

解析几何 三角

学院数学系编

一九七八年

目 录

第一篇 平面解析几何

第一章 坐标法

§ 1.1 有向线段	1
一、轴上有向线段	1
二、用坐标来计算轴上有向线段的量和长度	5
§ 1.2 两点间的距离	6
§ 1.3 线段的定比分点	8
§ 1.4 曲线与方程	12
一、曲线与方程的意义	12
二、已知曲线求它的方程	15
三、已知方程求它的曲线	20
习题	22

第二章 直线

§ 2.1 直线的方程	25
一、点斜式	25
二、斜截式	28
三、两点式	30
四、一般式	31
§ 2.2 直线型经验公式	33

§ 2.3	两直线的夹角	36
§ 2.4	点到直线的距离	42
	习题	53

第三章 椭圆、双曲线、抛物线

§ 3.1	椭圆	
一、	椭圆的定义和标准方程	58
二、	椭圆的性质	62
三、	椭圆的画法	72
四、	椭圆的切线	73
五、	椭圆的一个性质的应用	76
§ 3.2	双曲线	
一、	双曲线的定义和标准方程	79
二、	双曲线的性质	82
三、	双曲线的切线	90
四、	双曲线的画法和一些应用	91
§ 3.3	抛物线	
一、	抛物线的定义	94
二、	抛物线的标准方程和性质	95
三、	抛物线的画法	98
四、	抛物线的切线及其应用	100
§ 3.4	小结	103
	习题	109

第四章 坐标变换与二元二次方程的化简

§ 4.1	坐标轴的平移
-------	--------

一、坐标轴的平移	116
二、移轴对二元二次方程系数的影响	118
§ 4.2 坐标轴的旋转	
一、坐标轴的旋转	122
二、含 x, y 项的二元二次方程的化简	125
§ 4.3 二元二次方程类型的判定	131
习题	134

第五章 极坐标, 参数方程

§ 5.1 极坐标	
一、极坐标的概念	138
二、极坐标与直角坐标的关系	141
三、曲线的极坐标方程	143
§ 5.2 参数方程	
一、参数方程的概念	151
二、参数方程和普通方程的关系	154
§ 5.3 几种特殊曲线	
一、等速螺线	159
二、等加速螺线	164
三、渐开线	167
四、摆线	172
习题	175

第二篇 空间解析几何

第六章 空间直角坐标系

§ 6.1 空间的点的直角坐标	184
-----------------	-----

§ 6.2 空间解析几何的几个简单问题

- 一、坐标系平移后同一点新旧坐标间的关系..... 187
- 二、求空间两点间距离的公式..... 188
- 三、分线段为定比的点的坐标..... 189

§ 6.3 曲面的方程与方程的曲面.....191

§ 6.4 某些特殊方程的曲面

- 一、不含某个坐标的三元方程的曲面..... 195
- 二、只含一个坐标的方程的曲面..... 197

§ 6.5 曲线的方程

- 一、空间曲线作为两曲面的交线..... 198
- 二、曲线与曲面的交点..... 201
- 习题..... 201

第七章 向量代数、空间直线与平面

§ 7.1 向量的概念.....205

§ 7.2 向量的加法与减法

- 一、向量的加法的定义及性质..... 207
- 二、向量的减法的定义及性质..... 209

§ 7.3 向量与数的乘法.....210

§ 7.4 向量的射影与向量的坐标

- 一、向量在轴上的射影..... 213
- 二、向量的坐标及方向余弦..... 218
- 三、向量对坐标基底的分解..... 219
- 四、用向量的坐标对向量进行线性运算..... 221

§ 7.5 直线的方程

- 一、直线的标准方程..... 222

二、直线的参数方程·····	224
§ 7.6 向量的内积	
一、向量的内积和它的基本性质·····	225
二、用向量的坐标计算内积·····	229
§ 7.7 平面的方程	
一、平面的点法式方程·····	231
二、平面的一般方程及其讨论·····	232
§ 7.8 平面与平面的关系 直线与平面的关系 点 与平面的关系·····	236
§ 7.9 作为两平面的交线的直线·····	244
§ 7.10 向量的外积	
一、向量的外积概念·····	245
二、向量的运算性质·····	247
三、用向量坐标计算外积·····	250
§ 7.11 点列直线的距离·····	252
§ 7.12 三向量的混合积	
一、混合积及其几何意义·····	253
二、混合积的性质·····	255
三、用向量的坐标计算混合积·····	256
§ 7.13 混合积的几何应用	
一、平面的三点式方程·····	257
二、四面体的体积·····	257
三、二直线间的距离·····	258
四、二已知异面直线的公垂线·····	260
习题·····	262

第八章 常见的曲面

§ 8.1 柱面的方程	274
§ 8.2 锥面的方程	277
§ 8.3 旋转曲面	278
§ 8.4 其他几种常见的二次曲面	282
习题	288

第三篇 平面三角

第一章 锐角三角函数

§ 1.1 锐角三角函数的概念	293
§ 1.2 特殊角(45° 、 30° 、 60°)的三角函数	297
习题	302
§ 1.3 直角三角形的解法	306
习题	311

第二章 任意角的三角函数

§ 2.1 角	
一、角的概念的推广	315
二、角的弧度制	316
§ 2.2 任意角的三角函数	
一、平面直角坐标系	320
二、直角坐标系中的角	322
三、任意角的三角函数	323
四、几个特殊角(0° 、 90° 、 180° 、 270°)的三角函数	327

五、用有向线段表示三角函数.....	329
习题.....	332
§ 2.3 同角的三角函数之间的关系	
一、倒数关系.....	334
二、比的关系.....	334
三、平方和关系.....	335
四、同角三角函数基本关系式的应用举例.....	337
§ 2.4 已知角的一个三角函数值, 求其他各三角函数值.....	339
习题.....	342

第三章 诱导公式

§ 3.1 同终边的角的三角函数数之间的关系.....	345
§ 3.2 角 $-\alpha$ 与 α 的三角函数间的关系.....	345
§ 3.3 角 $90^\circ + \alpha$ 角的三角函数.....	347
习题.....	356

第四章 三角恒等式

§ 4.1 和差公式	
一、两角和及两角差的三角函数.....	359
习题.....	365
二、倍角公式.....	366
三、半角公式.....	370
习题.....	372
§ 4.2 关于正弦、余弦的积化和差及和差化积的公式	

一、积化和差.....	373
二、和差化积.....	374
§ 4.3 杂例.....	376
习题.....	379

第五章 任意三角形的边与角间的关系

§ 5.1 正弦定律.....	382
§ 5.2 余弦定律.....	387
§ 5.3 解三角形的问题.....	392
§ 5.4 利用对数解三角形.....	398
一、半角定律.....	398
二、正切定律.....	402
§ 5.5 三角形的面积.....	405
习题.....	408

附录 行列式初步

§ 1 二元一次方程组及二阶行列式.....	1
§ 2 三阶行列式.....	7
§ 3 行列式按行列展开.....	12
§ 4 三元线性方程组的求解公式.....	14

第一篇 平面解析几何

第一章 坐标法

恩格斯说：“纯数学的研究对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。”在初等数学里，几何以研究空间形式为主，它们的研究对象各不相同，研究方法在本质上也是没有联系的。解析几何则是用代数方法研究某些几何图形的性质的。它通过坐标法用数（坐标）表示点，用方程表示图形，然后从方程的研究得出相应的图形的性质的结论。本章我们首先介绍有向线段，两点间的距离以及线段的定比分割等几个基本问题，再进一步阐明曲线与方程的概念，为后面的学习打下基础。

§ 1.1 有向线段

一、轴上有向线段

用有向线段的概念建立形与数的关系，在三角学里我们曾见到过（用三角函数线表示三角函数）。在这里为了讲清坐标法的概念，我们有必要再详细一点讨论有向线段的问题。

在初等几何中，一般不考虑直线和线段的方向。在解析几何里，根据“形”和“数”结合的需要，我们必须考虑到直线

和线段的方向。

一条直线具有两个相反的方向，如果选定其中的一个作为它的正方向（如图1—1中的箭头所示），那么另一个就是它的负向。

定义 规定了正向的直线叫做有向直线，也叫做轴。



图1—1

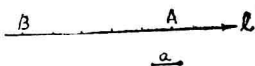


图1—2

一条线段也有两个相反的方向，如图1—2，轴 l 上 A 、 B 两点所确定的线段，如果以 A 为起点 B 为终点，那么从 A 到 B 是它的一个方向；如果以 B 为起点 A 为终点，那么从 B 到 A 就是从 A 到 B 的反向。

定义 规定了起点的线段叫做有向线段。从起点到终点的方向叫做有向线段的方向。

有向线段用两个端点的大写字母，并在上面画一横线来表示。但起点的字母一定要写在终点字母的前面。例如： $\overline{AB}$ 表示以 A 为起点 B 为终点的有向线段； $\overline{BA}$ 表示以 B 为起点 A 为终点的有向线段。

要确定一条有向线段的方向是正是负，就要把它的方向和它所在轴的正向相比较，如果它的方向和它所在轴的正向一致时，就叫它是正向线段，否则就叫负向线段。如图1—2， $\overline{AB}$ 是负向线段， $\overline{BA}$ 是正向线段。

选定一条线段做长度单位，就可量得有向线段的长度。有向线段 $\overline{AB}$ 的长度记作 $|\overline{AB}|$ ，叫做有向线段 $\overline{AB}$ 的模（或绝对值）。如图1—2，线段 e 是选定的长度单位，所以

$$|AB| = |BA| = 3。$$

定义 轴上一条有向线段的长度，连同表示它的正向或负向的符号“+”、“-”，叫做这条有向线段的量。

有向线段 $\overline{AB}$ 的量用 AB 表示。如图1—2中，

$$AB = -3, BA = 3,$$

显然 $AB = -BA, AB + BA = 0。$

起点和终点重合的线段叫做零线段。它的方向是不定的。为了一致起见，我们把零线段也看作有向线段，它的量是0。

下面来研究同一轴上，若干个点所确定的有向线段的量的关系。

定理1.1 在同一条轴 l 上的三点 A, B, C ，不论它们排列的顺序如何，恒有下面的等式成立：

$$AB + BC = AC。$$

证明 我们分三种情况进行讨论。

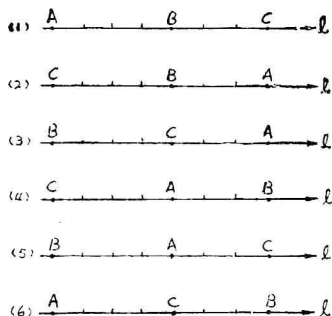


图1—3

(1) 设 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 都不是零线段，并且他们的方向相同

(如图1—3中的(1), (2))。

这时 $\overline{AC}$ 和 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 的方向相同, 且有

$$|AB| + |BC| = |AC|。$$

在这种情况下, AB 、 BC 和 AC 都是符号相同的数, 所以

$$AB + BC = AC。$$

(2) 设 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 都不是零线段, 且它们的方向相反 (如图1—3中的(3)—(6))。

这时, $\overline{AC}$ 的长度等于 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 长度之差。 $\overline{AC}$ 的方向和 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 中绝对值较大的一个相同。在这种情况下, AB 和 BC 是符号相反的数, AC 的绝对值等于 AB 和 BC 的绝对值之差, 符号和 AB 、 BC 中绝对值较大的一个相同。根据正负数的加法法则可知,

$$AB + BC = AC。$$

(3) 设 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 中有一个是零线段, 则 B 点与 A 点重合, 所以

$$AB + BC = AA + AC = 0 + AC = AC。$$

若 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 都是零线段, 这时 A 、 B 、 C 重合为一点, 显然有

$$AB + BC = AC。$$

综上所述, 可知对于 A 、 B 、 C 的所有位置, 等式

$$AB + BC = AC$$

恒成立。

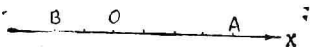
这个定理可以推广到轴上 n 个点的情况。可以证明, 不论这 n 个点 A_1 、 A_2 、 A_3 …… A_n 在同一条轴上排列的顺序如何, 恒有下面的等式

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n = A_1A_n$$

成立。

二、用坐标来计算轴上有向线段的量和长度

在代数里我们知道，数轴上的点和全体实数之间有着一一对应的关系。在解析几何里，数轴也叫做坐标轴。确定一条数轴，也叫做在直线上建立了坐标系。就直线上的坐标系而言，和数轴上的点相对应的实数，叫做该点的坐标。在 ox 轴上，如果一点 P 的坐标是 x ，那么以原点 O 为起点， P 为终点的有向线段的量就是 x 。如图1—4所示，点 A 的坐标是 4，即



$$OA = 4,$$

图1—4

记作 $A(4)$ ；点 B 的坐标是 -2 ，即

$$OB = -2,$$

记作 $B(-2)$ 。

在坐标轴上，有向线段的量和 A, B 两点的坐标有着密切的联系。

定理1.2 坐标轴上有向线段的量，等于它的终点的坐标减去起点的坐标。

证明 设坐标轴的原点为 O ， $\overline{AB}$ 的起点和终点的坐标分别为 x_1 和 x_2 ，根据定理1.1，有

$$OA + AB = OB,$$

因此 $AB = OB - OA$ 。

但 $OA = x_1, OB = x_2$ ，

故 $AB = x_2 - x_1$ 。

于是定理得到了证明。

由定理1.2可知， $|AB| = |x_2 - x_1|$ ，因为 $\overline{AB}$ 的长度即 $A、$

B 两点间的距离，因此得

推论 若 d 表示一坐标轴上任意两点 $A(x_1)$ 和 $B(x_2)$ 之间的距离，则

$$d = |x_2 - x_1|。$$

例 1 已知同一条坐标轴上的四点 $A(5)$ 、 $B(-1)$ 、 $C(-8)$ 、 $D(2)$ ，求 AB 、 CD 、 DB 。

解 由定理 1.2 得

$$AB = (-1) - 5 = -6；$$

$$CD = 2 - (-8) = 10；$$

$$DB = (-1) - 2 = -3。$$

例 2 已知 M 、 N 、 P 三点在同一坐标轴上，它们的坐标分别是 -6 、 2 、 -5 ，求 M 和 N 两点间的距离 d_1 以及 M 和 P 两点间的距离 d_2 。

解 由定理 1.2 的推论得

$$d_1 = |2 - (-6)| = 8，$$

$$d_2 = |-5 - (-6)| = 1。$$

§ 1.2 两点间的距离

在三角学里，我们已经建立了平面直角坐标系，并且已经知道，坐标平面内点的位置完全被它的坐标所确定。因而两点间的距离也就可以用这两点的坐标来表示。

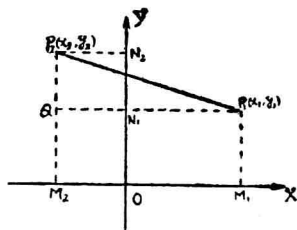


图 1—5

如图 1—5，已知两点 P_1 和

P_2 的坐标分别是 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 我们来研究它们之间的距离 d 。

从 P_1 和 P_2 分别向两轴作垂线 $P_1M_1, P_2M_2, P_1N_1, P_2M_2$, 设 P_1N_1 和 P_2M_2 交于 Q 点, 则在直角三角形 P_1QP_2 中, 由勾股定理得

$$|P_1P_2|^2 = |P_1Q|^2 + |QP_2|^2。$$

根据定理1.2的推论,

$$|P_1Q| = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|QP_2| = |N_1N_2| = |y_2 - y_1|。$$

因而

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2。 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} d &= |P_1P_2| \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}。 \end{aligned} \quad (1-1)$$

这个公式对于 $\overline{P_1P_2}$ 平行于 x 轴或 y 轴时也同样适用。(为什么?)

例1 求点 $A(-2, 3)$ 和点 $B(6, -12)$ 之间的距离 d 。

解 由公式(1-1)得

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{[6 - (-2)]^2 + [(-12) - 3]^2} \\ &= 17。 \end{aligned}$$

例2 求一点 $P(x, y)$ 到坐标原点的距离 R 。

解 $\because$ 原点的坐标为 $x_0 = 0, y_0 = 0$,

$\therefore$ 由公式(1-1)得

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(0 - x)^2 + (0 - y)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2}。 \end{aligned}$$

例3 证明矩形的两对角线相等。

证明 我们建立如图1—6所示的坐标系 $O-xy$ ，则可设矩形 $OACB$ 的四个顶点的坐标分别为

$O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $C(0, b)$, $B(a, b)$ 。利用公式(1—1)，有

$$\begin{aligned} |OB| &= \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}, \\ |AC| &= \sqrt{(0-a)^2 + (b-0)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

$$\therefore |OB| = |AC|。$$

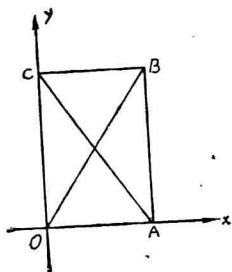


图1—6

这个例题是用代数的方法证明几何命题的一个实例。这种方法，通常叫做解析法。从这个例题可以看出，如果坐标选取适当，用解析法证明某些几何命题是比较简便的。

§ 1.3 线段的定比分点

设点 P 是直线 P_1P_2 上的任意一点，它把有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 分成 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ ，我们把 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的量的比，叫做点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比，通常用 λ 表示，即

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda。$$

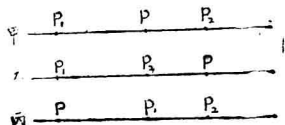


图1—7

如果点 P 在 P_1 和 P_2 之间（如图1—7甲），那么点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的内分点。这时，因为 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的方向相同，所以 λ 为正；

如果点 P 不在 P_1 和 P_2 之间（如图1—7乙、丙），则点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的外分点。这时，因为 $\overline{P_1P}$ 与 $\overline{PP_2}$ 的方向相反，所以