \\&= -f(x) \left(\frac{a^x}{a^x + 1} - \frac{1}{2} \right) \\&= -f(x) \frac{a^x - 1}{2(a^x + 1)} \\&= -f(x) \frac{a^x + 1 - 2}{2(a^x + 1)} \\&= -f(x) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^x + 1} \right) \\&= f(x) \left(\frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2} \right) \\&= F(x).\end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 为偶函数.



第二章 极限概念 · 函数的连续性



考纲要求提示

1. 深刻理解极限的概念；
2. 了解极限的两个存在准则——单调有界准则和夹逼准则；
3. 熟练掌握极限的四则运算法则；
4. 牢固掌握两个重要极限；
5. 理解无穷小量，掌握它的性质；
6. 掌握无穷小量的比较；
7. 理解无穷大量及其与无穷小量的关系；
8. 理解极限与无穷小量的关系；
9. 理解函数连续性的概念；
10. 了解函数的间断点；
11. 熟练掌握连续函数的性质；
12. 掌握初等函数的连续性及其在闭区间上连续函数的性质。



知识结构图示

