21世纪大学数学精品教材

◎丛书主编 蔡光兴 戴明强

复变函数与积分变换教程

郑 列 李家雄 主编

科学出版社

21世纪大学数学精品教材

丛书主编　蔡光兴　戴明强

复变函数与积分变换教程

郑　列　李家雄　主编

科学出版社

内 容 简 介

本书根据教育部高等学校工科数学《复变函数与积分变换》课程的教学基本要求和教学大纲，结合本学科的发展趋势，在积累多年教学实践的基础上编写而成。本书遵循打好专业基础、培养数学素质、提高解决实际问题能力的原则，体系严谨，逻辑性强，内容组织由浅入深，理论联系实际，讲授方式灵活.

全书共八章，涵盖复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射、傅里叶变换及拉普拉斯变换等内容，每章后列本章内容小结、典型例题、习题和自测题，书后给出了相应的答案或提示。附录中含有傅氏变换简表和拉氏变换简表，供学习时查用.

本书可供高等学校工科各专业的学生使用，也可供有关科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换教程/郑列，李家雄主编. 一北京：科学出版社，2013.7
21世纪大学数学精品教材
ISBN 978-7-03-038154-5

Ⅰ.①复… Ⅱ.①郑… ②李… Ⅲ.①复变函数－高等学校－教材 ②积分变换－高等学校－教材 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第156304号

责任编辑：王雨舸／责任校对：蔡　莹
责任印制：彭　超／封面设计：苏　波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉市新华印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
开本：B5(720×1 000)
2013年7月第　一　版　印张：14 1/2
2013年7月第一次印刷　字数：281 000
定价：28.00元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《21 世纪大学数学精品教材》丛书序

《21 世纪大学数学精品教材》为大学本科(本科 1 普通类和本科 2 一类)数学系列教材,体现了对数学精品的归纳及本套教材的精品特征.

一、组编机构

丛书设组编委员会,编委由 12 所高校数学院系的负责人构成(按姓氏笔画):

王公宝　方承胜　江志宏　李逢高　杨鹏飞　时　宝　何　穗　张志军

欧贵兵　罗从文　周　勇　殷志祥　高明成　黄朝炎　蔡光兴　戴明强

丛书主编:

蔡光兴　戴明强

二、编写特点

1. 适用性

教材的适用性是教材的生命力所在,每本教材的篇幅结合绝大部分高等院校数学院系对课程学时数的要求. 部分教材配有教学光盘,便于教学.

2. 先进性

把握教改、课改动态和学科发展前沿,反映学科、课程的先进理念、知识和方法.

3. 创新性

市场需求和市场变化决定教材创新需要,数学教学在知识创新、思维创新等方面负有责任,一定程度的创新使教材更具冲击力和影响力.

创新与继承相结合,是继承基础上的创新.

创新转变为参编者、授课者的思想和行为,达到文化融合.

4. 应用性

丛书的读者对象为应用型和研究应用型大学本科(本科 1 普通类和本科 2 一类)学生,应用性是数学学科和数学教学发展的新特点,或展现在教材内容结构上,或体现于某些章节,或贯穿于其中.

5. 教学实践性和系统性

教材具有可操作性,教师好教,学生好学,同时保持知识完整. 二者发生矛盾

时，前者优先，不过分追求体系完整.

三、指导思想

《21世纪大学数学精品教材》大致可划分为两大类：基础知识类；方法与应用类.

1. 基础知识类

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求，知识体系相对完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，通俗易懂.

(2) 融入现代数学思想(如数学建模)，分别将Mathematica、MATLAB、SAS、SPS等软件的计算方法，恰当地融入课程教学内容中，培养学生运用数学软件的能力.

(3) 强化学生的实验训练和动手能力，可将实验训练作为模块，列入附录，供教学选用或学生自学自练，使用者取舍也方便.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样. 书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

2. 方法与应用类

(1) 融入现代数学思想和方法(如数学建模思想)，体现现代数学创新思维，着力培养学生运用现代数学工具(软件)的能力，使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到教材与教学内容的现代精品教材.

(2) 加强教学知识与内容的应用性，注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性. 通过实例、训练、实验等各种方式，提高学生对数学知识、数学方法的应用能力及解决问题的能力.

(3) 强化学生的实验训练，通过完整的程序与实例介绍，教会学生分析问题、动手编程、分析结果，提高学生的实验操作水平、实际动手能力和创新能力.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样. 书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

《21世纪大学数学精品教材》组编委员会

2012年9月

前　言

《复变函数与积分变换教程》是面向高等工科学校学生的具有明显工程应用背景的数学课程.随着科学技术的迅速发展,它的理论和方法已广泛应用于电工技术、力学、自动控制、通信技术等许多工程技术和科学研究领域.

本课程包括内容互不相同、但又联系密切的"复变函数"和"积分变换"两部分内容.复变函数理论这个新的数学分支统治了19世纪的数学,当时被公认是最丰饶的数学分支和抽象科学中最和谐的理论之一.20世纪初,复变函数理论又有了很大的进展,开拓了复变函数理论更广阔的研究领域.复变函数的理论和方法在数学、自然科学和工程技术中有着广泛的应用,是解决诸如电磁学、热学、流体力学、弹性理论中的平面问题的有力工具,它的基础内容已成为理工科很多专业的必修课程.积分变换主要是傅立叶变换和拉普拉斯变换,它是通过积分运算把一个函数变成另一个函数的变换.积分变换的理论与方法不仅在数学的许多分支中,而且在自然科学和工程技术领域中均有着广泛的应用,已经成为不可缺少的运算工具.

本课程主要讲授复变函数与积分变换的基本理论和方法.通过本课程的学习,学生不仅能够学到复变函数与积分变换的基本理论和数学物理及工程技术中常用的数学方法,同时还可以巩固和复习高等数学的基础知识,提高数学素养,为学习有关的后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础.在培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力等方面起着特殊而重要的作用.

本书是在编者多年来讲授工科"复变函数与积分变换"课程的基础上,遵照教育部制定的本课程教学大纲的基本要求编写而成的.在编写过程中,我们广泛吸取了国内同类教材的主要优点,并融合了编者多年来教授该门课程的经验和体会.考虑到工科学生学习本课程的目的主要在于应用,作者侧重于对基本概念和解题方法的讲解,基本概念的引入尽可能联系实际,淡化了一些理论的证明.在内容安排上力求由浅入深,循序渐进.与同类教材相比,本书删减了部分理论性较强的内容,使之更适合工科学生学习.同时,为了便于自学和实际的需要,在注意行文的科学性与严密性的同时,力求叙述简洁,通俗易懂.另外,本书在每章后精心设计了"内容小结"和"典型例题",可帮助读者更清楚地把握学习要点,更深刻地理解该章的主要学习内容,更熟练地应用所学知识解决实际问题.本书在每一章都精选

了一定数量的习题和自测题，供读者巩固练习和及时了解自己的学习情况，书后附有习题答案或提示，供读者参考.

本书可供高等学校工科各专业的学生使用，也可供有关科技人员参考. 目录中打"*"号的章节，可根据各专业的不同需要选用. 本书建议用 48～56 学时（不含"*"内容）. 本书定理的证明，若学时紧张，可以不使用.

本书由郑列、李家雄主编，贺方超、蔡振锋任副主编. 各章编写人员如下：陈华（第一章），万祥兰（第二章），耿亮（第三章），朱莹（第四章），蔡振锋（第五章），李家雄（第六章），郑列（第七章），贺方超（第八章）. 最后由李家雄统稿，郑列定稿.

由于编者水平有限，加上时间仓促，本书不妥之处在所难免，恳请广大读者提出批评、建议，以便再版时予以修订.

编者

2013.5

目　　录

第一章　复数与复变函数

复变函数论中研究的函数的自变量与因变量均取复数. 所以,我们应该对复数域以及复变量的函数有清晰认识. 本章主要介绍了复数的基本概念、复数的运算、复数的常见表示方法及其在几何中的应用、复平面上的点集、复变函数概念及其极限、连续等内容. 这些内容是学习全书的基础.

第一节　复　数

一、复数及其四则运算

1. 复数的概念

称形如 $z = x + \mathrm{i}y$ 的数为复数,其中 x, y 是任意实数,i 为虚数单位. x, y 分别称为 z 的实部(real part) 与虚部(imaginary part),记为

$$x = \mathrm{Re}z,\quad y = \mathrm{Im}z.$$

当 $y = 0$ 时,$z = x$,我们将它视为实数 x;当 $x = 0, y \neq 0$ 时,我们称 $z = \mathrm{i}y$ 为纯虚数.

对于任意两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$. 如果 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$,则称 z_1 与 z_2 相等.

显然,一个复数等于零,当且仅当它的实部和虚部分别相等.

称 $x - \mathrm{i}y$ 与 $x + \mathrm{i}y$ 互为共轭复数. 复数 z 的共轭复数记为$\bar{z}$.

易知$\overline{(\bar{z})} = z$.

2. 复数的四则运算

设任意两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$. 复数 z_1 与 z_2 的四则运算定义如下:

(1) 复数的加法定义为实部与实部相加及虚部与虚部相加,即

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2). \tag{1.1.1}$$

(2) 复数的减法定义为实部与实部相减及虚部与虚部相减,即

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2). \tag{1.1.2}$$

(3) 复数的乘法定义为两个复数按多项式乘法法则相乘,即

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{1.1.3}$$

(4) 复数的除法是乘法的逆运算，若 $z_2 \neq 0$，将满足 $z_2 \cdot z = z_1$ 的复数 z 定义为 z_1 除以 z_2 的商，记为 $z = \dfrac{z_1}{z_2}$，即

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0). \tag{1.1.4}$$

因为实数是复数的特例，所以复数的运算法则施行于实数时，应与实数的运算结果保持一致. 我们知道，实数运算满足结合律、交换律、分配律. 同样地，复数运算也满足这些规律：

(1) 结合律

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3.$$

(2) 交换律

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

(3) 分配律

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3.$$

这些算律，读者可以根据定义自行验证. 另外，以下事实显然成立：

(1) $0 + z = z + 0 = z, 1 \cdot z = z \cdot 1 = z$.

(2) $1 \cdot z = z \cdot 1 = z,\ z \cdot (1/z) = (1/z) \cdot z = 1$.

(3) $\dfrac{z_1 + z_2}{z_3} = \dfrac{z_1}{z_3} + \dfrac{z_2}{z_3}$.

(4) 若 $z_1 z_2 = 0$，则 z_1 与 z_2 至少有一个为零，反之也成立. 这是因为如果 $z_1 z_2 = 0$，$z_2 \neq 0$，则

$$z_1 = z_1 \cdot \left(z_2 \cdot \frac{1}{z_2}\right) = (z_1 \cdot z_2) \cdot \frac{1}{z_2} = 0.$$

例 1.1.1 证明：$(1+z)^2 = 1 + 2z + z^2$.

证 $(1+z)^2 = (1+z) \cdot (1+z) = 1 + z + z + z^2 = 1 + 2z + z^2$.

例 1.1.2 当 x, y 等于什么实数时，等式 $\dfrac{x + 1 + \mathrm{i}(y-3)}{5 + 3\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$ 成立.

解 将等式右边化为 $u + \mathrm{i}v$ 形式，比较两边实部与虚部，建立方程组求解，由原式，得

$$x + 1 + \mathrm{i}(y - 3) = (1 + \mathrm{i})(5 + 3\mathrm{i}) = 2 + 8\mathrm{i},$$

所以

$$\begin{cases} x + 1 = 2, \\ y - 3 = 8, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 11. \end{cases}$$

共轭复数有很多用处，下面介绍它的几个常用运算性质：

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$；　　(2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$；

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2},\ z_2 \neq 0$；　　(4) $z\overline{z} = x^2 + y^2 = (\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2$；

(5) $\mathrm{Re}z = \dfrac{1}{2}(z+\overline{z}), \mathrm{Im}z = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$.

这里证明性质(3)，其余留给读者自行证明.

证　设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，那么

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \mathrm{i}\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

$$\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{\overline{z}_1 z_2}{\overline{z}_2 z_2} = \frac{(x_1 - \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \mathrm{i}\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

所以性质(3) 成立.

二、复数的几何表示

1. 复数的复平面表示

一个复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 实质上可由一个有序实数对 (x, y) 唯一确定，而有序实数对与 xy 平面上的点是一一对应关系. 因此，复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 可用横坐标为 x，纵坐标为 y 的点 (x, y) 来表示，如图 1-1 所示.

由于 x 轴上的点表示复数的实部，y 轴上的点表示复数的虚部，所以 x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴. 这样表示复数 z 的 xy 平面可称为复平面或 z 平面. 这种用点 (x, y) 表示复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的方法，我们称之为复数的复平面表示法. 为了方便，今后我们可以将复数与复平面的点等同起来. 也就是说，一个复数集合就是一个平面点集. 从而，某些平面点集就可以用复数所满足的某种关系来表示. 例如，$\{z: \mathrm{Im}z \geqslant 0\}$ 与 $\{z: 0 \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant 1, 0 \leqslant \mathrm{Im}z \leqslant 1\}$ 分别表示上半平面与以 $0, 1, 1+\mathrm{i}, \mathrm{i}$ 为顶点的正方形.

2. 复数的向量表示

在复平面上，复数 z 还可以同以坐标原点为起点的平面向量构成一一对应关系，只要将复数的实部与虚部分别看成向量的水平分量与垂直分量即可. 所以，复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 也可以用向量来表示，如图1-2所示. 需要注意的是，向量具有平移不变性，即起点可安放在任意一点，但为了叙述方便，若没特殊说明，本书所指的向量都是以坐标原点为起点.

对应向量的长度称为 z 的模，记为 $|z|$；对应向量的方向角(即从实轴的正向到向量之间的夹角) 称为 z 的辐角，记为 $\mathrm{Arg}z$. 当 $z = 0$ 时，$|z| = 0$，这时辐角没有意义. 当 $z \neq 0$ 时，辐角有无穷多个，并且任意两个辐角值相差 2π 的整数倍. 我们把满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 θ_0 称为 z 的主辐角，记为 $\theta_0 = \arg z$. 这种用向量表示复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的方法，我们称之为复数的向量表示法. 正因为复数与平面向量之间存在这种一一对应关系，所以有关平面向量的问题就可以利用复变函数来解决.

从而,复变函数论可以广泛地应用到理论物理、弹性力学、流体力学等领域.

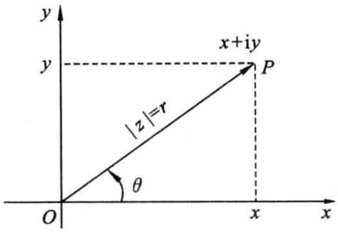

图 1-1

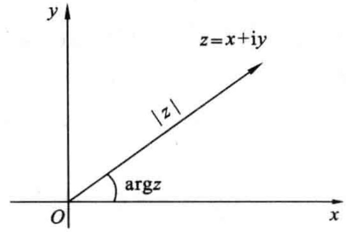

图 1-2

1) 复数的模

关于复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模 $|z|$,有下列重要结论:

(1) $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$;

(2) $|z|=|\bar{z}|$, $|z|^2=z\bar{z}$;

(3) $|x|\leqslant|z|$, $|y|\leqslant|z|$, $|x|+|y|\geqslant|z|$;

(4) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$;

(5) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$;

(6) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

(1)、(2)、(3) 显然成立. 利用定义和性质易得(4), 在后续章节我们还可以利用复数的其他形式(三角或指数形式) 更简洁地证明它.

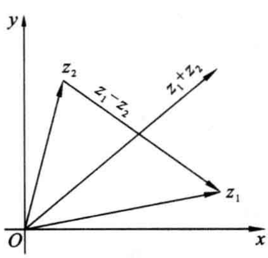

图 1-3

下面证明复数模的三角不等式(5) 与(6).

证法 1 由复数与向量之间的关系,我们知道:对于任意两个复数 z_1 与 z_2, $|z_1-z_2|$ 就是复平面上点 z_1 与点 z_2 之间的距离. 再根据三角形两边长之和大于第三边长,两边长之差小于第三边长的法则,由图 1-3 易得不等式(5) 与(6) 成立,需要注意的是,式(5) 与(6) 中等号成立的充分必要条件是 z_1 与 z_2 位于通过原点的同一条直线上.

证法 2 由结论(2) 以及共轭复数的性质,可得

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2),\end{aligned}$$

又由结论(3)、(4)、(2) 可知

$$|\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)|\leqslant|z_1\bar{z}_2|=|z_1||\bar{z}_2|=|z_1||z_2|.$$

所以 $|z_1+z_2|^2\leqslant(|z_1|+|z_2|)^2$,即 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$. 将此式中的 z_2 用 $-z_2$ 替换,易得

$$|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

由于 $|z_1|=|z_1+z_2-z_2|\leqslant|z_1+z_2|+|z_2|$，从而得 $|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1+z_2|$. 同理可得

$$|z_2|-|z_1|\leqslant|z_1+z_2|,\quad \text{即} \quad ||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|.$$

将此式中的 z_2 用 $-z_2$ 替换，易得 $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|$.

综上所述，不等式(5) 与(6) 成立.

2) 复数的辐角

关于复数的辐角，显然有

$$\tan(\mathrm{Arg}z)=\frac{y}{x},\quad \mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\quad (k\ \text{是任意整数},-\pi<\arg z\leqslant\pi).$$

由此可见，辐角主值 $\arg z$ 由等式 $\tan(\arg z)=\dfrac{y}{x}$ 右边的值，x 和 y 的符号以及 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$ 唯一确定. 进而，我们有

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\ y\ \text{为任意实数}\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,\ y\geqslant 0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,\ y<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0.\end{cases}$$

例 1.1.3　求下列复数的模与辐角主值.

(1) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$；　　(2) $\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}$.

解　(1) $|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2$，$\arg z=\arg\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$.

(2) 因为

$$\frac{1}{3+2\mathrm{i}}=\frac{3-2\mathrm{i}}{(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}=\frac{3}{13}+\mathrm{i}\left(\frac{-2}{13}\right),$$

所以

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2+\left(\frac{-2}{13}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{13}},\quad \arg z=-\arctan\frac{2}{3}.$$

3. 复数的三角表示

设复数 $z\neq 0$，r 是 z 的模，θ 是 z 的任意一个辐角，则由直角坐标系与极坐标系之间的关系，可得

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

该式称为复数 z 的三角表示. 反之,对于任意的正数 r 与实数 θ,$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 一定是某个复数 z 的三角表示.

由于辐角 θ 是任意的,所以一个复数的三角表示不是唯一的. 对于复数 z 的任意两个三角表示:

$$z=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\quad z=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2).$$

可推得

$$r_1=r_2,\quad \theta_1=\theta_2+2k\pi,$$

其中,k 为某个整数.

4. 复数的指数表示

对于复数的三角表达式

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,可得

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

我们称此式为复数 z 的指数表示式.

例 1.1.4 将下列复数表示为三角表示式与指数表示式.

(1) $-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$; (2) $1+\mathrm{i}\tan\theta$ $(\pi<\theta<2\pi)$.

解 (1) 因为 $|-\sqrt{12}-2\mathrm{i}|=\sqrt{12+4}=4$;$\arg z=-\frac{5}{6}\pi$,所以

$$-\sqrt{12}-2\mathrm{i}=4\left[\cos\frac{5}{6}\pi-\mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi\right]=4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi}.$$

(2) 因为 $|1+\mathrm{i}\tan\theta|=\sqrt{1+\tan^2\theta}=|\sec\theta|$;$\arg z=\theta-2\pi$,所以

$$1+\mathrm{i}\tan\theta=|\sec\theta|\,[\cos(\theta-2\pi)+\mathrm{i}\sin(\theta-2\pi)]=|\sec\theta|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-2\pi)}.$$

注 复数的不同表示方法仅是形式上的不同,它们各有各的特点. 在不同的运算中可以选择不同的表示式进行运算,以求方便、简捷. 另外,复数的加法、减法运算的几何意义可从向量表示法得到,复数的乘法、除法运算的几何意义可以从三角或指数表示法得到.

5. 复数四则运算的几何意义

由向量减法的几何意义可以得到复数减法的几何意义,也就是说复数减法 z_1-z_2 可以表示为从向量 z_2 的终点指向向量 z_1 的终点的向量. 同样地,复数加法 z_1+z_2 可以表示为以向量 z_1 和 z_2 为邻边的平行四边形的对角线所对应向量(与 z_1,z_2 共起点). 然而,复数的乘法、除法运算却不能由向量运算进行解释. 不过,我

们可以利用复数的三角表示或指数表示给出复数乘除法的几何解释.

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \neq 0, z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} \neq 0$，则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)], \tag{1.1.5}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)], \tag{1.1.6}$$

从而有：

定理 1.1　两个复数乘积的模等于它们模的乘积；两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和.

定理的含义：对于任何两个复数 $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$，满足

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \tag{1.1.7}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2. \tag{1.1.8}$$

需要注意的是，(1.1.8) 式应理解为集合的相等. 也就是说，对于等式左端的任一值，等式的右端必有一值与之相等；反之也成立. 今后，我们还会遇到此类等式，对它们可以作类似的解释.

由(1.1.7) 式与(1.1.8) 式可知复数乘法运算的几何意义：乘积 $z_1 z_2$ 表示的是将向量 z_1 逆时针旋转角度 $\operatorname{Arg} z_2$ 并伸缩 $|z_2|$ 倍而获得的向量. 如图 1-4 所示.

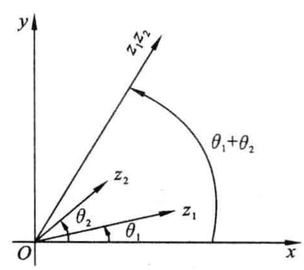

图 1-4

定理 1.2　两个复数商的模等于它们模的商；两个复数商的辐角等于被除数与除数的辐角差.

定理的含义：对于任何两个复数 $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$，满足

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{1.1.9}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \tag{1.1.10}$$

由(1.1.9) 式与(1.1.10) 式可知复数除法运算的几何意义：除法 $\frac{z_1}{z_2}$ 表示的是将向量 z_1 顺时针旋转角度 $\operatorname{Arg} z_2$ 并伸缩 $\frac{1}{|z_2|}$ 倍而获得的向量.

例 1.1.5　设 $z_1 = 1+\sqrt{3}\mathrm{i}, z_2 = -1-\mathrm{i}$，利用三角表示与指数表示计算 $z_1 z_2$ 和 $\frac{z_1}{z_2}$.

解　因为 $|z_1| = 2, \tan(\operatorname{Arg} z_1) = \sqrt{3}$，$z_1$ 在第 I 象限，所以 z_1 的三角表达式为

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

z_1 的指数表达式为 $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

因为 $|z_2| = \sqrt{2}, \tan(\mathrm{Arg}z_2) = 1, z_2$ 在第 III 象限,所以 z_2 的三角表达式为

$$z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right].$$

z_2 的指数表达式为 $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$. 所以

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right)\right] \\ &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right] \\ &= 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right)\right] \\ &= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right] \\ &= 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{11\pi}{12}\right)}. \end{aligned}$$

三、复数的乘幂与方根

1. 复数的乘幂

设复数 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0$, n 是一正整数,则 z^n 表示 n 个 z 的乘积,即复数的乘幂. 根据乘法法则可以推得乘幂的运算法则

$$z^n = [r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta), \tag{1.1.11}$$

即

$$z^n = (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{1.1.12}$$

特别地,当 $r = 1$ 时,

$$z^n = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta, \tag{1.1.13}$$

即

$$z^n = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{1.1.14}$$

我们称(1.1.13)、(1.1.14) 两式为棣莫弗(De Moivre) 公式.

例 1.1.6 计算 $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10}$.

解法 1 $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10} = \left[\dfrac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2}{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i})}\right]^{10} = \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{10}$.