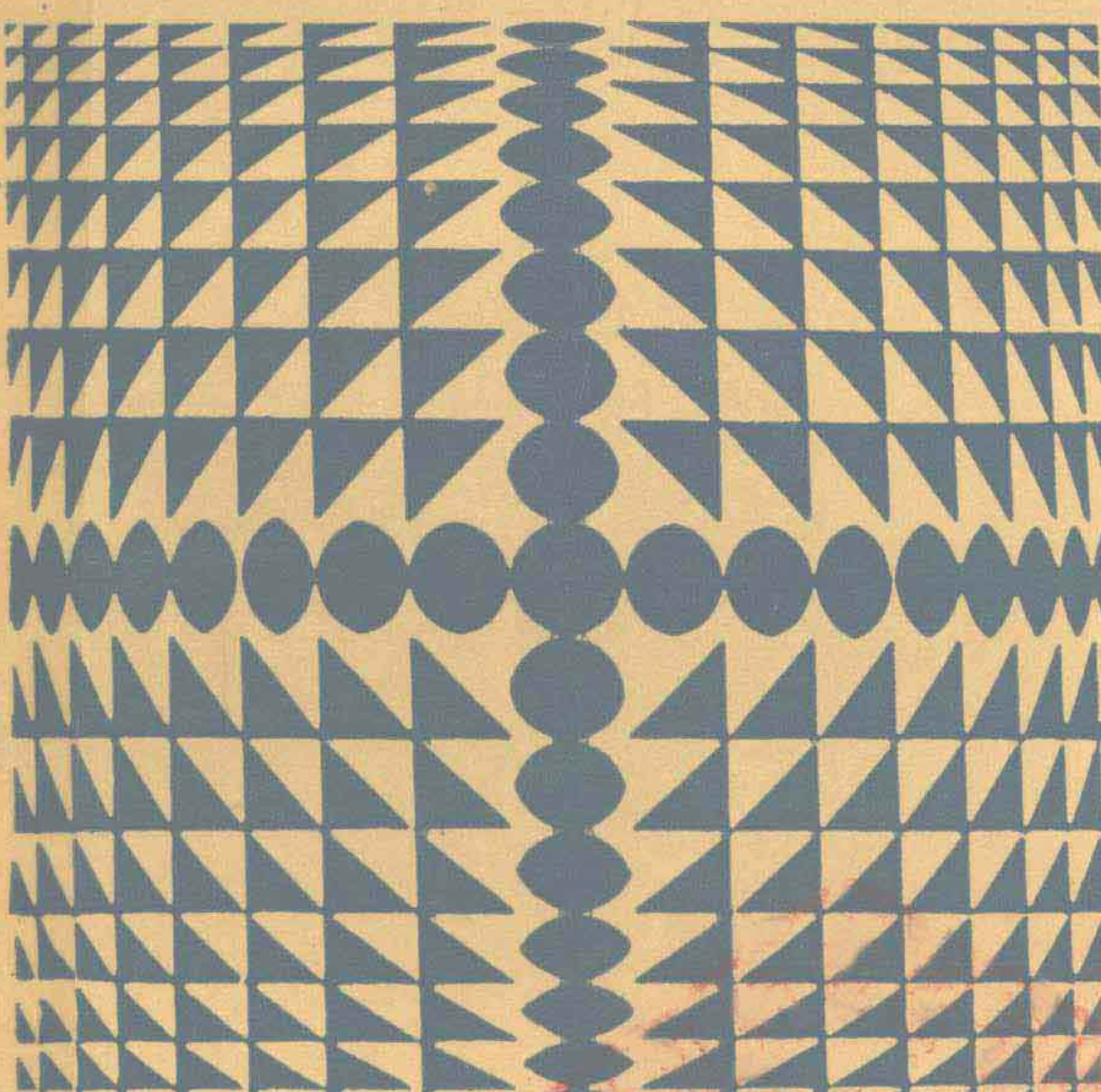
九年制义务教育初中数学读物

主编 罗四维 杨泰良

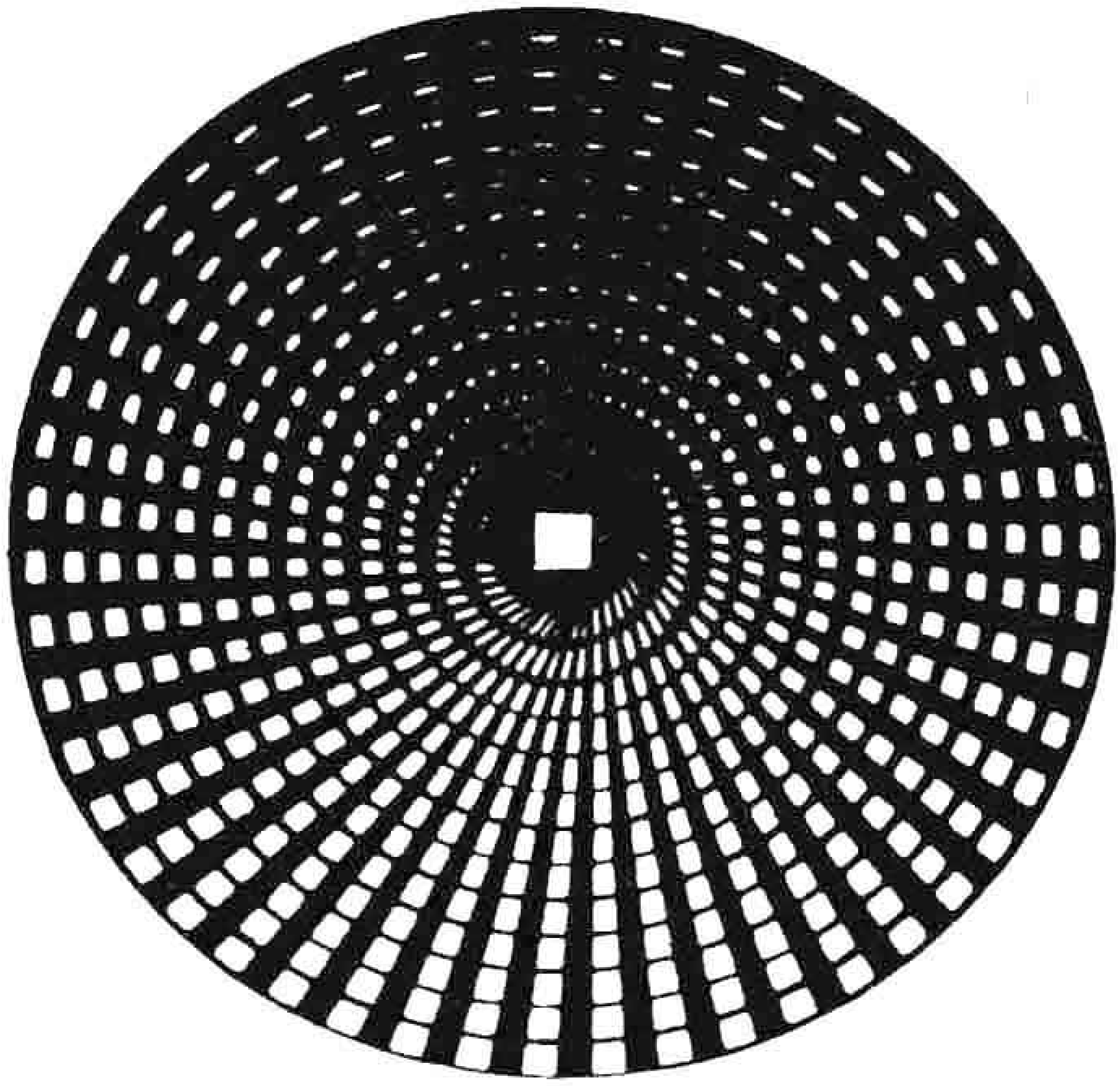
几何计算

孙道杠 杨传明



四川教育出版社

九年制义务教育初中数学读物



主编 罗四维 杨泰良

几何计算

孙道杠 杨传明

四川教育出版社
一九九二年二月·成都

(川)新登字005号

责任编辑：何伍鸣

封面设计：何一兵

九年制义务教育初中数学读物

几何计算　　孙道杠　杨传明

四川教育出版社出版发行　（成都盐道街三号）

四川省新华书店经销　自贡新华印刷厂印刷

开本787×960毫米　1/32　印张3.25　插页1　字数54千

1992年7月第一版　1992年7月第一次印刷

印数：1—4810册

ISBN7—5408—1737—2/G·1659　定价：1.23元

前　言

这套读物主要是为初中学生而写的。我们当然希望，这套书对于执教中学数学的老师们也非常适用。

中学生的书包已经很沉了，在推出这套读物之前，我们已深有感触。作为教师和家长，我们常见到孩子们老是摆弄他们那些堆积如丘的题集，并深埋其间。书店里又似乎难于使这些小读者们满意地挑出几本自己真正喜爱的数学图书，这无疑是一桩憾事。在今天，在大力倡导“素质教育”、“公民教育”的九年制义务教育的时代要求下，该做些什么呢？

我们主张激励学生学习的自发因素，让孩子们在志趣的牵引下主动、愉快地学习；主张开阔学生的知识视界，让他们能见多识广；主张启动学生的高级心理活动，发展他们的思维能力和认识能力。为此，编写一些有益于启迪学生智力、开拓知识视野、激发学习兴趣、加深对课本知识理解的数学读物是十分必要的。这就是编写这套读物的初衷。

这套书是按知识专题来编写的（个别册子除外）。各专题都紧扣九年制义务教育初中数学课本的基础知识，并适当加深、拓广，联系知识的产生及其发展过程，揭示知识之间的内在联系，着重分

析内容反映的数学思想、原理、方法和实际应用。本书注重取材的新颖、叙述的生动、思想方法的引导，力求能适应初中不同层次学生的需要，能为九年制义务教育的发展起积极的配合和促进作用。我们也编拟了适量的练习题，以巩固、加深对课本知识的理解掌握，也提供一部分给学有余力或热心参加数学竞赛的学生选用。

我们的意愿未必能都形诸于笔端，呈现给读者的这套图书，尚祈请各方指正。

本套读物由杨泰良、罗四维修改、统稿。

1992年2月

目录

几何学是研究物体的形状、大小和位置关系的一门学科，它来源于人类生产和生活的需要．相传四千多年前，古埃及尼罗河连年洪水泛滥成灾，洪水退却之后，人们无法辨认土地界线，常常为之而争执不休．为了解决这个实际问题，人们想出了种种办法来测量土地的周界和面积，划定土地的界线．这样，就需要研究物体的形状、大小和位置关系，从而产生了几何学．

几何来源于实践，也必将服务于实践．怎样确定物体的大小和位置关系呢？这就需要计算．几何计算是几何学的重要组成部分．这本小册子就专讲几何计算问题．

几何计算与生产和生活实际紧密相联．在系统讲述几何计算之前，我们先举几则实际事例，让读者品尝一下几何计算的滋味吧．

邮递员老吴向教数学的马老师提出了如下的问题，请帮助解决．

图1是某城市部分街道的示意图，纵横各有四条路，构成同样大小的长方块．邮递员要把邮件从

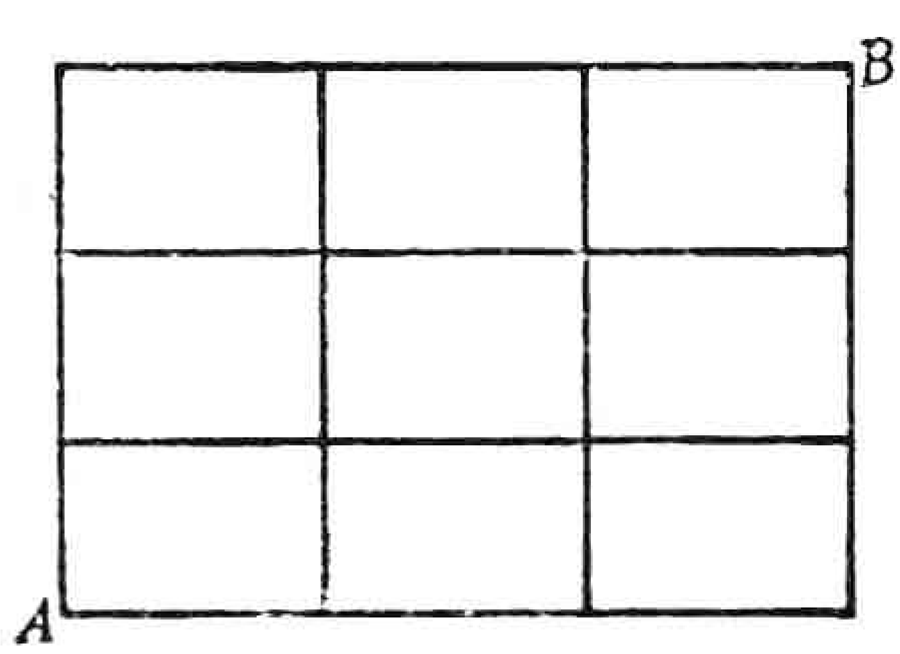


图1

A送到B，最近的路线有多少条？

马老师把这个问题告诉了同学们．经过计算，有的同学说是10条，有的同学说是20条，还有的同学说是24条，各说不一．到底是多少条呢？请大家仔细算算吧！

在一次劳动技术课中，马老师请某工厂的张技术员给大家讲几何在生产实际中的应用，张技术员愉快地接受了邀请．他走上讲台打开一张挂图（如图2），对同学们说："这张挂图中的三个圆代表三个皮带轮，围绕着轮子的线代表皮带，每个轮子的半径都是1米，轮子中心之间的距离AB、BC、CA分别是11米、10米、9米．同学们，你们能算出这个皮带传动装置上皮带的总长吗？"

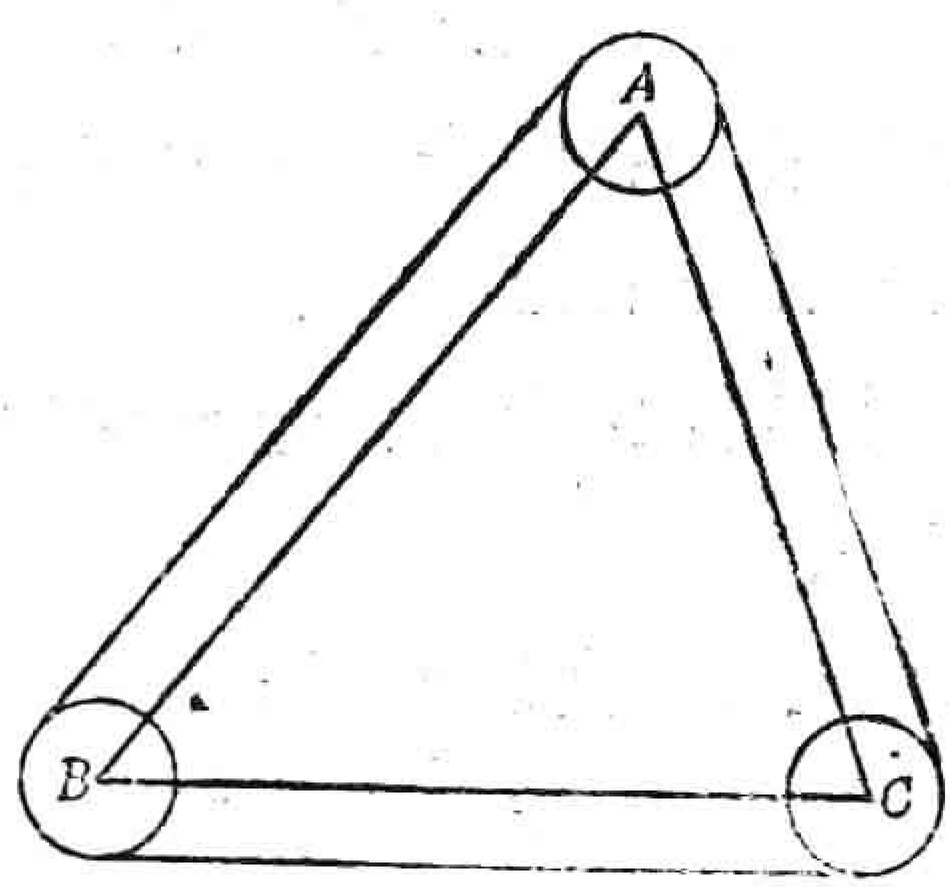


图2

同学们睁着圆圆的大眼睛，目不转睛地盯着挂图，思考着计算办法．一些同学还在纸上比比画画，左算右算，可怎么也算不出来．

突然，外号人称"小机灵"的周灵同学说："能！"接着他讲述了一个巧妙的计算方法，立即

受到张技术员和师生们的夸奖．请大家想一想，这个巧妙的方法是什么？

据说，周灵同学是个数学迷，他钻研起数学问题来竟会忘记一切．一天，他把学校布置的课外作业做完后，抬头看钟，已经是晚上十点多钟了（图3），可他还惦记着一道数学难题，于是又聚精会神地思考起来．经过一段时间的反复思索，他终于解出了这道难题．当他高兴地抬头看钟时，他楞住了．“怎么钟停了？”于是他揉了揉眼睛，仔细一看，才发现在不到一小时的时间内，时针和分针的位置恰巧对调了一下．第二天，他把这件事告诉了他的好朋友高翔同学，并叫高翔同学算一算，他做这道难题，花了多少分钟的时间．

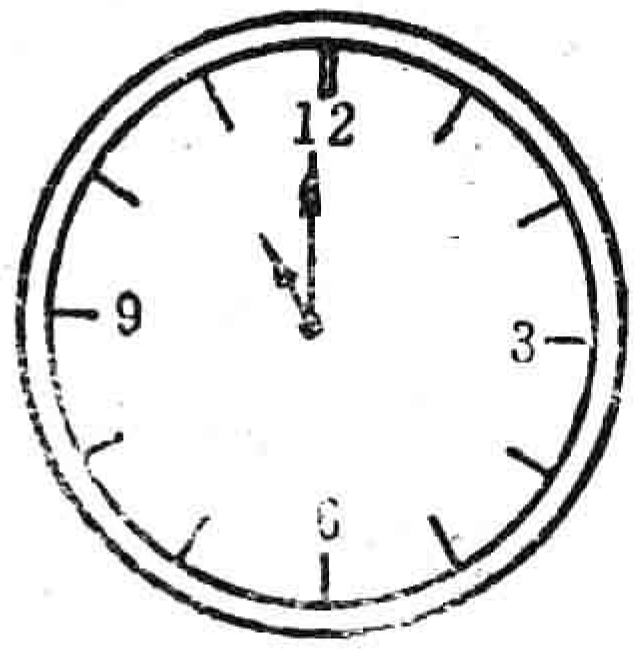


图3

高翔同学费了九牛二虎之力，终于计算出来了，但计算过程冗长．是否能找出一个简捷的计算方法呢？请读者们思考吧．

在结束开场白之前，还想给大家讲一个故事．

在一次剿匪过程中，我人民解放军某分队缴获了一张匪首的藏宝图（如图4）．所附说明书上是这

样解释的：图中的A、B、C是某海岛上的三棵树，B离海边最近．从A出发沿着垂直于AB的方向往岛内走一段路到达E点，这段路的长度与AB的长度相同．又从C出发沿着垂直于BC的方向往岛内走一段路到达D点，这段路的长度与BC的长度相同．宝物就埋在DE的中点G．

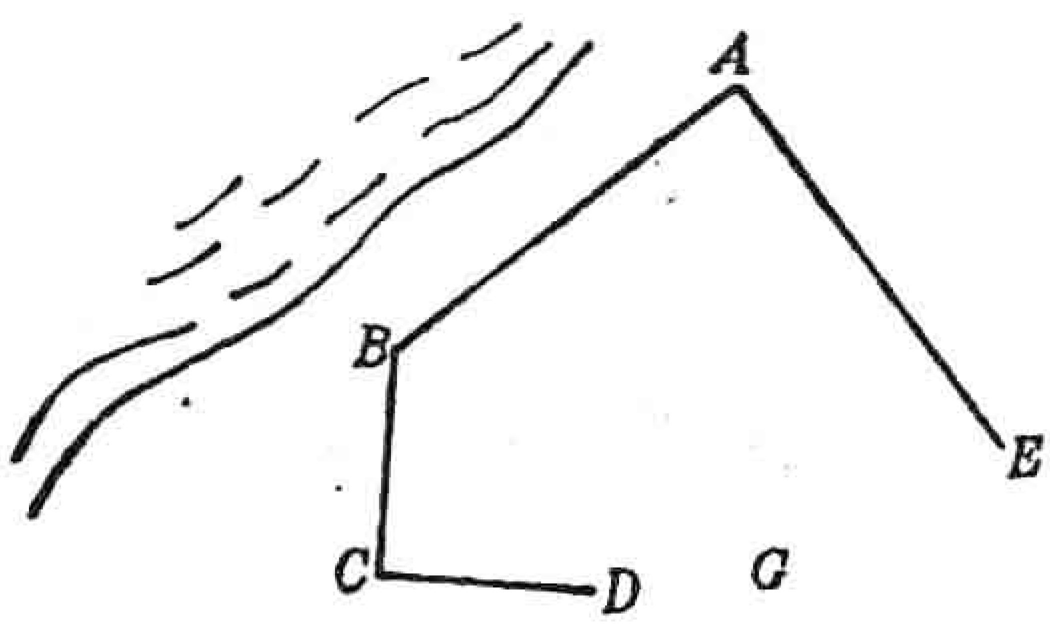


图4

当解放军分队来到海岛时，只看见两颗树A和C，而树B已被风刮走，没留下一点痕迹．这样一来，D和E两点就无法确定了．战士们只好在A、C附近到处寻找，可一点蛛丝马迹也没发现．后来，战士们坐下来进行了仔细的分析研究，终于把宝物找到了．请读者想一想，藏宝物的地方是怎样找到的？

以上这些实际问题，都属于几何计算问题．读者们如果久思而不得其解，那么请读这本书吧．当你把这本书的内容都弄明白了，这些问题自然就获得了解决．

几何计算包括的内容是：几何计数；角的计算；长度的计算和面积的计算．本书将以方法为主线来解决几何计算问题．这些方法是什么呢？请往下看吧！

一　几何计数

所谓几何计数，就是计算几何图形的个数．例如，点的个数，直线、射线、线段的条数，区域（如三角形、矩形、圆）的块数等．

这类问题中，有的运用一般的几何知识就能计算求解，有的涉及的知识面较广，技巧性强，既要进行几何结构的分析，又要用到较深的数学知识和方法．

本书由于面向初中学生，因此，我们在不超过初中数学大纲的原则下进行适当地扩充或引伸，使读者通过学习既能解答一般的几何计数问题，又能解答数学竞赛中的几何计数问题．

§1　用作图法计数

有的几何计数问题，只要我们能完整地、无重复和无遗漏地画出所需图形，就能计算出所求个数．

例1　在正方形$ABCD$所在的平面上有点P，使$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PDA$都是等腰三角形．那么，

具有这种性质的点P的个数共有（　　）

（A）1个.　（B）5个.　（C）9个.

（D）17个.

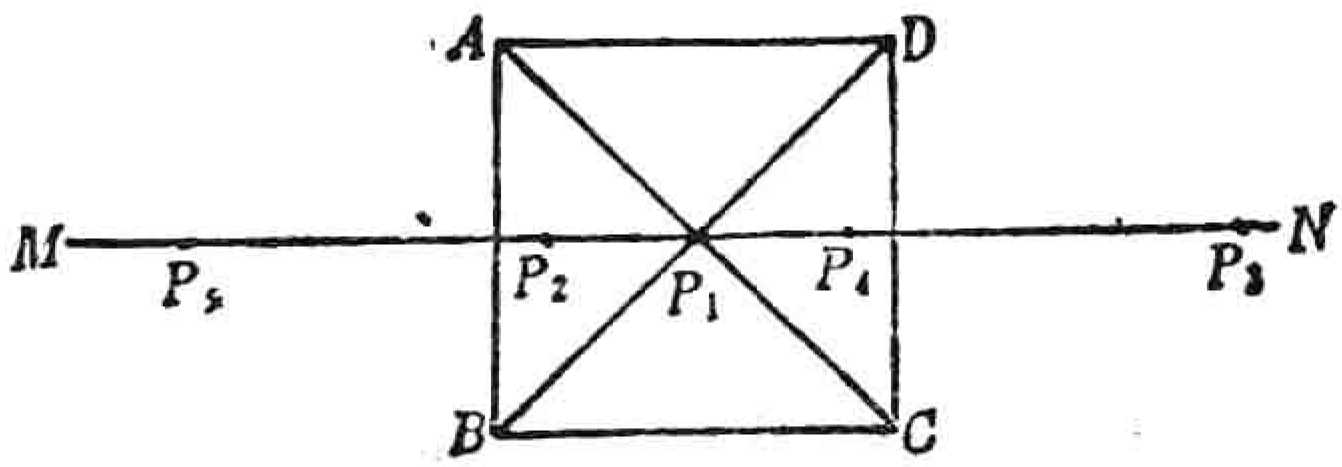


图1—1

解：我们知道，有两条边相等的三角形叫做等腰三角形.对AB来说，可能是等腰三角形的底，也可能是腰.见图1-1，当AB、BC、AD均是底时，点P在AB的垂直平分线MN上，也在BC的垂直平分线$M'N'$上，把这点记为P_1.当AB为底，AD、BC均为腰时的点P记为P_2、P_3（这是以D或C为圆心，AD为半径所画的弧与MN的交点）.当AB、AD、BC均为相应的等腰三角形的腰时的点P记为P_4、P_5（这是以A或B为圆心，AD为半径所画的弧与MN的交点）.

类似地在$M'N'$上也可求得适合条件的4个点（P_1除外）.所以合条件的点P共有9个，应选（C）.

例2　点A与点B相距5个单位，在一个含有A、B两点的已知平面上距A点2个单位且距B点3个单位的直线有多少条？

解：我们知道，与一定点的距离为定长的直线是以定点为圆心，定长为半径的圆的切线．故合条

件的直线是以A为圆心，2为半径；B 为圆心，3 为半径的圆的公切线．所以合条件的直线共有3条，如图1—2．

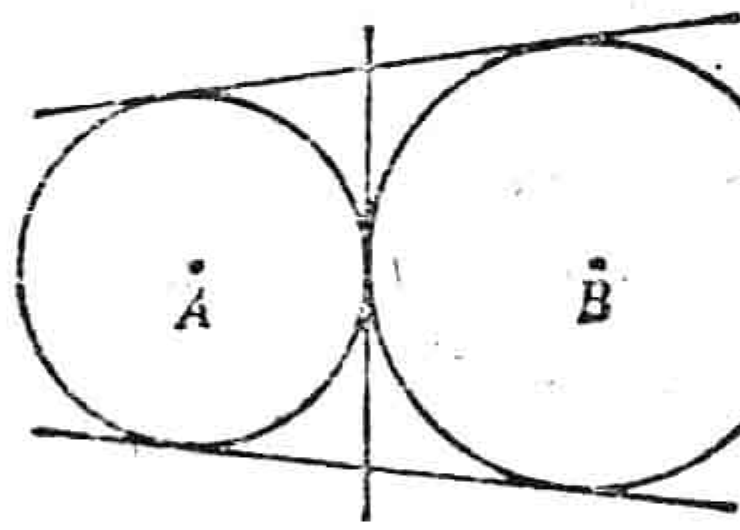


图1—2

§2 用归纳法计数

有的几何计数问题，可先对较简单的图形计算个数，再逐步找出规律，最后对较复杂的图形计算个数．这种由特殊到一般的推理方法叫做归纳法．

例1 图1-3中以 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 为端点的线段有多少条？

图1—3

解：一条线段由两个端点确定，并且与端点的顺序无关．于是，以A_1为一个端点，A_2、A_3、A_4、A_5为另一个端点的线段有4（即5-1）条；以 A_2 为一个端点，A_3、A_4、A_5分别为另一个端点的线段有3条；以A_3为一个端点，A_4、A_5分别为另 一 个

端点的线段有2条，以A_4、A_5为端点的线段有1条。故由A_1、A_2、A_3、A_4、A_5确定的线段共有

$$1+2+3+4=10$$

条。即由直线上的五个点确定的线段的条数等于1到4这四个自然数的和。

说明：这种方法也适用于计算直线上由n个点A_1、A_2、…、An确定的线段的条数N：

$$N=1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)$$

$$=\frac{1}{2}\{[1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)]$$

$$+[(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1]\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\underbrace{[1+(n-1)]+[2+(n-2)]+\cdots+[(n-2)+2]+[(n-1)+1]}_{n-1\text{项}}\}$$

$$=\frac{1}{2}n(n-1).$$

例2　图1-4中有多少个矩形？

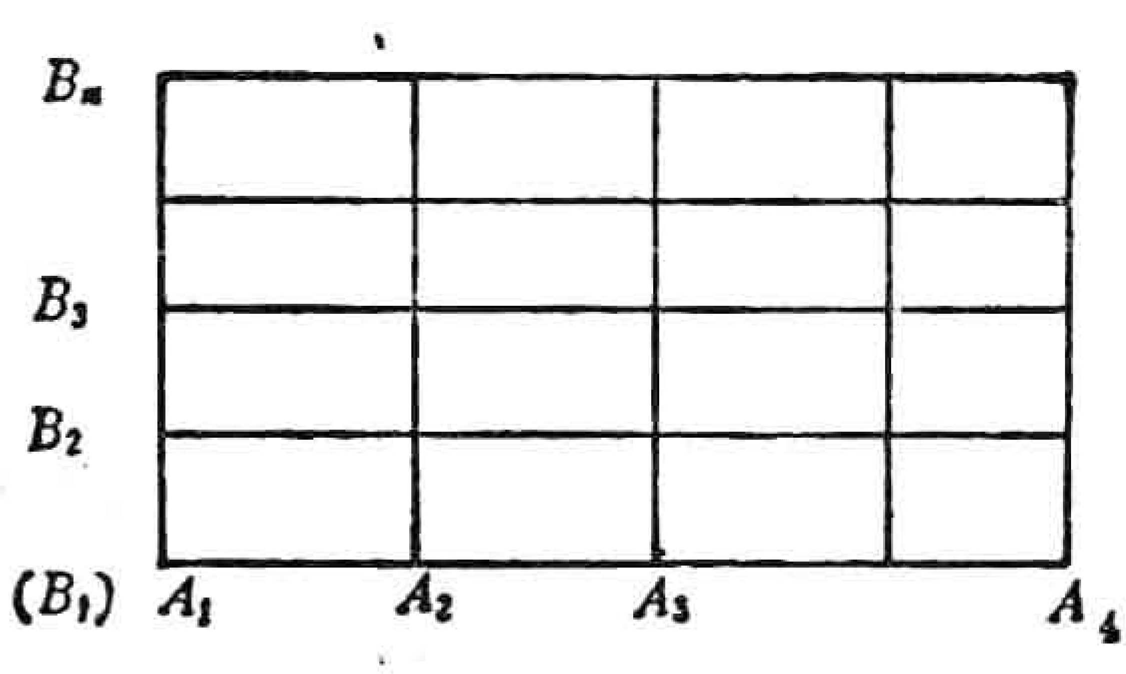


图1—4

解：我们知道，一个矩形由它的一组邻边唯一确定。由例1的启发，我们对m加以讨论。

当$m=2$时，由点B_1、B_2确定一条线段B_1B_2．以B_1B_2为宽，以由点A_1、A_2、…、An确定的线段分别为长，可以确定$1\times\frac{n(n-1)}{2}$个矩形．当$m=3$时，由点B_1、B_2、B_3确定$\frac{3\times(3-1)}{2}$条线段，以其中的每一条分别作宽，而以由A_1、A_2、…，An确定的每条线段为长，可确定$\frac{3\times(3-1)}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$个矩形．推广下去，图1-4中的矩形共有$\frac{m(m-1)}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$个．

例3　如图1-5（甲）是某城市部分街道的示意图，纵横各有五条路．如果从A处走到B处（只能向北、向东走），问有多少种不同的走法？

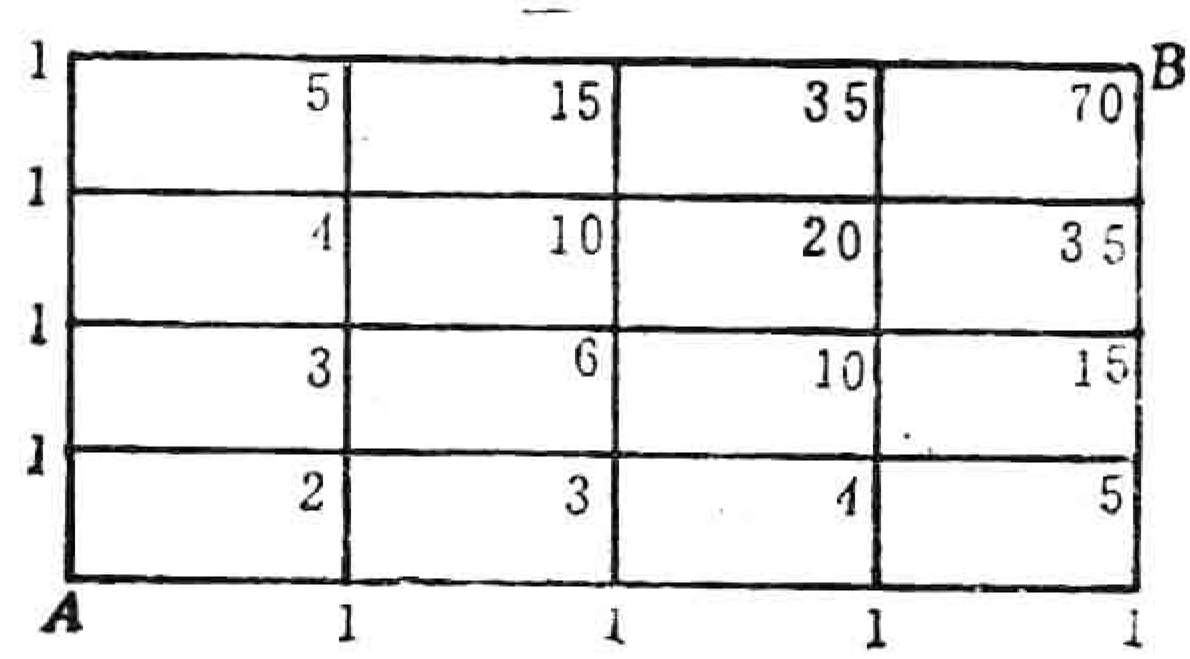


图1—5（甲）

解：我们不妨先从街道条数的变化中寻求确定走法数的规律．

（1）若纵横各有两条街（图1-5（乙））．从A到B有两种走法：$A\to A_1\to B$；$A\to B_1\to B$．若把点A_1、B_1换成“1”，则从A到B的走法数由矩形

的不过点B的对角线端点处两个数字之和给出（图1-5（丙））。

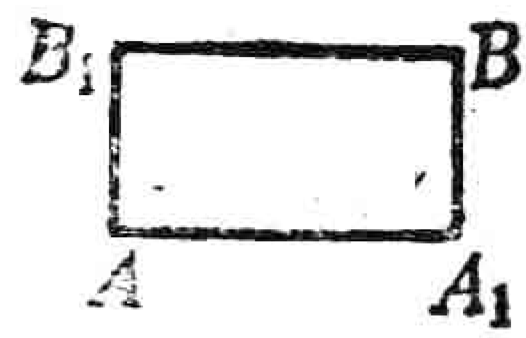


图1—5（乙）

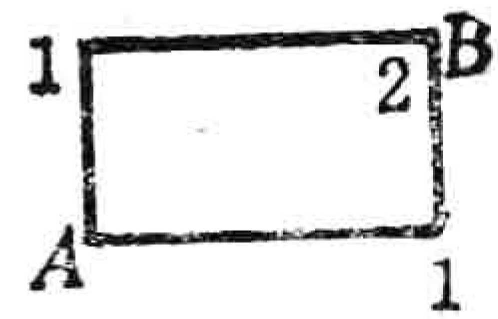


图1—5（丙）

（2）若纵有3条街，横有2条街（图1-5(丁)).这时有两类走法：一类是从A经P到B，由（1）知有2种走法；另一类是从A经A_2到B，有1种走法（$A \to A_1 \to A_2 \to B$）.故从A到B有3种走法.若把A_2换作“1”，从A到B的走法数由矩形PA_1A_2B的不过点B的对角线端点处二数之和给出（图1-5（戊））.

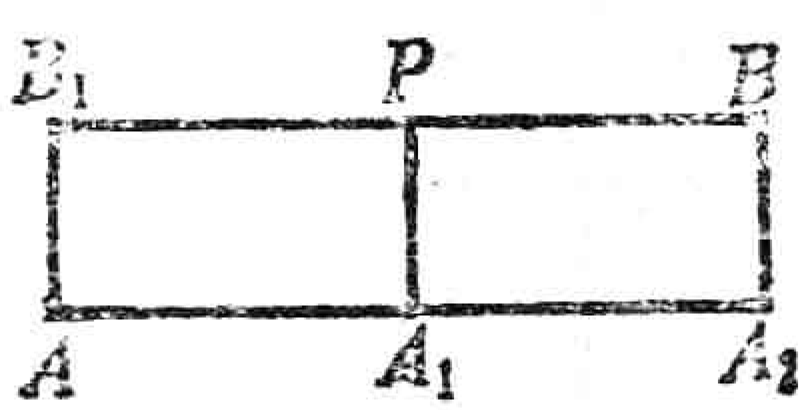


图1—5（丁）

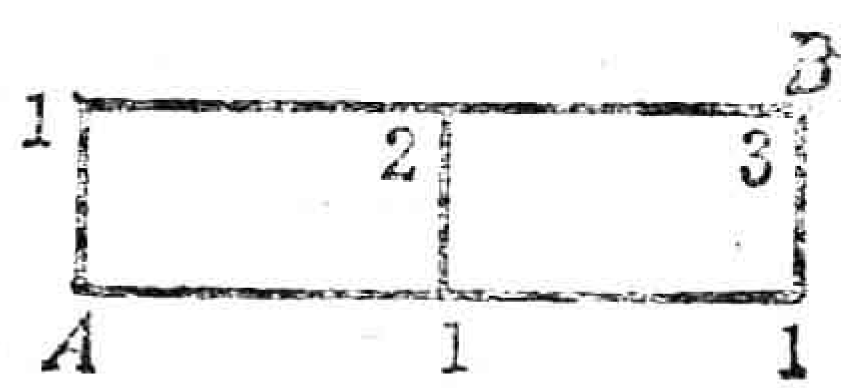


图1—5（戊）

这个方法不受街道条数的限制，可以算出从A到B共有70种不同的走法（图1-5（甲））.

§3 用代数法计数

有的图形有着明显的数量关系，根据数量关系可以列出方程或不等式，从而用代数方法计算几何

图形的个数

例1 已知直角三角形的一条直角边是15，其他两边均为正整数．试问这样的直角三角形有多少个？

解：设直角三角形的另一条直角边为x，斜边为y，则由勾股定理得$y^2=x^2+15^2$.即是

$$(y+x)(y-x)=3^2\times5^2.$$

因$y-x<y+x$，故可得方程组：

$$\begin{cases}y+x=25,\\y-x=9;\end{cases}\quad\begin{cases}y+x=45,\\y+x=5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y+x=75,\\y-x=3;\end{cases}\quad\begin{cases}y+x=225,\\y-x=1.\end{cases}$$

解这四个方程组得：

$$\begin{cases}x=8,\\y=17;\end{cases}\quad\begin{cases}x=20,\\y=25;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=36,\\y=39;\end{cases}\quad\begin{cases}x=112,\\y=113.\end{cases}$$

所以一条直角边为15，另两边均为正整数的直角三角形共有4个．

例2 正方形纸片内有6个点，连同正方形的4个顶点共10个点．现将这纸片剪成三角形，这些三角形的顶点都在这10个点中选取，并且这10个点都是这些三角形的顶点，那么一共可以剪成多少个三角形？