解析几何 三角

学院数学系编

一九七八年

目　　录

第八章　常见的曲面

第三篇　平面三角

第一章　锐角三角函数

第二章　任意角的三角函数

第三章 诱导公式

第四章 三角恒等式

第五章　任意三角形的边与角间的关系

第一篇　平面解析几何

第一章　坐标法

恩格斯说：**“纯数学的研究对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。”**在初等数学里，几何以研究空间形式为主，它们的研究对象各不相同，研究方法在本质上也是没有联系的。解析几何则是用代数的方法研究某些几何图形的性质的。它通过坐标法用数（坐标）表示点，用方程表示图形，然后从方程的研究得出相应的图形的性质的结论。本章我们首先介绍有向线段，两点间的距离以及线段的定比分割等几个基本问题，再进一步阐明曲线与方程的概念，为后面的学习打下基础。

§1.1　有向线段

一、轴上有向线段

用有向线段的概念建立形与数的关系，在三角学里我们曾见到过（用三角函数线表示三角函数）。在这里为了讲清坐标法的概念，我们有必要再详细一点讨论有向线段的问题。

在初等几何中，一般不考虑直线和线段的方向。在解析几何里，根据“形”和“数”结合的需要，我们必须考虑到直线

和线段的方向。

一条直线具有两个相反的方向，如果选定其中的一个作为它的正方向（如图1—1中的箭头所示），那么另一个就是它的负向。

定义 规定了正向的直线叫做有向直线，也叫做轴。

图1—1

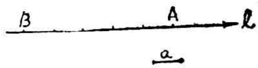

图1—2

一条线段也有两个相反的方向，如图1—2，轴 l 上 A、B 两点所确定的线段，如果以 A 为起点 B 为终点，那么从 A 到 B 是它的一个方向；如果以 B 为起点 A 为终点，那么从 B 到 A 就是从 A 到 B 的反向。

定义 规定了起点的线段叫做有向线段。从起点到终点的方向叫做有向线段的方向。

有向线段用两个端点的大写字母，并在上面画一横线来表示。但起点的字母一定要写在终点字母的前面。例如：$\overline{AB}$ 表示以 A 为起点 B 为终点的有向线段；$\overline{BA}$ 表示以 B 为起点 A 为终点的有向线段。

要确定一条有向线段的方向是正是负，就要把它的方向和它所在轴的正向相比较，如果它的方向和它所在轴的正向一致时，就叫它是正向线段，否则就叫负向线段。如图1—2，$\overline{AB}$ 是负向线段，$\overline{BA}$ 是正向线段。

选定一条线段做长度单位，就可量得有向线段的长度。有向线段 $\overline{AB}$ 的长度记作 $|AB|$，叫做有向线段 $\overline{AB}$ 的模（或绝对值）。如图1—2，线段 e 是选定的长度单位，所以

$|AB| = |BA| = 3$。

定义 轴上一条有向线段的长度，连同表示它的正向或负向的符号"+"、"-"，叫做这条有向线段的量。

有向线段$\overline{AB}$的量用AB表示。如图1—2中，

$$AB = -3, \quad BA = 3,$$

显然 $$AB = -BA, \quad AB + BA = 0。$$

起点和终点重合的线段叫做零线段。它的方向是不定的。为了一致起见，我们把零线段也看作有向线段，它的量是0。

下面来研究同一轴上，若干个点所确定的有向线段的量的关系。

定理1.1 在同一条轴l上的三点A，B，C，不论它们排列的顺序如何，恒有下面的等式成立：

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}。$$

证明 我们分三种情况进行讨论。

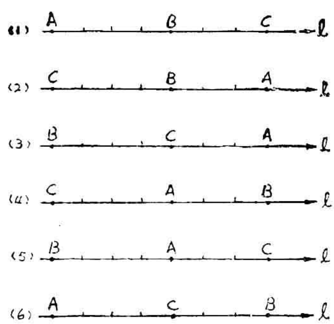

图1—3

（1） 设$\overline{AB}$和$\overline{BC}$都不是零线段，并且他们的方向相同

（如图1—3中的(1)，(2)）。

这时$\overline{AC}$和$\overline{AB}$、$\overline{BC}$的方向相同，且有

$$|AB|+|BC|=|AC|。$$

在这种情况下，AB、BC和AC都是符号相同的数，所以

$$AB+BC=AC。$$

（2） 设$\overline{AB}$和$\overline{BC}$都不是零线段，且它们的方向相反（如图1—3中的(3)—(6)）。

这时，$\overline{AC}$的长度等于$\overline{AB}$和$\overline{BC}$长度之差。$\overline{AC}$的方向和$\overline{AB}$、$\overline{BC}$中绝对值较大的一个相同。在这种情况下，AB和BC是符号相反的数，AC的绝对值等于AB和BC的绝对值之差，符号和AB、BC中绝对值较大的一个相同。根据正负数的加法法则可知，

$$AB+BC=AC。$$

(3) 设$\overline{AB}$和$\overline{BC}$中有一个是零线段，则B点与A点重合，所以

$$AB+BC=AA+AC=0+AC=AC。$$

若$\overline{AB}$和$\overline{BC}$都是零线段，这时A、B、C重合为一点，显然有

$$AB+BC=AC。$$

综上所述，可知对于A、B、C的所有位置，等式

$$AB+BC=AC$$

恒成立。

这个定理可以推广到轴上n个点的情况。可以证明，不论这n个点A_1、A_2、A_3……A_n在同一条轴上排列的顺序如何，恒有下面的等式

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n$$

成立。

二、用坐标来计算轴上有向线段的量和长度

在代数里我们知道，数轴上的点和全体实数之间有着一一对应的关系。在解析几何里，数轴也叫做坐标轴。确定一条数轴，也叫做在直线上建立了坐标系。就直线上的坐标系而言，和数轴上的点相对应的实数，叫做该点的 坐标。在 ox 轴上，如果一点 P 的坐标是 x，那么以原点 0 为起点，P 为终点的有向线段的量就是 x。如图1—4所示，点 A 的坐标是 4，即

图1—4

$$OA=4,$$

记作$A(4)$；点B的坐标是 -2，即

$$OB=-2,$$

记作$B(-2)$。

在坐标轴上，有向线段的量和 A，B 两点的坐标有着密切的联系。

定理1.2　坐标轴上有向线段的量，等于它的终点的坐标减去起点的坐标。

证明　设坐标轴的原点为O，$\overline{AB}$的起点和终点的坐标分别为x_1和x_2，根据定理1.1，有

$$OA+AB=OB,$$

因此　$$AB=OB-OA。$$

但　$$OA=x_1,\ OB=x_2,$$

故　$$AB=x_2-x_1。$$

于是定理得到了证明。

由定理1.2可知，$|AB|=|x_2-x_1|$，因为$\overline{AB}$的长度即A、

B两点间的距离，因此得

推论 若d表示一坐标轴上任意两点$A(x_1)$和$B(x_2)$之间的距离，则

$$d=|x_2-x_1|。$$

例 1 已知同一条坐标轴上的四点$A(5)$、$B(-1)$、$C(-8)$、$D(2)$，求AB、CD、DB。

解 由定理1.2得

$$AB=(-1)-5=-6;$$

$$CD=2-(-8)=10;$$

$$DB=(-1)-2=-3。$$

例 2 已知M，N，P三点在同一坐标轴上，它们的坐标分别是-6，2，-5，求M和N两点间的距离d_1以及M和P两点间的距离d_2。

解 由定理1.2的推论得

$$d_1=|2-(-6)|=8,$$

$$d_2=|-5-(-6)|=1。$$

§1.2 两点间的距离

在三角学里，我们已经建立了平面直角坐标系，并且已经知道，坐标平面内点的位置完全被它的坐标所确定。因而两点间的距离也就可以用这两点的坐标来表示。

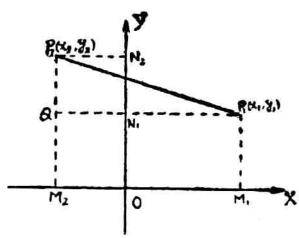

图1—5

如图1—5，已知两点P_1和

P_2的坐标分别是(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，我们来研究 它们 之间的距离d。

从P_1和P_2分别向两轴作垂线P_1M_1,P_2M_2，P_1N_1,P_2M_2，设P_1N_1和P_2M_2交于Q点，则在直角三角形 P_1QP_2中，由勾股定理得

$$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|QP_2|^2。$$

根据定理1.2的推论，

$$|P_1Q|=|M_1M_2|=|x_2-x_1|,$$

$$|QP_2|=|N_1N_2|=|y_2-y_1|。$$

因而

$$|P_1P_2|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$$

$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2。$$

所以 $d=|P_1P_2|$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ 。\qquad (1—1)$$

这个公式对于$\overline{P_1P_2}$平行于x轴或y轴时也同样适用。（为什么？）

例 1　求点$A(-2,\ 3)$和点$B(6,\ -12)$之间的距离d。

解　由公式(1—1)得

$$d=\sqrt{[6-(-2)]^2+[(-12)-3]^2}$$

$$=17。$$

例 2　求一点$P(x,\ y)$到坐标原点的距离R。

解　$\because$　原点的坐标为$x_0=0$，$y_0=0$，

$\therefore$　由公式（1—1）得

$$R=\sqrt{(0-x)^2+(0-y)^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}\ 。$$

例 3　证明矩形的两对角线相等。

证明 我们建立如图1—6所示的坐标系 $0—xy$，则可设矩形 $0ABC$ 的四个顶点的坐标分别为 $0(0,0)$，$A(a,0)$，$A(a,b)$，$c(0,b)$。利用公式(1—1)，有

$$|0B| = \sqrt{(a-0)+(b-0)^2}$$
$$= \sqrt{a^2+b^2},$$
$$|AC| = \sqrt{(0-a)^2+(b-0)^2}$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}。$$
$$\therefore \quad |0B| = |AC|。$$

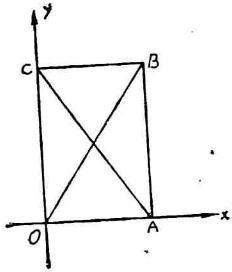

图1—6

这个例题是用代数的方法证明几何命题的一个实例。这种方法，通常叫做解析法。从这个例题可以看出，如果坐标选取适当，用解析法证明某些几何命题是比较简便的。

§1.3 线段的定比分点

设点P是直线P_1P_2上的任意一点，它把有向线段$\overline{P_1P_2}$分成$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$，我们把$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$的量的比，叫做点P分$\overline{P_1P_2}$所成的比，通常用λ表示，即

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda。$$

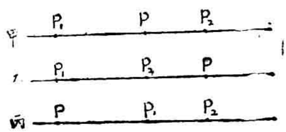

图1—7

如果点P在P_1和P_2之间（如图1—7甲），那么点P叫做$\overline{P_1P_2}$的内分点。这时，因为$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$的方向相同，所以λ为正；

如果点P不在P_1和P_2之间（如图1—7乙、丙），则点P叫做$\overline{P_1P_2}$的外分点。这时，因为$\overline{P_1P}$与$\overline{PP_2}$的方向相反，所以