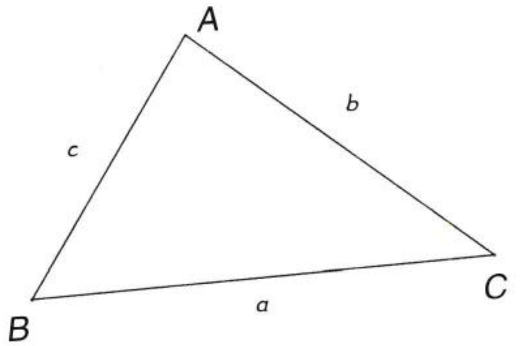
Q I D O N G Z H O N G X U E A O S A I J I N G T I X I A N G J I E

丛书主编 王 生

本册主编 曹瑞彬



$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

启东中学奥赛精题详解

初中数学

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

启东中学

QIDONGZHONGXUEAOSAIJINGTIXIANGJIE

奥赛 精题详解

初 中 数 学

主　编　曹瑞彬

副

作　　　　　　　卫星

　　　　　　　　海东

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

启东中学奥赛精题详解. 初中数学 / 曹瑞彬主编
. -- 4 版. — 南京 : 南京师范大学出版社, 2013. 4
ISBN 978-7-5651-1222-5
Ⅰ. ①启… Ⅱ. ①曹… Ⅲ. ①中学数学课—初中—题解 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 006857 号

书　　名	启东中学奥赛精题详解(初中数学)
主　　编	曹瑞彬
副 主 编	张　杰
责任编辑	孙　涛
出版发行	南京师范大学出版社
地　　址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)
电　　话	(025)83598919(传真)　83598412(营销部)　83598297(邮购部)
网　　址	http://www.njnup.com
电子邮箱	nspzbb@163.com
印　　刷	启东市人民印刷有限公司
开　　本	787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张	16
字　　数	385 千
版　　次	2013 年 4 月第 4 版　2013 年 4 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5651-1222-5
定　　价	35.00 元

曹瑞彬 男，1962 年 11 月出生，1983 年毕业于南京师范学院数学系，中学数学高级教师，江苏省数学特级教师，数学奥林匹克高级教练，南通市数学学科基地业务负责人，启东中学奥赛中心副主任，全国教育系统模范教师，全国中小学优秀班主任。长期从事数学教学研究工作及数学奥林匹克竞赛辅导工作，近年来培养了一大批数学尖子，其中有 100 多人获得全国数学联赛一等奖，10 多位同学入选国家冬令营，7 位同学进入国家集训队，其中陈建鑫同学获第 42 届国际中学生数学奥林匹克竞赛金牌。任班主任所送的 2003 届高三(1)班有 20 位同学考入清华、北大，还有 20 位同学考入复旦、交大。主编了《奥林匹克教材》、《向 45 分钟要效益》、《大学自主招生真题汇编与训练・数学》等数十本教辅用书，在《中学数学》、《教育研究》等杂志上发表了十多篇论文。

出版说明

江苏省启东中学是一所面向启东市(县级市)招生的四星级高中,也是中国百强中学之一,近年来取得的累累硕果引起教育界乃至全社会的关注。

1995年"世界第一才女"毛蔚同学夺得了第26届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,成为该项赛事开赛以来第一位获得金牌的女生;1996年蔡凯华同学在第37届国际中学生数学奥林匹克竞赛中夺得银牌,周璐同学获第28届国际中学生化学奥林匹克竞赛银牌;1998年陈宇翱同学在第29届国际中学生物理奥林匹克竞赛中荣获金牌;2001年施陈博同学夺得第32届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,陈建鑫同学夺得第42届国际中学生数学奥林匹克竞赛金牌;2002年樊向军同学获第33届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2003年倪犇博同学获第35届国际中学生化学奥林匹克竞赛金牌;2004年李真同学获第35届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2006年朱力同学获第37届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2007年钱秉玺同学获第38届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,并被授予"全国优秀共青团员"称号;2012年李天然同学获第44届国际中学生化学奥林匹克竞赛金牌。

一所长江北岸、黄海之滨的农村中学,连续多年在不同学科的竞赛中摘金夺银,学校高考成绩也是令人惊讶的出色,被誉为"奥赛金牌的摇篮,清华北大的生源基地"。

"启东中学现象"自然也成为出版界瞩目的焦点,与"黄冈"一样,"启东"很快成为教辅出版的热门题材。南京师范大学出版社较早注意到了启东中学教育、教学方面取得的卓然成绩,应该说,建社以来的多套双效图书中都有启东中学教学成果的反映,如《向45分钟要效益》、《特级教师优化设计》、《奥林匹克竞赛指导》、《一课一练》等。把启东中学奥赛作为一个系列出版发行,是我社依托名校名师,实施"名品"战略迈开的又一新步伐。

迈开这一步,是我社与启东中学多年合作的结果,倚天时地利人和的优势,水到而渠成。

迈开这一步,是广大读者对南京师范大学出版社的热切期盼。读者对南京师范大学出版社"理念教辅"、"名品教辅"的关心与厚爱以及他们的需求,已成为我们的第一动力。

初中、高中各科《启东中学奥赛训练教程》以相应教材内容为基础,根据竞赛大纲并结合启东中学学生使用的新教材和各科竞赛辅导经验而编写,将竞赛与升学结合起来,尤其重视基础知识的学习和基本思维方法的培养,由浅入深,循序渐进。《启东中学奥赛精题详解》则将《启东中学奥赛训练教程》中的包括原创题目在内的对应习题给出详尽的解答,方便配套使用。

本丛书主编为启东中学校长王生博士,各分册的主编均是启东中学金牌教练,参加编写的老师长期从事一线教学和竞赛辅导工作,有丰富的经验和成功的方法。

我们期待广大读者能从这套书中感受启东中学的努力,领略启东中学的风采,解读启东中学的奥秘,欣赏启东中学的智慧,分享启东中学的成功!

南京师范大学出版社

目　录

第一章　数与式

第二章　方程与不等式

第三章　函数及其图象

第四章　直线形

第五章　三角函数

第六章　圆

第七章　数学思想与方法

第一章　数与式

第一节　整数的有关性质

一、选择题

1. 下列四个数中，只有一个是完全平方数，它是(　　).

A. 513231　　B. 121826　　C. 122530　　D. 625681

答案　D.

解　排除法. A各数字之和能被3整除，但不能被9整除，所以A只能被3整除但不能被9整除，所以不是完全平方数，B的末位数为6，所以它的十位数为奇数才能是完全平方数，所以B排除，C个位数为0，所以它是有10的因数，因此C必须被100整除才能是完全平方数，所以C排除.

2. 设 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_9$ 均为正整数，且 $x_1 < x_2 < \cdots < x_9$，$x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 220$，则当 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ 的值最大时，$x_9 - x_1$ 的最小值是(　　).

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

答案　B.

解　①先设 $x_1 + x_2 + \cdots + x_5 \leqslant 110$，因为若不然，$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 110$，则 $x_5 \geqslant 25$，$x_6 \geqslant 26$，$x_7 \geqslant 27$，$x_8 \geqslant 28$，$x_9 \geqslant 29$，那么$x_1 + x_2 + \cdots + x_9 > 110 + 26 + 27 + 28 + 29 = 220$，与题设矛盾.

②若取 $x_1 = 20$，$x_2 = 21$，$x_3 = 22$，$x_4 = 23$，$x_5 = 24$，则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 110$；若 $x_9 \leqslant 28$，则 $x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leqslant 28 + 27 + 26 + 25 < 110$. 故 x_9 的最小值为 $x_9 = 29$，故 $x_9 - x_1$ 的最小值为 $29 - 20 = 9$.

3. 一个六位数$\overline{a1988b}$能被12整除，这样的六位数共有(　　).

A. 9个　　B. 12个　　C. 15个　　D. 20个

答案　A.

解　由于 $12 \mid \overline{a1988b}$，所以 $3 \mid \overline{a1988b}$，$4 \mid \overline{a1988b}$.

①因为被3整除的数的各位数字之和被3整除，

所以 $3 \mid (a+1+9+8+8+b)$，即 $3 \mid [24+(a+b+2)]$.

所以 $3 \mid (a+b+2)$.

②被4整除的数的末两位数被4整除，

所以 $4 \mid \overline{8b}$.

所以 $b = 0, 4, 8$.

由①②知，

当 $b=0$ 时，$3 \mid (a+2)$，所以 $a = 1, 4, 7$；

当 $b=4$ 时，$3|(a+6)$，所以 $a=3,6,9$；

当 $b=8$ 时，$3|(a+10)$，即 $3|(a+1)$，所以 $a=2,5,8$.

所以满足题意的六位数共有 9 个.

4. 已知两个质数 p、q，且 $p+q=21$，则 $\frac{2q+1}{p}$ 的值为(　　).

A. $\frac{5}{19}$或$\frac{39}{2}$　　B. $\frac{9}{17}$或$\frac{17}{9}$　　C. $\frac{17}{13}$或$\frac{13}{17}$　　D. $\frac{23}{10}$或$\frac{21}{11}$

答案　A.

解　当 $p=2,q=19$ 时，$\frac{2q+1}{p}=\frac{39}{2}$；

当 $p=19,q=2$ 时，$\frac{2q+1}{p}=\frac{5}{19}$.

5. 若 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 为互不相等的正奇数，且满足 $(2005-x_1)(2005-x_2)(2005-x_3)(2005-x_4)(2005-x_5)=24^2$，那么，$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$ 的末位数字是(　　).

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 7

答案　A.

解　易见，等式左端五个因式为不同的偶数，而将 24^2 分解为五个互不相等的偶数之积，只有唯一的形式：

$24^2=2\times(-2)\times4\times6\times(-6)$.

故五个因式 $2005-x_i(i=1,2,3,4,5)$ 应分别等于 $2,-2,4,6,-6$.

所以，$(2005-x_1)^2+(2005-x_2)^2+\cdots+(2005-x_5)^2=2^2+(-2)^2+4^2+6^2+(-6)^2=96$，即 $5\times2005^2-4010(x_1+x_2+\cdots+x_5)+(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_5^2)=96$.

所以 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_5^2=1(\mathrm{mod}\ 10)$.

6. 设 $x*y=(x+1)(y+1)$，x^{*2} 定义为 $x*x$，则多项式 $3*(x^{*2})-2*x+1$，当 $x=2$ 时的值为(　　).

A. 19　　B. 27　　C. 32　　D. 38

答案　C.

解　利用本题规定的两种新定义运算：

因为 $x^{*2}=2^{*2}=2*2$，$2*2=(2+1)(2+1)=9$，

所以 $x^{*2}=9$.

所以 $3*(x^{*2})=(3+1)(9+1)=40$.

因为 $2*x=2*2=9$，

所以 $3*(x^{*2})-2*x+1=40-9+1=32$.

二、填空题

7. 三位数 $\overline{abc}=a^2+1+(\overline{bc})^2$，则 $\overline{abc}=$______.

答案　726.

解　由 $100a+\overline{bc}=a^2+1+(\overline{bc})^2$，得 $\overline{bc}(\overline{bc}-1)=100a-a^2-1$.

显然其左边为偶数，故 a 必为奇数.

当 $a=1$ 时，$(\overline{bc}-1)\cdot\overline{bc}=98=2\times7^2$；

当 $a=3$ 时，$(\overline{bc}-1)\cdot\overline{bc}=290=2\times5\times29$；

当 $a=5$ 时，$(\overline{bc}-1)\cdot\overline{bc}=474=2\times3\times79$；

当 $a=7$ 时，$(\overline{bc}-1)\cdot\overline{bc}=650=26\times(26-1)$；

当 $a=9$ 时，$(\overline{bc}-1)\cdot\overline{bc}=818=2\times409$.

故仅有 $a=7$ 时，$\overline{bc}=26$ 满足题设.

故 $\overline{abc}=726$.

8. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{51}$ 都是正整数，$x_1<x_2<\cdots<x_{51}$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_{51}=1995$，当 x_{26} 在它的可以取得的值中达到最大时，x_{51} 可以取得的最大值是______.

答案 95.

解 要使 x_{26} 最大，则 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{25}$ 必须最小，从而 $x_{26}+x_{27}+\cdots+x_{51}=1995-(1+2+\cdots+25)=1670$. 为了使 x_{51} 最大，则 $x_{26},x_{27},\cdots,x_{50}$ 必须最小，从而 $x_{26}+(x_{26}+1)+(x_{26}+2)+\cdots+(x_{26}+24)+x_{51}=1670(x_{51}>x_{26}+24)$，即

$25x_{26}+x_{51}=1670-(1+2+\cdots+24)=1370=25\times51+95$.

故取 $x_{51}=95$ 时为 x_{51} 可以取得的最大值.

9. 一堆火柴有 2010 根，甲、乙二人轮流取火柴(甲先取)，每次只允许取出 2^k 根火柴 $(k=0,1,2,\cdots)$，谁取到最后一根火柴谁胜，则______一定能取胜.

答案 乙.

解 乙一定能获胜，因为甲无论怎样取，余下的火柴数总不是 3 的倍数，这时乙便可通过选择 1 根或 2 根，使得余下的火柴是 3 的倍数，于是甲只能再使火柴数不是 3 的倍数，乙又可使余下的火柴是 3 的倍数，因为 0 是 3 的倍数，故甲总不可能获胜，又游戏显然要在若干步后终止，故乙将获得胜利.

10. 能使 2^n+256 是完全平方数的正整数 n 的值为______.

答案 11.

解 当 $n\leqslant8$ 时，$2^n+256=2^n(1+2^{8-n})$，若它是完全平方数，则 n 必为偶数.

若 $n=2$，则 $2^n+256=2^2\times65$；若 $n=4$，则 $2^n+256=2^4\times17$；若 $n=6$，则 $2^n+256=2^6\times5$；若 $n=8$，则 $2^n+256=2^8\times2$. 所以，当 $n\leqslant8$ 时，2^n+256 都不是完全平方数.

当 $n>8$ 时，$2^n+256=2^8(2^{n-8}+1)$，若它是完全平方数，则 $2^{n-8}+1$ 为一奇数的平方.

设 $2^{n-8}+1=(2k+1)^2$(k 为自然数)，则 $2^{n-10}=k(k+1)$. 由于 k 和 $k+1$ 一奇一偶，所以 $k=1$，于是 $2^{n-10}=2$，故 $n=11$.

11. 已知 $p,p+2,p+6,p+8$ 和 $p+14$ 都是质数，则这样的质数 p 共有______个.

答案 1.

解 将质数 p 按被 5 除的余数分类：

(1)当 $p=5$ 时，$p+2=7,p+6=11,p+8=13,p+14=19$ 符合题意.

(2)当 $p=5k\pm1$ 时，$p+14$(或 $p+6$)是合数，不合题意.

(3)当 $p=5k\pm2$ 时，$p+8$(或 $p+2$)是合数，不合题意.

综上所述，只有 $p=5$ 符合题意.

12. 如果对于不小于 8 的自然数 n，当 $3n+1$ 是一个完全平方数时，$n+1$ 都能表示成 k 个完全平方数的和，那么 k 的最小值为______.

答案 3.

解 设 $3n+1=m^2$，则 $3n=m^2-1=(m+1)(m-1)$，故 $m+1, m-1$ 中必有一个是 3 的倍数.

不妨设 $m-1=3a$，则 $3n=m^2-1=(m+1)(m-1)=(3a+2)\cdot 3a \Rightarrow n=a(3a+2)$，

$n+1=a(3a+2)+1=3a^2+2a+1=a^2+a^2+(a+1)^2$，故其最小值为 3.

三、解答题

13. 已知 x, y 为整数，且 $5\mid(x+9y)$，求证：$5\mid(8x+7y)$.

证明 因为 $8x+7y=8(x+9y)-65y$，$5\mid(x+9y)$，$5\mid 65y$，

所以 $5\mid(8x+7y)$.

14. 求不大于 60，且只有 10 个约数的正整数.

解 由于 $10=1\times 10=2\times 5$，设符合条件的正整数 N 的形式为 $N=p^9$ 或 $N=p_1\times p_2{}^4$.

(1) $N=p^9$，最小质数是 2，而 $2^9>60$，不符合题意；

(2) $N=p_1\times p_2{}^4$，$p_1\geqslant 2$，$p_2\geqslant 3$ 时，有 $2\times 3^4>60$，也不符合题意；

当 $p_1=3$，$p_2=2$ 时，有 $3\times 2^4=48<60$，

$\therefore N=48$.

当 $p_1\geqslant 5$，$p_2=2$ 时，有 $5\times 2^4=80>60$，不符合题意，则所求正整数 N 为 48.

15. 已知定理"若三个大于 3 的质数 a, b, c 满足关系式 $2a+5b=c$，则 $a+b+c$ 是整数 n 的倍数". 试问：上述定理中的整数 n 的最大可能值是多少？并证明你的结论.

解 n 的最大可能值是 9.

先证 $a+b+c$ 能被 3 整除. 事实上 $a+b+c=a+b+2a+5b=3(a+2b)$，所以 $a+b+c$ 是 3 的倍数.

设 a, b 被 3 除后的余数分别为 r_a, r_b，则 $r_a\neq 0$，$r_b\neq 0$.

若 $r_a\neq r_b$，则 $r_a=1, r_b=2$ 或 $r_a=2, r_b=1$，此时 $2a+5b$ 必为 3 的倍数，即 c 为合数，矛盾.

若 $r_a=r_b$，则 $r_a=r_b=1$ 或 $r_a=r_b=2$，此时 $a+2b$ 必为 3 的倍数，从而 $a+b+c$ 是 9 的倍数.

再证 9 是最大. 因为在 $2\times 11+5\times 5=47$ 中，$11+5+47=63$，而在 $2\times 13+5\times 7=61$ 中，$13+7+61=81$，$(63, 81)=9$.

因此 9 是最大可能的值.

16. 证明：形如 $3n+2$ 的数不是完全平方数，其中 n 为正整数.

证明 整数被 3 除，余数为 0, 1, 2，即任一整数均可表示为 $3k, 3k+1, 3k+2$ 三种形式中的一种.

因为 $(3k)^2=9k^2=3(3k^2)$，

$(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$，

$(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$，

即任何整数平方后，只能是 $3n$ 或 $3n+1$ 的形式.

因此，形如 $3n+2$ 的数不可能是完全平方数.

17. a_n 表示 7^n 的末两位数，求 $a_1+a_2+\cdots+a_{1990}$ 的值.

解 因为 $7^1=7$，$7^2=49$，$7^3=343$，$7^4=2401$，$7^5=16807$，$7^6=117649$，…，可见从 a_5 开

始，7^n 的末两位数开始循环重复 a_1,a_2,a_3,a_4 的末两位数.

∵ $1990=497\times4+2$,

∴ $a_1+a_2+\cdots+a_{1990}$

$=(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)+\cdots+(a_{1985}+a_{1986}+a_{1987}+a_{1988})+(a_{1989}+a_{1990})$

$=(7+49+43+1)+(7+49+43+1)+\cdots+(7+49+43+1)+7+49$

$=100\times497+7+49$

$=49756$.

18. 一只青蛙在平面直角坐标系上从点(1,1)开始，可以按照如下两种方式跳跃：①能从任意一点(a,b)，跳到点$(2a,b)$或$(a,2b)$；②对于点(a,b)，如果 $a>b$，则能从(a,b)跳到$(a-b,b)$；如果 $a<b$，则能从(a,b)跳到$(a,b-a)$.

例如，按照上述跳跃方式，这只青蛙能够到达点(3,1)，跳跃的一种路径为：(1,1)→(2,1)→(4,1)→(3,1).

请你思考：这只青蛙按照规定的两种方式跳跃，能到达下列各点吗？如果能，请分别给出从点(1,1)出发到指定点的路径；如果不能，请说明理由.

(1)(3,5)； (2)(12,60)； (3)(200,5)； (4)(200,6).

解 能到达点(3,5)和点(200,6).

从(1,1)出发到(3,5)的路径为：

(1,1)→(2,1)→(4,1)→(3,1)→(3,2)→(3,4)→(3,8)→(3,5).

从(1,1)出发到(200,6)的路径为：

(1,1)→(1,2)→(1,4)→(1,3)→(1,6)→(2,6)→(4,6)→(8,6)→(16,6)→(10,6)→(20,6)→(40,6)→(80,6)→(160,6)→(320,6)→(前面的数反复减 20 次 6)→(200,6).

(2)不能到达点(12,60)和(200,5). 理由如下：

∵ a 和 b 的公共奇约数 $=a$ 和 $2b$ 的公共奇约数 $=2a$ 和 b 的公共奇约数，

∴由规则①知，跳跃不改变前后两数的公共奇约数.

∵如果 $a>b$，a 和 b 的最大公约数 $=(a-b)$ 和 b 的最大公约数，

如果 $a<b$，a 和 b 的最大公约数 $=(b-a)$ 和 b 的最大公约数，

∴由规则②知，跳跃不改变前后两数的最大公约数.

从而按规则①和规则②跳跃，均不改变坐标前后两数的公共奇约数.

∵1 和 1 的公共奇约数为 1，12 和 60 的公共奇约数为 3，200 和 5 的公共奇约数为 5.

∴从(1,1)出发不可能到达给定点(12,60)和(200,5).

19. 设 n 是正整数，$d_1<d_2<d_3<d_4$ 是 n 的 4 个连续最小的正整数的约数，若 $n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$，求 n 的值.

解 若 n 为奇数，则 d_1,d_2,d_3,d_4 都是奇数. 故

$n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=1+1+1+1\equiv0 \pmod 4$，矛盾.

若 $4\mid n$，则有 $d_1=1,d_2=2$.

由 $d_i^2\equiv0$ 或 $1 \pmod 4$ 知

$n=1+0+d_3^2+d_4^2\not\equiv0 \pmod 4$，也矛盾.

从而，$n=2(2n_1-1)$，n_1 为某正整数，且数组$(d_1,d_2,d_3,d_4)=(1,2,p,q)$或$(1,2,p,$

$2p)$，其中 p,q 为奇质数.

在前一种情形，有

$n=1^2+2^2+p^2+q^2\equiv 3 \pmod 4$，矛盾.

则只能是 $n=1^2+2^2+p^2+(2p)^2=5(1+p^2)$.

故 $5\mid n$.

若 $d_3=3$，则 $d_4=5$，这将回到前一种情形，因此，只能是 $d_3=p=5$，则 $n=1^2+2^2+5^2+10^2=130$.

容易验证，130 的 4 个连续最小的正整数的约数就是 1,2,5,10，满足条件.

因此，$n=130$.

20. 设 p 是大于 3 的质数，求证：$11p^2+1$ 是 12 的倍数.

证明 $11p^2+1=12p^2-(p^2-1)=12p^2-(p-1)(p+1)$.

$p-1,p,p+1$ 是三个连续整数，其中必有一个是 3 的倍数，但 p 是大于 3 的质数，不能被 3 整除，因此，$p-1,p+1$ 两数中必有一个能被 3 整除. 又因为 p 是奇数，所以 $p-1,p+1$ 均为偶数，所以 $(p+1)(p-1)$ 能被 4 整除.

所以 $(p-1)(p+1)$ 能被 12 整除，而 $12p^2$ 显然能被 12 整除.

所以 $11p^2+1$ 是 12 的倍数.

第二节　实　数

一、选择题

1. 算式 $1999+1998\times1999+1998\times1999^2+\cdots+1998\times1999^{1998}+1998\times1999^{1999}$ 的结果为（　　）.

A. 1999^{1998}　　B. 1999^{1999}　　C. 1999^{2000}　　D. 1999^{2001}

答案 C.

解 原式 $=1999(1+1998+1998\times1999+1998\times1999^2+\cdots+1998\times1999^{1998})$

$=1999^2(1+1998+1998\times1999+1998\times1999^2+\cdots+1998\times1999^{1997})$

……

$=1999^{1998}(1+1998+1998\times1999)$

$=1999^{2000}$.

2. 满足 $|a-b|=|a|+|b|$ 的 a、b 的条件是（　　）.

A. $ab>0$　　B. $ab>1$　　C. $ab\leqslant 0$　　D. $ab\leqslant 1$

答案 C.

解 解法一：利用绝对值定义及性质知选 C.

解法二：利用数轴的有关性质，$|a-b|$ 表示数 a 的点与数 b 的点之间的距离，$|a|$ 表示数 a 的点到原点的距离，$|b|$ 表示数 b 的点到原点的距离，所以只有表示数 a,b 的两点不在数轴同侧时，$|a-b|=|a|+|b|$ 成立，即 $ab\leqslant 0$.

3. 设 $[n]$ 表示不超过 n 的最大整数，则下列各式中正确的是（　　）.

A. $[n]=|n|$　　B. $[n]>n-1$　　C. $[n]=|n|-1$　　D. $[n]=-n$

答案 B.

解 (由$[n]$的定义,用排除法)当n不是整数时,A、C、D都不成立.

4. 如果$x<-2$,那么$\big|1-|1+x|\big|$等于( ).

A. $2+x$　　B. $-2-x$　　C. x　　D. $-x$

答案 B.

解 $\because x<-2$,$\therefore x+1<0$.

$\therefore |x+1|=-(x+1)$,$x+2<0$.

$\therefore$原式$=|1+x+1|=|2+x|=-x-2$.

5. 若实数x满足$|1-x|=1+|x|$,那么$|x-1|$等于( ).

A. 1　　B. $-(x+1)$　　C. $x-1$　　D. $1-x$

答案 D.

解 原方程即为$|1+(-x)|=1+|-x|$,

$\therefore -x$与$|x|$同号或$x=0$,即$x\leqslant 0$. $\therefore |x-1|=1-x$.

6. 若实数a,b,c满足等式$2\sqrt{a}+3|b|=6$,$4\sqrt{a}-9|b|=6c$,则c可能取的最大值为( ).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

答案 C.

解 由两个已知等式可得$\sqrt{a}=\dfrac{3}{5}(c+3)$,$|b|=\dfrac{2}{5}(2-c)$,而$|b|\geqslant 0$,所以$c\leqslant 2$.

当$c=2$时,可得$a=9$,$b=0$,满足已知等式.所以c可能取的最大值为2.

二、填空题

7. 实数$\dfrac{1}{4-\sqrt{11}}$的整数部分是______,小数部分是______.

答案 1　$\dfrac{\sqrt{11}-1}{5}$

解 $\dfrac{1}{4-\sqrt{11}}=\dfrac{4+\sqrt{11}}{5}$. $\because 3<\sqrt{11}<4$,$\dfrac{7}{5}<\dfrac{\sqrt{11}+4}{5}<\dfrac{9}{5}$,$\therefore$整数部分为1,小数部分是$\dfrac{4+\sqrt{11}}{5}-1=\dfrac{\sqrt{11}-1}{5}$.

8. 如果a,b,c,d是四个互不相等的实数,且$|a-c|=|b-c|=|d-b|=1$,那么$|a-d|=$______.

答案 3.

解 不妨设$b<c$,由题设知$a>c$,$d<b$,因此$d<b<c<a$.

所以$|a-c|=a-c=1$,$|b-c|=c-b=1$,$|d-b|=b-d=1$.

所以$|a-d|=a-d=a-c+c-b+b-d=1+1+1=3$.

若$b>c$,同理可得$|a-d|=3$.

9. 设a,b,c为非零实数,且$a+b+c=0$,则$\dfrac{|a|b}{a|b|}+\dfrac{|b|c}{b|c|}+\dfrac{|c|a}{c|a|}=$______.

答案 -1.

解 因为 a,b,c 均为非零数，且 $a+b+c=0$，所以 a,b,c 不可能均为正，也不能均为负，故可能出现一正二负或二正一负的情况.

(1)不妨设 $a>0,b<0,c<0$，则原式$=-1$.

(2)不妨设 $a>0,b>0,c<0$，则原式$=-1$.

综上可知，原式$=-1$.

10. 从一副扑克牌(去掉大、小王)中任意抽取 4 张牌，根据牌面上的数字进行加、减、乘、除和乘方的混合运算(可以使用括号，但每张牌不能重复使用)，使运算结果为 24 或 -24，其中 A，2，…，K 依次代表 1，2，…，13，红色扑克牌代表正数，黑色扑克牌代表负数. 某同学抽到的 4 张牌是红桃 3、黑桃 4、方块 6 和草花 K，请你写出两个算式：__________.

答案 (1)$(-13-3)\div(-4)\times6=24$.

(2)$[3-(-13)]\times6\div(-4)=-24$.

11. 将 8 个数：$-7,-5,-3,-2,2,4,6,13$ 排列为 a,b,c,d,e,f,g,h，使得$(a+b+c+d)^2+(e+f+g+h)^2$的值最小，则这个最小值为______.

答案 34.

解 设 $a+b+c+d=x,e+f+g+h=y$，则 $x+y=8$，从而 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=64-2xy$，因 $x+y=8$，当 x,y 越接近 4，其积 xy 越大，但由条件知 $x,y\neq4$，故当 $x=13-5-3-2=3,y=-7+2+4+6=5$ 或 $x=-7+2+4+6=5,y=13-5-3-2=3$ 时，其积 xy 有最大限度值 15，从而所求最小值为 34.

12. 计算：$\dfrac{20001999^2}{20001998^2+20002000^2-2}=$______.

答案 $\dfrac{1}{2}$.

解
$$\begin{aligned}原式&=\frac{20001999^2}{20001998^2-1+20002000^2-1}\\&=\frac{20001999^2}{20001999\times20001997+20001999\times20002001}\\&=\frac{20001999}{20001997+20002001}\\&=\frac{20001999}{2\times20001999}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

三、解答题

13. 证明：$\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n个1}-\underbrace{22\cdots2}_{n个2}}$是一个有理数.

证明
$$\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n个1}-\underbrace{22\cdots2}_{n个2}}=\sqrt{\frac{1}{9}\times\underbrace{99\cdots9}_{2n个9}-\frac{2}{9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{9}(10^{2n}-2\times10^n+1)}=\frac{1}{3}\times(10^n-1)=\frac{1}{3}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}=\underbrace{33\cdots3}_{n个3}为有理数.$$

14. 试比较 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n}{2^n}$($n$ 为正整数)与 2 的大小关系.

解 $\frac{1}{2}=2-\frac{3}{2},\frac{2}{4}=\frac{3}{2}-\frac{4}{4},\frac{3}{8}=\frac{4}{4}-\frac{5}{8},\cdots,\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^{n-1}}-\frac{n+2}{2^n}$.

把以上各式相加,得

$$S_n=(2-\frac{3}{2})+(\frac{3}{2}-\frac{4}{4})+(\frac{4}{4}-\frac{5}{8})+\cdots+(\frac{n+1}{2^{n-1}}-\frac{n+2}{2^n})$$

$$=2-\frac{n+2}{2^n}<2.$$

所以 $S_n<2$.

15. 如图 1-2-1,将 4×4 方格表的每一个方格里都填上 1 个实数,使得每一行、每一列及两条对角线上的 4 个数的和都等于 2004,那么,方格表中 4 个角上的方格里所填的 4 个数之和 $x+y+u+v$ 是多少?

x			y
u			v

图 1-2-1

x			y
a	b	c	d
e	f	g	h
u			v

图 1-2-2

解 如图 1-2-2,由题意,有

$x+b+g+v=2004$; ①

$x+a+e+u=2004$; ②

$y+c+f+u=2004$; ③

$y+d+h+v=2004$. ④

①+②+③+④,得

$2(x+y+u+v)+(a+b+c+d)+(e+f+g+h)=4\times2004$,

即 $2(x+y+u+v)+2004+2004=4\times2004$.

所以,$x+y+u+v=2004$.

16. 已知 π 是无理数,证明:对任意整数 k,数 $\frac{\pi}{2}+k\pi$ 都是无理数.

证明 因 $\frac{\pi}{2}+k\pi=(\frac{1}{2}+k)\pi$,当 k 为整数时,$k+\frac{1}{2}$ 为非零有理数,而 π 是无理数,所以 $\frac{\pi}{2}+k\pi$ 为无理数.

17. 正整数 n 小于 100,并且满足等式 $[\frac{n}{2}]+[\frac{n}{3}]+[\frac{n}{6}]=n$,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,这样的正整数 n 有多少个?

解 由于 $\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{6}=n$,若 x 不是整数,则 $[x]<x$,知 $2|n,3|n,6|n$,即 n 是 6 的倍数.

因此,小于 100 的这样的正整数有 $[\frac{100}{6}]=16$(个).

18. 求实数 $1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}$ 的整数部分.

解 $1+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-2)+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})=\sqrt{5}$,

由 $2<\sqrt{5}<3$ 得整数部分为 2.

19. 解方程 $x^2-2[x]-5=0$.

解 设 $\{x\}=x-[x]$，则 $[x]=x-\{x\}$.

将 $[x]=x-\{x\}$ 代入原方程，得 $x^2-2x-5=-2\{x\}$.

因为 $0\leqslant\{x\}<1$，

所以 $-2<x^2-2x-5\leqslant 0$.

所以 $1-\sqrt{6}\leqslant x<-1$ 或 $3<x\leqslant 1+\sqrt{6}$.

所以 $[x]=-2$ 或 3.

当 $[x]=-2$ 时，原方程为 $x^2=1$，得 $x=\pm 1$，由于 $[\pm 1]=\pm 1$，与 $[x]=-2$ 矛盾，舍去.

当 $[x]=3$ 时，原方程为 $x^2=11$，得 $x=\pm\sqrt{11}$，由于 $[-\sqrt{11}]=-4$，与 $[x]=3$ 矛盾，舍去. 当 $x=\sqrt{11}$ 时，符合题意.

综上所述，原方程的解为 $x=\sqrt{11}$.

20. 已知 a,b 是正整数，且 $b\leqslant 100$，在将分数 $\frac{a}{b}$ 化成十进制小数时，小明得到小数点后某连续三位数字为 1，4，3，试证明小明的计算是错误的.

证明 用反证法.

假设小明无计算错误.

设 $\frac{a}{b}=A.a_1a_2\cdots a_k143a_{k+4}a_{k-5}a_{k+6}\cdots$，

则 $10^k\cdot\frac{a}{b}=Aa_1a_2\cdots a_k.143a_{k+4}a_{k+5}a_{k+6}\cdots$，

$10^k\cdot\frac{a}{b}=\overline{Aa_1a_2\cdots a_k}+0.143a_{k-4}a_{k-5}a_{k+6}\cdots$，

$10^k\cdot\frac{a}{b}-\overline{Aa_1a_2\cdots a_k}=0.143a_{k-4}a_{k+5}a_{k+6}\cdots$.

等式左边为分数形式，且分母为 b，设为 $\frac{m}{b}$，则有 $\frac{m}{b}=0.143a_{k+4}a_{k+5}a_{k+6}\cdots$.

所以 $0.143\leqslant\frac{m}{b}\leqslant 0.144$，即 $143b\leqslant 1000m<144b$，同乘以 7，得 $1001b<7000m<1008b$.

所以 $b\leqslant 7000m-1000b<8b$.

因为 b 是不超 100 的自然数，所以有 $0<7000m-1000b<800$.

而 $1000\mid(7000m-1000b)$，

故 $7000m-1000b$ 必为大于 1000 的有理数，矛盾，从而假设不成立，所以小明计算有误.

第三节　整　式

一、选择题

1. 下列各恒等变形中，属于因式分解的是（　　）.

A. $2x-2y+4=2(x-y)+4$　　　　B. $a^2-16=(a^2+4)(a^2-4)$