KOALAGOGO
考拉进阶

薛金星·教材全解 畅销18年
全国一亿读者首选

依据教育部最新本科数学教学大纲和考研大纲编写
配高教社《工程数学 线性代数》第五版 同济大学数学系 编

大学教材全解

线性代数 工程数学

同步辅导+考研复习

考拉进阶《大学教材全解》编委会 编
生汉芳◎主 编

同济·第五版

教材解析最详 方法技巧最全

- 课后习题配详解 使用更贴心
- 关键步骤加注解 讲解更透彻
- 考研真题同步练 备考更高效

赠 历年考研真题及线性代数重要公式手册，请登陆考拉进阶官方网站www.koalagogo.com下载。

中国海洋大学出版社

KOALAGOGO

考拉进阶

大学教材全解

线性代数 工程数学

同济·第五版

主　编：生汉芳

副主编：李　博　胡京爽　丁双双

李长军　孙本利

中国海洋大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／生汉芳主编．--青岛：中国海洋大学出版社，2011

（大学教材全解）

ISBN 978-7-81125-730-4

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①生…　Ⅲ．①线性代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 138035 号

出版发行　中国海洋大学出版社

社　　址　青岛市香港东路 23 号　　邮政编码　266071

网　　址　http://www.ouc-press.com

电子信箱　book@bjjxsy.com

订购电话　0532-88918393

传　　真　0532-88918393

责任编辑　矫恒鹏　　电　　话　0532-88913510

印　　制　北京泽宇印刷有限公司

版　　次　2011 年 8 月第 1 版

印　　次　2011 年 8 月第 1 次印刷

成品尺寸　212mm×148mm

印　　张　10

字　　数　270 千字

定　　价　15.80 元

前言

“教材全解系列”图书十多年来一直是初高中学生的首选辅导材料，每年销售量位居同类辅导书首位，帮助千万学子取得了理想的成绩。为帮助大学生学好《线性代数》，我们特邀请全国各地治学严谨、业务精湛的一线名师，严格遵循教育部高等院校教学指导委员会审订的“本科数学基础课程教学基本要求”(教学大纲)和最新的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”，精心编写了这本《大学教材全解——线性代数》。希望通过“教材全解系列”全心全意、解疑解难的独有特色，帮助读者全面透彻地解析线性代数知识，真正做到学好教材，提升解题能力与数学思维水平，轻松达到期中、期末、考研等各项考试的测试要求。

本书的章节内容与教材保持一致，讲解顺序与课堂授课完全同步，非常适合读者使用。每章内容安排如下：

本章知识结构图解 以结构图的形式把每章的知识点串联起来，帮助读者系统掌握并快速复习本章知识体系及逻辑结构。

本章考试出题点 帮助读者了解本章内容在考试中的考点及题型，重要考点和题型一目了然，为复习考试指明了方向，使准备考试更加轻松、高效。

教材内容全解 这部分突出必须掌握或考频较高的核心内容，与众不同的是，本书还特别注重讲解知识点应用时易混淆、不容易理解之处，以及做题过程中需要注意的事项，并列举与此知识点相关、在做题中广泛使用的核心结论，帮助读者学好、吃透本节重要概念、定理(公理)、公式、性质等。

常考基本题型 以每章重点问题为主线，精选典型性例题，并结合历年考研真题，分类总结，详细讲解，通过具体应用加深对基本概念的理解，并熟悉重要定理和基本方法的应用。部分例题给出多种解法，开拓读者思路，使读者能更扎实地掌握各个知识点，并且能熟练运用。

本章综合拔高题型精讲 在学完本章的所有内容之后，本栏目精选涵盖知识点多、综合性稍强的常考题目和考研题目，按题型分类讲解，帮助读者进一步提高综合运用本章知识的能力及分析问题、解决问题的能力，满足读者获得高分或通过考研的更高需求。

本章课后习题全解 这部分给出了配套教材中各章课后习题详尽、全面的解答过程，并且对重要步骤和较难理解之处做了注解，这也是本书的一大亮点。

全书最后精心设置了两套期末考试模拟试题,为读者提供了考前练兵的机会。

本书内容贯彻了"教材全解系列"讲解细致、层次清晰、深入浅出的特点,并在此基础上突出了三大亮点:

1. 过程步骤最详,方法技巧最全。

对于课后题和本书选编的例题,本书都给出了详尽的解题步骤,有的习题还给出多种解法,方便读者比较各种解题方法,掌握多种解题技巧。

2. 关键步骤加批注,讲解更到位。

"本章课后习题全解"部分根据题目的难度和重要性,将习题分三个等级,并在题号前标示出"易"、"中"、"难"。此部分不但解答步骤详尽,并且关键步骤都加了注解,方便读者更加高效地学习。

3. 密切联系考研,精选并详解考研真题。

在"常考基本题型"、"本章综合拔高题型精讲"栏目里,精选了近年考研经典题目,详细阐述解题方法和技巧,部分例题给出了两种及两种以上的解法,让读者了解本章节知识点在考研中的考查形式和难易程度,达到在学教材的同时对研究生入学考试也有很好的认知。

本书可作为理工类专业和部分文科专业学习《线性代数》的辅导用书,考研数学的复习用书,以及教师教授"线性代数"课程的教学参考书。

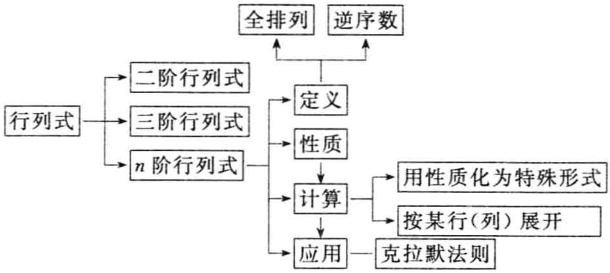
由于时间仓促及编者水平有限,书中不妥或错误之处在所难免,敬请各位同行、读者批评指正。

考拉进阶教育研究院
"大学教材全解"编委会

目录

第一章 行列式

本章知识结构图解



本章考试出题点

本章在考试中的出题点主要体现在以下方面:

1.行列式概念的理解

行列式的项数、各项的特点、每项符号的确定等.

2.行列式的计算或证明

利用行列式的定义、性质和展开定理,计算各阶行列式.特别是利用一些常用的方法和技巧,如降阶法、行(列)累加法、加边法、归纳法或递推法等,来计算某些特殊的 n 阶行列式的值,或证明与其有关的命题.

3.克拉默法则的应用

(1)对非齐次线性方程组,在系数行列式不为零时,通过计算行列式的值求得方程组的解;

(2)对齐次线性方程组,当有非零解时,确定方程组中的某些参数.

§1 二阶与三阶行列式

一 教材内容全解

重点难点解析

1.二阶行列式

(1)定义

二阶行列式:$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

(2)运算规律

对角线法则:二阶行列式的值等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

(3)应用

二元一次方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$的解,可用行列式来表达:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D},$$

式中,D 为方程组的系数行列式,D_1 和 D_2 分别是将 D 的第一列和第二列换成常数列而得到的行列式.

2. 三阶行列式

(1)定义

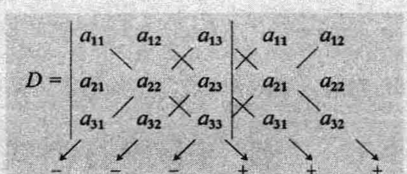
三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

(2)运算规律

对角线法则:三阶行列式的值等于主对角线方向上三个乘积之和减去副对角线方向上三个乘积之和所得的差.

温馨提示:三阶行列式的运算结果,共有六项,其中 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$ 来自三条主对角线上三个元素的乘积,前面是正号;$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ 来自三条副对角线上三个元素的乘积,前面是负号.可以借助下列图形帮助记忆:



即在行列式后面补上前 2 列,则与主对角线方向平行的三项为正,与次对角线方向平行的三项为负.

(3)应用

三元一次方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$的解,可用下列行列式来表达:

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, x_3=\frac{D_3}{D},$$

式中,D 为方程组的系数行列式,D_j($j=1,2,3$)是将 D 的第 j 列换成常数列而得到的行列式.

温馨提示：①三阶行列式展开共有 6 项；②每项三个元素，来自不同的行和不同的列(即每行每列各有一个元素)；③三项带正号，三项带负号.

例 行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 的展开式中，x 的系数是________.

解题提示 不必全部展开，从对角线法则分析含 x 的项即可.

解 应填“2”.

根据对角线法则，行列式中含有 x 的项有两项：$1\cdot x\cdot 1$ 项取正号，$(-1)\cdot x\cdot 1$ 项取负号，两项合并后为 $2x$，故 x 的系数是 2.

二 常考基本题型

题型Ⅰ 计算二阶和三阶行列式

题型解析 计算二阶和三阶行列式，都可以根据对角线法则计算.

例 1 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解题提示 注意各项的符号.

解 (1) $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix}=\sin\theta\times(-\sin\theta)-\cos\theta\times\cos\theta=-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=-1.$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0\times3\times1+1\times4\times1+(-2)\times(-1)\times2-(-2)\times3\times1-0\times4\times2-1\times(-1)\times1=0+4+4+6-0+1=15.$

例 2 证明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a).$

解题提示 按对角线法则展开，再分解因式.

证
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}&=ab^2+bc^2+ca^2-b^2c-c^2a-a^2b\\&=b(c^2-a^2)+b^2(a-c)+ca(a-c)\\&=(c-a)(bc+ab-b^2-ca)\\&=(c-a)[b(c-b)+a(b-c)]\\&=(a-b)(b-c)(c-a).\end{aligned}$$

例 3 设 $a+b+c=0$，则 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ 的值为________.

解 应填"0".

因为 $a+b+c=0$,所以 $c=-a-b$,按对角线法则有

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=acb+bac+cba-c^3-a^3-b^3$$

$$=3abc-a^3-b^3-c^3$$

$$=3ab(-a-b)-a^3-b^3-(-a-b)^3$$

$$=-3a^2b-3ab^2-a^3-b^3+(a^3+b^3+3a^2b+3ab^2)$$

$$=0.$$

方法技巧 以上两题均是用对角线法则展开的.本章后面学习了行列式的性质后,运用性质可以更简单地得到它们的结果.

题型Ⅱ　求解有关行列式的方程

题型解析 有关行列式方程的求解,通常是把行列式展开成多项式,从而把方程改换为一般的代数方程来解决.

例 4　解方程 $\begin{vmatrix} x^2 & 9 & 4 \\ x & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$.

解题提示 先将行列式展开为多项式,再求其根.

解 因为 $\begin{vmatrix} x^2 & 9 & 4 \\ x & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3x^2+18+4x-12-2x^2-9x=x^2-5x+6$,故原方程等价于 $x^2-5x+6=0$,即 $(x-2)(x-3)=0$,故原方程式的解为 $x=2$ 或 $x=3$.

例 5　设 m 为方程式 $\begin{vmatrix} \lg x^2 & \lg x & 1 \\ \lg x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 的根,则 m 的值为　　(　　)

A. 10　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{10}$　　D. 1

解 本题选 A.

因为 $\begin{vmatrix} \lg x^2 & \lg x & 1 \\ \lg x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\lg x^2+\lg x+\lg x-1-\lg x^2-\lg^2 x=2\lg x-1-\lg^2 x=-(\lg x-1)^2$,故原方程等价于 $\lg x=1$,于是其解为 $x=10$.

题型Ⅲ　二阶和三阶行列式的应用

题型解析 通过计算二阶和三阶行列式,可以求解二元一次和三元一次方程组.

例 6　解方程组 $\begin{cases} 2x-y=7, \\ x+4y=-10. \end{cases}$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=2\times4-(-1)\times1=9$,

$D_x=\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -10 & 4 \end{vmatrix}=7\times4-(-1)\times(-10)=18$,

$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -10 \end{vmatrix}=2\times(-10)-7\times1=-27$.

由于 $D\neq0$,故原方程组有唯一解:$x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{18}{9}=2,y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-27}{9}=-3$.

例 7 解方程组$\begin{cases} 2x-3y-4z=1, \\ x+2y+2z=5, \\ x+y-3z=-4. \end{cases}$

解 计算各行列式如下:

$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(-12)+(-6)+(-4)-(-8)-4-9=-27$,

$D_x=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 5 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(-6)+24+(-20)-32-2-45=-81$,

$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix}=(-30)+2+16-(-20)-(-16)-(-3)=27$,

$D_z=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}=(-16)+(-15)+1-2-10-12=-54$.

因为 $D\neq0$,所以原方程组的解为

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-81}{-27}=3,y=\frac{D_y}{D}=\frac{27}{-27}=-1,z=\frac{D_z}{D}=\frac{-54}{-27}=2.$$

§2　全排列及其逆序数

一　教材内容全解

重点难点解析

1. 全排列

(1)定义

把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列.

(2)全排列数

n 个不同元素的所有排列的总数:$P_n=n!$.

2. 逆序数

(1)逆序

在一个排列中,若某两个元素的先后次序与标准排列的次序不同,就说有一个逆序.

温馨提示:尽管标准排列可以事先任意设定,但通常以从小到大的顺序为标准顺序.

(2)逆序数

一个排列中所有逆序的总数,叫做这个排列的逆序数.

(3)奇排列,偶排列

逆序数为奇数的排列称为奇排列;逆序数为偶数的排列称为偶排列.

(4)常用结论

排列 $n(n-1)(n-2)\cdots321$ 的逆序数为$\frac{n(n-1)}{2}$.

二 常考基本题型

题型Ⅰ 求排列的逆序数

题型解析 计算排列逆序数的方法:

(1)对排列中每个元素,计算其前面比它大的数字个数,即为该元素的逆序数;

(2)将所有元素的逆序数累加,即为所求排列的逆序数.

例 1 求下列排列的逆序数.

(1)3721465;

(2)$n(n-1)(n-2)\cdots321$.

解题提示 逐一元素求逆序数,再求和.

解 (1)排列 3721465,

元素 3 排在首位,其逆序数为 0;

元素 7 前面没有比它大的数,其逆序数为 0;

元素 2 前面比它大的数有两个(3,7),其逆序数为 2;

元素 1 前面比它大的数有三个(3,7,2),其逆序数为 3;

元素 4 前面比它大的数有一个(7),其逆序数为 1;

元素 6 前面比它大的数有一个(7),其逆序数为 1;

元素 5 前面比它大的数有两个(7,6),其逆序数为 2,

故所求排列的逆序数为 $t=0+0+2+3+1+1+2=9$,该排列是奇排列.

(2)排列 $n(n-1)(n-2)\cdots321$,

元素 n 排在首位,其逆序数为 0;

元素 $n-1$ 前面比它大的数有一个(n),其逆序数为 1;

元素 $n-2$ 前面比它大的数有两个($n,n-1$),其逆序数为 2;

后面各元素的逆序数分别为 $3,4,5,\cdots,n-2,n-1$,故所求排列的逆序数为

$$t=1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

方法技巧　用等差数列前 n 项求和公式,注意这里项数是 $n-1$.

例 2　选择 i 和 j,使 $213i69j85$ 为偶排列.

解 i 和 j 只能取 4 和 7 两个数.

若 $i=4,j=7$,则排列为 213469785,其逆序数

$\tau(213469785)=0+1+0+0+0+0+1+1+4=7$;

若 $i=7,j=4$,则排列为 213769485,其逆序数

$\tau(213769485)=0+1+0+0+1+0+3+1+4=10$.

所以要使排列为偶排列,应选择 $i=7,j=4$.

题型Ⅱ　关于排列逆序数的证明问题

例 3　设排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 k,证明排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是 C_n^2-k.

证 将排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 倒排后,其任意两个元素 $x_i,x_j(i\neq j)$之间的顺序发生了颠倒,因而在原排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 和倒排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中,任意两个元素均存在唯一的一个逆序,于是两个排列的逆序数之和必为 C_n^2,即

$$\tau(x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n)+\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=C_n^2,$$

由题设 $\tau(x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n)=k$,所以

$$\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=C_n^2-\tau(x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n)=C_n^2-k,$$

即所求的逆序数为 C_n^2-k.

§3　n 阶行列式的定义

一　教材内容全解

重点难点解析

1. n 阶行列式的定义

由 n 行 n 列共 n^2 个数组成的一个算式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

称为 n 阶行列式,式中 a_{ij} 称为 D 的第 i 行第 j 列元素$(i,j=1,2,\cdots,n)$. 运算结果中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的某一个排列,$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$为此排列的逆序数,$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和(由于共有 $n!$ 个排列,故此代数和中有 $n!$ 项).

温馨提示　当把行列式每一项的行标按自然顺序排列时,各项的正负号取决于组成该项的 n 个元素的列标的逆序数. 即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,该项取正号,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,该项取负号.

2. n 阶行列式的运算规律

(1)n 阶行列式展开共有 $n!$ 项；

(2)每项 n 个元素，分别位于不同的行和不同的列(即每行每列各有一个元素)；

(3)在总共 $n!$ 项中，正项和负项各半，即$\frac{n!}{2}$项带正号，$\frac{n!}{2}$项带负号($n>1$).

温馨提示：对角线法则仅适用于二阶和三阶行列式，对于(三阶以上的)高阶行列式不适用！

3. 特殊的 n 阶行列式的结果

(1)上(下)三角形行列式的值，等于主对角线上各个元素的乘积，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，对角行列式的值，也等于主对角线上各个元素的乘积，

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n.$$

(2)副上(下)三角形行列式的值，等于副对角线上各个元素的乘积，加上符号$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

特别地，副对角行列式的值，也等于副对角线上各个元素的乘积，加上符号$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n.$$

本节考研要求

了解行列式的概念.

二 常考基本题型

题型Ⅰ 计算特殊的行列式

题型解析 对于一些特殊的行列式，可以根据定义求得其值. 由于行列式各项是不同行不同列元素的乘积，所以当零元素较多时，展开式中就有很多项为零，只需分析非零元素构成的项.

例 1　行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 的值为________.

解题提示　在总共 $5!=120$ 项中,有很多项为零,只需考虑非零项.

解 答案为 216.

根据行列式的定义,每一非零项由不同行不同列的 5 个非零元素构成.第一行的非零元素只有"1",它位于第四列,所以第二行的非零元素就不能在第四列中选取,只能选取第三列的"2".同理,第三行的非零元素不能在第三、四列中选,只有选第二列的"3",第四行只能选第一列的"4",由于前四列已被选过,第五行的元素只能选取剩下的第五列的"9"了.这样非零的项只有一项:$1\times2\times3\times4\times9=216$,因为所在列依次为 4,3,2,1,5,而$(-1)^{\tau(43215)}=(-1)^6=1$,所以该项的符号为正.故行列式的值为 216.

题型Ⅱ　确定某些展开项的系数

例 2　求 $\begin{vmatrix} x-3 & a & -1 & 4 \\ 5 & x-8 & 0 & -2 \\ 0 & b & x+1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的 x^4 和 x^3 的系数.

解 因为行列式各项中每行每列只能有一个元素,这里每行(列)的最高次数为 1 次,且全部在主对角线上,因此在展开式中,只有主对角线上四个元素乘积能出现三次方和四次方.

而$(x-3)(x-8)(x+1)x=x^4-10x^3+13x^2+24x$,所以 x^4 的系数是 1,x^3 的系数是-10.

§4　对　换

一　教材内容全解

重点难点解析

1. 对换的定义

在排列中,将任意两个元素对调,其余的元素不动,这种作出新排列的手续称为对换.将两个相邻元素对换,称为相邻对换.

2. 对换的性质

(1)将一个排列中的任意两个元素进行一次对换,排列改变奇偶性.

(2)将奇排列变成标准排列所需的对换次数为奇数,将偶排列变成标准排列所需的对换次数为偶数.

(3)n 个自然数($n>1$)共有 $n!$ 个 n 级排列,其中奇、偶排列各占一半.

3. 行列式定义的其他形式

n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

二 常考基本题型

题型Ⅰ　利用对换的性质确定排列的属性

例 1　在 n 个自然数($n>1$)构成的 $n!$ 个排列中,奇排列有________个.

解 答案为$\dfrac{n!}{2}$.

设所有 $n!$ 个排列构成集合 S. 在 S 中任取一排列,不妨设其为奇排列,若对换其任意两个元素(如前两个),则排列改变奇偶性,新出现的排列即为一个偶排列,自然也属于 S. 同理,S 中每一偶排列对换两个元素后也对应一个奇排列,因此 S 中奇排列和偶排列的个数相等,于是奇、偶排列各有$\dfrac{n!}{2}$个.

题型Ⅱ　确定行列式中某项的符号

例 2　$a_{56}a_{23}a_{42}a_{14}a_{31}a_{65}$是否六阶行列式中的项?若是,判断其符号;若不是,说明原因.

解题提示 分析所给项中元素的行标和列标,判断诸元素是否来自不同的行和不同的列. 项的符号取决于排列的逆序数.

解 将 $a_{56}a_{23}a_{42}a_{14}a_{31}a_{65}$ 按照行的自然顺序重新排位,得 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$,此时列标的排列为 431265,这是自然数 1 至 6 的一种排列,故所给乘积是不同行不同列元素的乘积,因而它是六阶行列式中的项.

由于 $\tau(431265)=6$,所以该项的符号为正.

§5　行列式的性质

一 教材内容全解

重点难点解析

1. 转置行列式

把 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$ 中的行与列按顺序互换,得到一个新的行列式