

高中总复习教学参考书

数 学

ZONGFUXIJIAOXUECANKAOSHU

GAOZHONG

高中总复习教学参考书

数

贵州省教育厅教研室

贵州人民出版社

责任编辑 何伊德
封面设计 孙晓云

高中总复习教学参考书
数 学

贵州省教育厅教研室

贵州人民出版社出版

(贵阳市延安中路5号)

贵州新华印刷厂印刷 贵州省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 18.25印张 391千字

印数 1—16,100

1985年2月第1版

1985年2月第1次印刷

书号: 7115·785 定价: 1.90元

说 明

《初中总复习教学参考书》和《高中总复习教学参考书》是两套丛书。前者包括政治、语文、英语、生理卫生、数学、物理、化学七册，后者包括政治、语文、英语、历史、地理、生物、数学、物理、化学九册。

这两套丛书系依据教育部(83)教中字012号文件精神，以现行统编教材的内容为范围，以部颁教学大纲(高中数、理、化则按两种教学纲要)的要求为根据而编写的，有助于系统地、又有重点地复习和掌握初中、高中阶段所学的基础知识，可供初中、高中学生的毕业及升学复习之用，也可供教师与家长指导学生复习时参考。

1983年，这两套丛书曾由贵州省教育厅组织发行，对初中、高中学生的毕业及升学复习起到了一定的帮助作用。现根据广大读者的意见和要求，全面地进行了认真的修订，由贵州人民出版社正式编辑出版。限于编者水平，可能仍有不当之处，希望广大师生在使用中提出宝贵意见，以便进一步修订。

前 言

本书是以部颁教学大纲为指导，参照教育部《关于颁发高中数学、物理、化学三科两种要求的教学纲要的通知》的有关精神，结合学生实际进行编写的。

本书共分七个部分，各部分的编写人员是：

代数：杨天明、张世俊、于志伟、李金凤；

三角：黄锦明、黎德志；

平面几何：刘久鉴；

立体几何：魏先牒；

解析几何：赵 忠；

微积分初步：张世俊；

综合复习：杨型鑫、李树荣、周德芬。

各部分的内容包括：复习要点、例题、习题(A、B)及其提示与答案。例题和习题A都注意了知识的复盖面和对学生的“双基”要求；习题B具有一定的综合性，难度较大的题在题头上注有*号，供学有余力的同学选用；在综合复习里对例题作了简要的评注，另外配备了135道综合性较强的总复习题，附有提示与答案，最后还安排了四套综合训练题，附有参考解答，可供总复习的后期选用。

编 者

1985. 2.

目 录

代数

- 一、数与式..... (1)
- 二、方程..... (25)
- 三、不等式..... (50)
- 四、函数..... (74)
- 五、数列、数学归纳法..... (98)
- 六、~~行列式与线性方程组~~..... (117)
- 七、排列、组合与二项式定理..... (132)
- 八、~~概率~~..... (148)

三角

- 一、任意角的三角函数..... (156)
- 二、三角函数的图象和性质..... (179)
- 三、三角恒等变形..... (206)
- 四、反三角函数..... (227)
- 五、三角方程..... (242)

平面几何

- 一、相交线和平行线..... (256)
- 二、三角形..... (259)
- 三、四边形..... (273)
- 四、相似形..... (282)

五、圆	(295)
六、面积、作图和轨迹	(309)

立体几何

一、直线与平面	(316)
二、多面体与旋转体	(340)

解析几何

一、基本概念和公式	(357)
二、圆锥曲线的方程	(358)
三、圆锥曲线的位置关系	(370)

微积分初步

一、极限	(437)
二、 导数、微分及其应用	(439)
三、 积分及其应用	(443)

综合复习

一、例题	(475)
二、总复习题	(498)
三、综合训练题	(526)

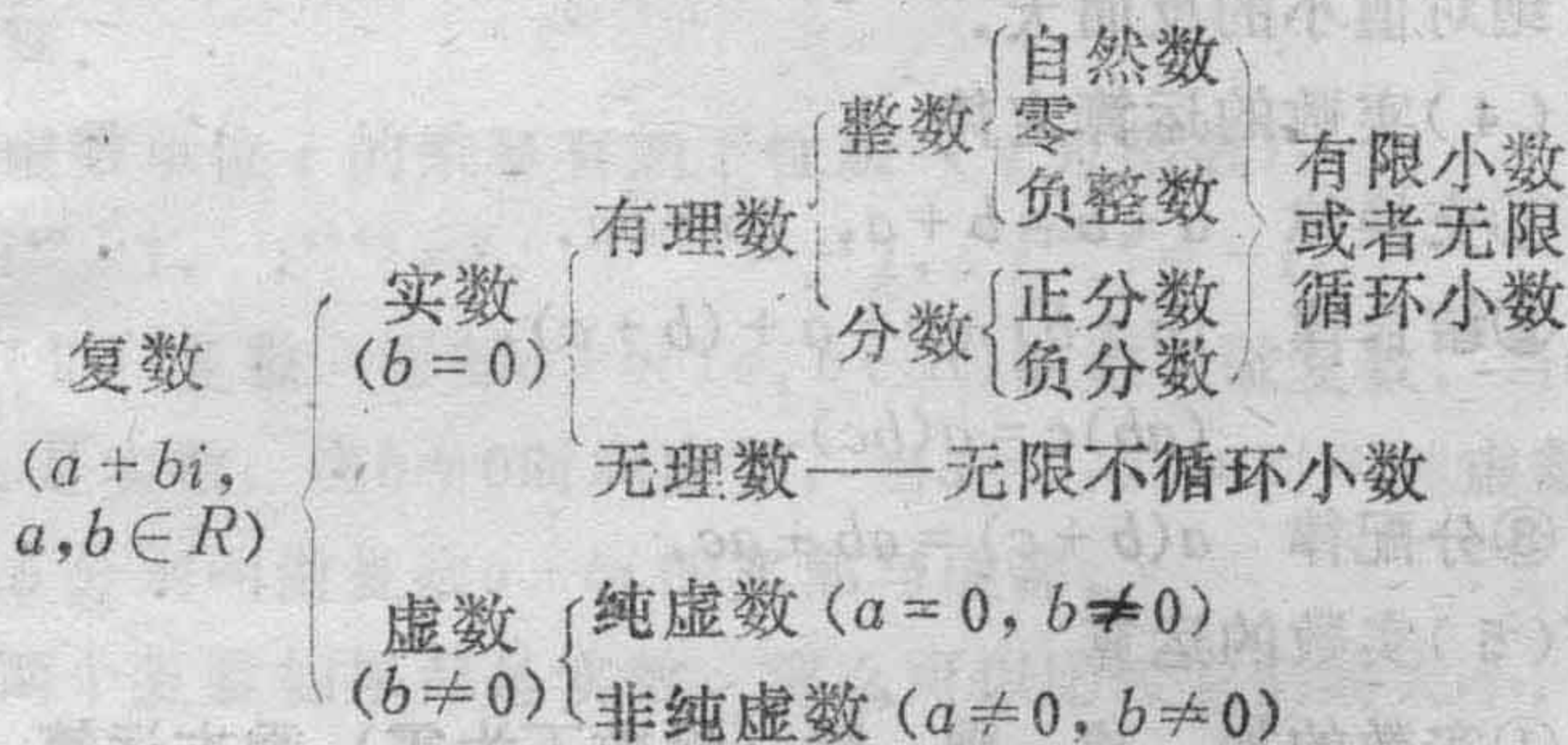
代数

一、数与式

复习要点

(一) 数

1. 数系表



2. 实数

(1) 实数和数轴 规定了方向、原点和长度单位的直线叫做数轴。

任何一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反之，数轴上的任何一个点也对应着一个实数。这就是说，数轴上的点集和实数集之间具有一一对应的关系。

(2) 相反数与绝对值

相反数：在数轴上原点的两旁，离开原点距离相等的两个点所表示的两个实数，叫做互为相反数。如当 $a \neq 0$ 时，实数 a 和 $-a$ 就互为相反数。零的相反数是零。

绝对值：在数轴上表示一个数的点离开原点的距离，叫做这个数的绝对值。正数和零的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反的数。

$$\text{即：} |a| = \begin{cases} a & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时;} \\ -a & \text{当 } a < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

(3) 实数的大小比较

数轴上的点越往右，它所表示的数就越大，也就是：一切正数大于零，零大于一切负数，两个负数绝对值大的反而小，绝对值小的反而大。

(4) 实数的运算定律

①交换律 $a + b = b + a$, $ab = ba$.

②结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$,
 $(ab)c = a(bc)$.

③分配律 $a(b + c) = ab + ac$.

(5) 实数的运算

①实数的加、减、乘、除（除数不为零），乘方运算。

②实数的开方

定义：两个实数 x 和 a ，如果 $x^n = a$ ，那么 x 叫做 a 的 n 次方根（ n 为自然数），记作： $\sqrt[n]{a}$ 。

在实数范围内，负数不能开偶次方；正数的偶次方根是两个相反数；奇次方根的符号与被开方数符号相同。

正数的正的方根叫做算术根，零的算术根仍是零。

根据算术根的定义，可得实数的平方的算术平方根为：

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时,} \\ -a & \text{当 } a < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

(6) 实数的运算顺序

①没有括号的先算乘方、开方，再算乘、除，最后算加、减。

②有括号的先算小括号、再算中括号、后算大括号。

3. 复数

(1) 虚数单位 i 叫虚数单位，它满足：

① $i^2 = -1$.

② i 与实数在一起可以按照通常的四则运算的法则进行运算。

虚数单位 i 的乘幂有如下性质 (n 为整数)：

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

(2) 复数 形如 $a + bi$ ($a, b \in R$) 的数叫做复数。当 $b = 0$ 时，是实数；当 $b \neq 0$ 时叫虚数，当 $a = 0, b \neq 0$ 时叫纯虚数； a 与 b 分别叫做复数 $a + bi$ 的实部与虚部。

两个复数如果都是实数，那么可以比较它们的大小，否则就不规定它们的大小。

两个复数相等，当且仅当它们的实部与虚部分别相等。

当两个复数实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数称为共轭复数。如 $Z = a + bi$ 和 $\bar{Z} = a - bi$ 互为共轭复数。

(3) 复数的几何表示

①用复平面上的点表示复数：用直角坐标系里的横轴表示实部，纵轴表示虚部，这样复数 $Z = a + bi$ 就可以用复平面内的点 $M(a, b)$ 来表示 (如图 1)。复数和复平面上的点之间

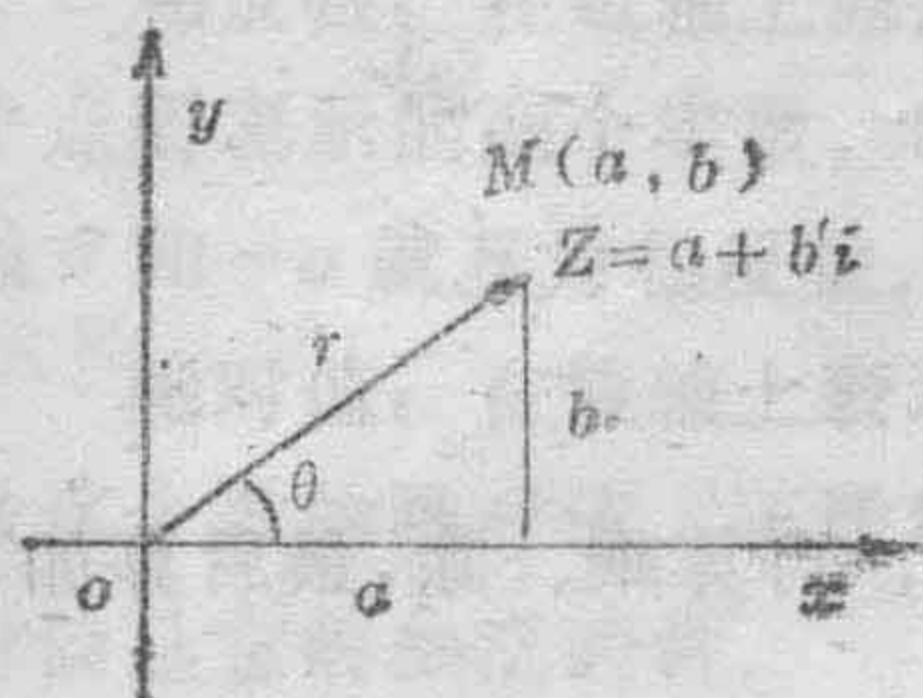


图 1

有一一对应关系。

②用向量表示复数：连接原点 O 和 M 点，并把 O 看做起点， M 看做终点，那么向量 $\overrightarrow{OM}$ 就和复数 $Z = a + bi$ 相对应（如图 1）。

x 轴的正方向到向量 $\overrightarrow{OM}$ 的角 θ ，叫做复数 $a + bi$ 的幅角，适

合 $0 \leq \theta < 2\pi$ 的幅角 θ 的值叫做幅角的主值。

向量 $\overrightarrow{OM}$ 的长 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ 叫做复数的模或绝对值。

(4) 复数的代数形式与三角形式

①代数形式： $Z = a + bi$ ($a, b \in R$)

②三角形式： $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$\text{其中 } r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(5) 复数的运算

①复数的加、减法：一般按多项式加、减法法则进行运算。

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i.$$

②复数的乘、除法：

用代数形式进行运算

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i;$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

用三角形式进行运算

$$\begin{aligned}
 & r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\
 &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]; \\
 & \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\
 &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)].
 \end{aligned}$$

③复数的乘方

用代数形式运算：一般按多项式乘方的法则和二项式定理展开进行运算

用三角形式进行运算（棣美弗定理）

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

（ n 为正整数）。

④复数的开方

一般用三角形式进行运算

$$\sqrt[n]{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

（ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ）。

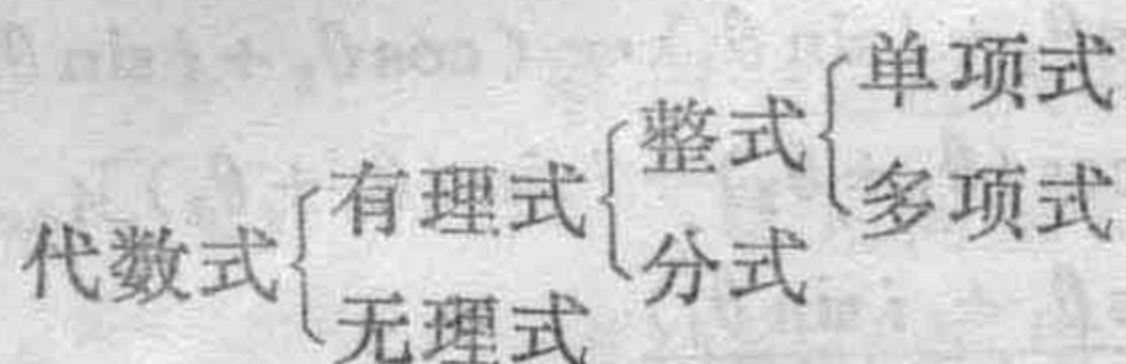
（二）代数式

1. 代数式的定义及代数式的值

（1）定义 用加、减、乘、除、乘方、开方等运算符号把数字和字母表示的数连结起来的式子，叫做代数式（数字或者单独的一个字母表示的数，也可看作代数式）。

（2）代数式的值 用数值代替代数式里的字母进行计算，所得的结果叫做代数式的值。

2. 代数式的分类



只含有加、减、乘（包括乘方）、除这四种运算的代数式叫做有理式，有理式包括整式与分式。

3. 整式和它的四则运算

(1) 定义 分母上不含字母的有理式叫做整式。

(2) 整式的加减法 用加减号把单项式或多项式连结起来写成代数和的形式，再用去括号或合并同类项等方法进行计算。

(3) 整式的乘法

① 单项式的乘法：单项式相乘，把它们的系数相乘，同底数的幂也相乘，只在一个单项式里含有的字母，连同它的指数写在积里。

② 单项式乘以多项式：把多项式的每一项同单项式相乘，再把所得的积相加。

③ 多项式乘以多项式：先将一个多项式的每一项乘以另一多项式的各项，再将所得的积相加。

④ 乘法公式：

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

(4) 正整数幂的运算法则

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & (a \neq 0, m > n) \\ 1 & (a \neq 0, m = n) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (a \neq 0, m < n) \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

(以上各式中 m 、 n 均为自然数)

(5) 整式的除法

①单项式除以单项式：把系数和相同字母的幂分别相除，被除式单独有的字母的幂移到商里去。

②多项式除以单项式：把多项式里的每一项分别除以这个单项式，再把所得的商相加。

③多项式除以多项式：一般用竖式演算。

(6) 因式分解 把一个多项式分解成几个因式乘积的形式叫做多项式的因式分解。多项式因式分解要根据问题中所要求的数系范围来考虑，在不同的范围里有不同的分解结果。一般地，如果没有加以说明，都在有理数集内进行分解。

因式分解常用的几种方法

①提取公因式法：把一个多项式的各项里都含有的公因式提到括号外。

如： $ma + mb + mc = m(a + b + c)$ 。

②应用公式分解法：把乘法公式反过来应用即可。

③分组分解法：把一个多项式的各项经过适当分组，使分组后各组中间有公因式。

④拆添项的分解法：在多项式不能直接使用公式法或分

组法时，可考虑拆添适当的项，使其能使用公式或用分组分解法进行分解。

⑤二次三项式的因式分解法：十字相乘法：将一个二次三项式分解因式，可以把二次项系数和常数项分别分解成两个因数，使它们交叉相乘所得的积的和等于一次项系数。

如：在 $ax^2 + bx + c$ 中，若 $a = pq$ ， $c = nm$ ，且 $b = pn + qm$ ，那么 $ax^2 + bx + c = (px + m)(qx + n)$ 。

配方法。

求根公式分解法：

$$ax^2 + bx + c = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \cdot \left(x + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right).$$

4. 分 式

(1) 分式的定义及基本性质

定义：除式中含有字母的有理式，叫做分式。分式的分子可以是任何数值；分式的分母可以是零以外的数值。如果分式的分母是零，分式就没有意义。

分式的基本性质：分式的分子和分母都乘以或除以不等于零的相同的代数式，其值不变

$$\text{即：} \frac{a}{b} = \frac{am}{bm}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div m}{b \div m} \quad (m \neq 0).$$

(2) 约分、通分

约分：把分式的分子和分母的公因式都约去的过程，叫做约分。约分后所得的结果，叫做最简分式。

通分：把两个或几个不同分母的分式，在不改变它们的

值的条件下，化成分母相同的过程，叫做通分。

(3) 分式的运算

① 分式的加、减法：

同分母的分式相加、减，把分子相加、减，分母不变。

异分母的分式相加、减，先通分，然后再相加减。

② 分式的乘除法及繁分式的化简：

分式乘以分式，用分子的积做分子，用分母的积做分母
(在运算前，能约分的先约分，可使运算简便)。

分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘(运算所得的结果，可约分的必须约分，使分式为最简)。

繁分式实际上是分式除法的另一种写法，所以可利用除法法则和分式的基本性质来进行化简。

③ 分式的乘方和开方：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0, n \text{ 为正整数});$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (a \geq 0, b > 0, n \text{ 为正整数}).$$

5. 根 式

(1) 定义 式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式。当 n 为奇数时， a 是任意实数；当 n 为偶数时， $a \geq 0$ 。

且：当 n 为奇数时， $\sqrt[n]{a^n} = a$ ；

当 n 为偶数时，

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0); \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

(2) 根式的基本性质

$$\sqrt[n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geq 0, m \in J, n \text{ 和 } p \text{ 是大于 } 1 \text{ 的整数}).$$

(3) 积、商、幂、方根的算术根

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0, n \text{ 为大于 } 1 \text{ 的整数});$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (a \geq 0, b > 0, n \text{ 为大于 } 1 \text{ 的整数});$$

$$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m \quad (a \geq 0, m, n \text{ 均为大于 } 1 \text{ 的整数});$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad (a \geq 0, m, n \text{ 均为大于 } 1 \text{ 的整数}).$$

(4) 最简根式、同类根式、同次根式

同时满足条件①~③的根式, 称为最简根式:

①被开方数的指数和根指数是互质数;

②被开方数每一因式的指数都小于根指数;

③被开方数不含分母.

同类根式: 几个根式化为最简根式后, 如果被开方数都相同, 根指数也都相同, 这几个根式叫做同类根式.

同次根式: 根指数相同的根式叫做同次根式.

(5) 根式的化简

①把根号内的因式移到根号外;

②化去根号内的分母.

(6) 根式的运算

①根式的加减法: 先将各根式化为最简根式, 然后合并同类根式.

②根式的乘除法: 同次根式相乘除, 被开方数相乘除, 根指数不变; 异次根式相乘除, 必须先化成同次根式后再进行计算.

③根式的乘方: