高中各科解题思路训练

数学

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=(\operatorname{tg}x+\sec x)^2$$

$$ax^2+bx+c=0$$

马明 主编

高中数学解题思路训练

主编 马 明

1—5

中国青年出版社

（京）新登字 083 号

图书在版编目（CIP）数据

高中数学解题思路训练/马明主编。—北京：中国青年出版社，1994.4

ISBN 7—5006—1416—0

Ⅰ.高…

Ⅱ.马…

Ⅲ.①数学-高中-升学参考资料 ②数学-解题-高中

Ⅳ.G633.6

责任编辑：赵惠宗

封面设计：曹　春

*

中国青年出版社 出版　发行

社址：北京东四 12 条 21 号　邮政编码：100708

北京市通县电子外文印刷厂印刷　新华书店经销

*

787×1092　1/32　20 印张　400 千字

1994 年 4 月北京第一版　1994 年 4 月北京第一次印刷

定价：11.40 元

主编简介

主　编

马　明　南京师大附中原副校长，特级教师，国家教委中小学教材审定委员会中学数学审查委员。

主要作品有《马明数学教育论文集》、《周期函数初论》、《三角浅说》、《圆和二次方程》、《同解方程和同解不等式》、《节约的数学》、《初中数学思维训练与解题方法》等。

序　言

学生常常惊诧教师解题思路的“准、简、奥”，殊不知，教师一题在手，何尝不是“十月怀胎”方可“一朝分娩”，个中苦楚学生是不知晓的。

简单题的思路且不去谈它，复杂题的思路就不是垂手可得了。

解题思路往往从“念头”开始。一题在手，头脑中会一个念头接着一个念头，甚至同时闪出几个念头，然后在选用诸念头过程中选取有用的、简捷的，甚至奥妙的解题思路。

一位同学曾要我为他解答下面的问题：

求函数 $y=\frac{\sqrt{7x-3}}{x}$ 的最小值，其中 $x\in[\frac{1}{2},3]$，

第一个念头：设法化为 x 的有理式，然后再求 y 的最小值——这是通常的念头。

由于 $x\in[\frac{1}{2},3]$，所以 $y>0$。因此，原不等式在 $y>0$ 的条件下两端平方后得同解方程

$$y^2=\frac{7x-3}{x^2}。$$

或 $$y^2x^2-7x+3=0,\qquad x\in[\frac{1}{2},3] \quad ①$$

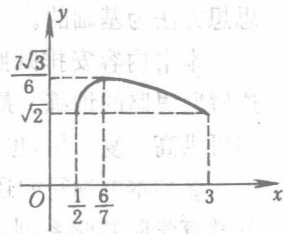
由于 x 为实数，故有

$$\Delta=(-7)^2-4\cdot y^2\cdot 3\geqslant 0,$$

解得 $$y \leqslant \frac{7\sqrt{3}}{6}。$$

以 $y=\frac{7\sqrt{3}}{6}$ 代入①。得 $x=\frac{6}{7}$,这说明 $x=\frac{6}{7}$时,y 取最大值$\frac{7\sqrt{3}}{6}$。

非常可惜,问题是要计算 y 的最小值,因此不得不转入第二个念头:设 $f(x)=\frac{\sqrt{7x-3}}{x}$,由于 $x=\frac{6}{7}$时 $f(x)$取最大值$\frac{7\sqrt{3}}{6}$,且 $f(\frac{1}{2})=f(3)=\sqrt{2}<\frac{7\sqrt{3}}{6}$。如能证得$[\frac{1}{2},\frac{6}{7}]$是 $f(x)$的单调递增区间,$[\frac{6}{7},3]$是 $f(x)$的单调递减区间,那么,立即获得:当 $x=\frac{1}{2}$或 $x=3$ 时,$f(x)$获最小值$\sqrt{2}$(见图)。



此念头所产生的解题思路是可行的,但也是够麻烦的。

在已得结论(当 $x=\frac{1}{2}$或 $x=3$ 时,$f(x)$获最小值$\sqrt{2}$)的基础上,稍加反思,立得下面既简且奥的解法:

∵ $x\in[\frac{1}{2},3]$,

∴ 下列不等式 $(x-\frac{1}{2})(x-3)\leqslant 0$ 成立

(当且仅当 $x=\frac{1}{2}$或 3 时取等式),

展开,得

$$2x^2-7x+3\leqslant 0$$

或
$$\sqrt{2}\leqslant\frac{\sqrt{7x-3}}{x}$$

故 y 的最小值等于$\sqrt{2}$。

此解法既简且奥，但有“从天而降”之感。这说明产生一个好的念头，从而获得通往一条成功的思路是要经过训练的。非常可惜，限于篇幅，我们不可能这样去写书，而只能向大家介绍一些常用的、具体的解题思路，而这些思路往往又是以数学思想方法为基础的。

本书内容安排既照顾到高中各年级的知识点，又尽量渗透解题思路的训练。最后六章则为解综合题的策略，因此，本书可供高三复习用，也可供高中各年级学习时参阅。

参加本书编写的还有：南京师大附中特级教师仇炳生，江苏教育学院数学系副主任肖柏荣副教授，南京雨花台中学高级教师冯惠愚。

马　明

目　录

代　数

立体几何

平面解析几何

解综合题的策略

第一章　集合思想及其应用

一、集合与集合的运算

(一)集合、集合间的关系

1.集合

集合和点、线、面、体等概念一样,是一种不加定义的原始概念,一般被描述为每一组对象的全体.集合里的各个对象叫做这个集合的元素.集合的元素应具有如下特性:(1)元素的确定性;(2)元素的互异性;(3)元素的无序性.列举法和描述法是表示集合的常用方法.解集合的有关问题首先应明确集合元素的特性和正确使用集合的符号表示.

例1　用各种适当的方法表示下列集合:

(1)方程$(x^2-1)(x+1)=0$的解集;

(2)大于3小于13的所有偶数的集合;

(3)方程组$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$的解集;

(4)斜率的绝对值等于1且过原点的所有直线的集合.

解　(1)用列举法表示为$\{1,-1\}$;

用描述法表示为$\{x \mid (x^2-1)(x+1)=0\}$.

(2)用列举法表示为$\{4、6、8、10、12\}$;

用描述法表示为{大于3小于13的偶数},或$\{x \mid x=2k,$

$3<x<13, k\in Z\}$.

(3)用列举法表示为$\{(3,2)\}$.

用描述法表示为$\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x+y=5\\2x+3y=12\end{cases}\right.\right\}$.

(4)用列举法表示为$\{y=x, y=-x\}$;

用描述法表示为

{斜率的绝对值等于1且过原点的直线}.

[注1] 不是每一个集合都能同时用两种方法来表示.

[注2] 例1各小题分别采用下面的表示方法是错误的.

(1)$\{1,-1,-1\}$;

(2){大于3小于13的所有偶数的集合};

(3)$\{3,2\}$,或$\{x=3, y=2\}$;

(4)$\{(x,y)\mid y=\pm x\}$.

请读者考虑错误的原因.

例2 已知$A=\{m\mid$方程$2(m+1)x^2+4mx+3m-2=0$有两个不等实根$, m\in R\}$, $B=\{m\mid$方程$2(m+1)x^2+4mx+3m-2=0$有两个不等实根$, m\in Z\}$,

(1)试判断A,B是有限集还是无限集;

(2)试判断$-1,0,\frac{1}{2}$是否属于这两个集合.

解 (1)因为方程$2(m+1)x^2+4mx+3m-2=0$有两不等实根,故m应满足

$$\begin{cases}m\neq-1\\ \Delta=(4m)^2-8(m+1)(3m-2)=-8(m^2+m-2)>0,\end{cases}$$

$\therefore\quad -2<m<1$,且$m\neq-1$.

$\therefore\quad A=\{m\mid -2<m<1$,且$m\neq-1, m\in R\}$.

$B=\{m \mid -2<m<1$，且 $m\neq -1, m\in Z\}=\{0\}$.

可见，A 是无限集，B 是有限集.

(2)容易判断，$-1\notin A$，$-1\notin B$； $0\in A$，$0\in B$； $\frac{1}{2}\in A$，$\frac{1}{2}\notin B$.

2. 集合的包含关系和相等关系

两集合的包含、真包含和相等是三个既有联系又有区别的概念. 解集合的有关问题还应明确集合的有关概念.

对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，集合 A 就叫做集合 B 的子集. 即对于任一 $x\in A$，都有 $x\in B$，则 $A\subseteq B$. 规定空集是任何集合的子集.

如果在 A 是 B 的子集的前提下，B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集. 即若 $A\subseteq B$，存在 $y\in B$，但 $y\notin A$，则 $A\subset B$.

如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则说集合 A 与集合 B 相等，即 $A=B$.

例 3 选择题(每小题有且仅有一个答案正确，以下同)：

(1)若函数 $f(x)=\lg(x^2-x-6)$ 的定义域为 M，函数 $g(x)=\lg(x+2)+\lg(x-3)$ 的定义域为 N，则 M，N 的关系是 ( )

(A)$M\subset N$； (B)$M\supset N$；

(C)$M=N$； (D)以上关系都不对.

(2)满足 $\{1,2\}\subset M\subseteq\{1、2、3、4、5、6\}$ 的集合 M 的个数是 ( )

(A)3； (B)4； (C)15； (D)16.

解 (1)$\because$ $M=\{x \mid x^2-x-6>0\}=\{x \mid x<-2$， 或 x

$>3\}$,

$$N=\left\{x \middle| \begin{cases} x+2>0 \\ x-3>0 \end{cases}\right\}=\{x|x>3\},$$

$\therefore\ M\supset N$,应选(B).

(2)集合 M 中的元素除必须包含元素 1 与 2 之外,还应包含有 3,4,5,6 中的任意一个、二个、三个或四个,且元素是无序的. 与之对应的集合 M 的个数分别是 4,6,4,1. 故满足已知条件的集合 M 的个数是 $4+6+4+1=15$(个). 应选(C).

例 4 已知 $A=\{x|x=a^2+1,a\in N\}$,$B=\{y|y=b^2-4b+5,b\in N\}$,求证 $A\subset B$.

证明 按真子集定义,首先应证明 $A\subseteq B$,即对任一 $x_0\in A$,证得 $x_0\in B$;其次还要在 B 中找出一个元素不属于 A.

设 $x_0\in A$,则存在 $a_0\in N$,满足

$x_0=a_0^2+1=(a_0+2)^2-4(a_0+2)+5$,

$\because\ a_0\in N$, $\therefore\ a_0+2\in N$, $\therefore\ x_0\in B$,即 $A\subseteq B$.

又当 $b=2$ 时,$y=1$,而 $x=a^2+1>1$,

$\therefore\ 1\notin A$,因此 $A\subset B$.

例 5 已知集合 $X=\{(2n+1)\pi,n\in Z\}$与集合 $Y=\{(4k\pm1)\pi,k\in Z\}$,求证 $X=Y$.

证明 显然 $4k\pm1$,$(k\in Z)$是奇数,

$\therefore\ \{(4k\pm1)\pi,k\in Z\}\subseteq\{(2n+1)\pi,n\in Z\}$,

即 $Y\subseteq X$. ①

又若 $x\in X$, 则 $x=(2n+1)\pi,n\in Z$.

(1)当 n 为偶数时,

$x=(2\cdot 2m+1)\pi=(4m+1)\pi,m\in Z$;

(2)当 n 为奇数时，

$x=[2(2m-1)+1]\pi=(4m-1)\pi, m\in Z$，

可见，对于(1)、(2)均有 $x\in Y$，故 $X\subseteq Y$. ②

由①、②得 $X=Y$.

例 6 已知 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，$A=B$，求 x,y.

解 $\because$ $A=B$，$\therefore$ $0\in A$.

欲使 $\lg(xy)$ 有意义，必须 $xy>0$，故 $x\neq 0, y\neq 0$，即 A 中的元素 x,xy 都不可能是 0. 于是只能有 $\lg(xy)=0$，

$\therefore$ $xy=1$. ①

又由 $A=B$， 则 $y=1$，或 $|x|=1$.

若 $y=1$，由①$x=1$. 这时 A 中有两个元素为 1，与集合中元素应具互异性矛盾，$\therefore$ $y\neq 1$. 同理 $x\neq 1$. 故由 $|x|=1$，只能得到 $x=-1$. 由① 得 $y=-1$.

这时 $A=B=\{-1,1,0\}$.

例 7 已知不等式

$$2x^2+(2-3a)x-3a<0 \quad ①$$

$$|x-2|\geqslant 1 \quad ②$$

(1)分别求不等式①、②的解集 A 和 B；

(2)求使 $A\subset B$ 的实数 a 的取值范围.

解 (1)令 $2x^2+(2-3a)x-3a=0$，它的两根分别是 $x_1=-1$， $x_2=\frac{3a}{2}$.

当 $a>-\frac{2}{3}$时， $A=\{x|-1<x<\frac{3a}{2}\}$；

当 $a=-\frac{2}{3}$时， $A=\Phi$；

当 $a<-\dfrac{2}{3}$时， $A=\{x|\dfrac{3a}{2}<x<-1\}$.

显然，$B=\{x||x-2|\geqslant 1\}=\{x|x\leqslant 1,或\ x\geqslant 3\}$.

(2)从数轴(图 1—1(a))上不难看到，在 $a>-\dfrac{2}{3}$时，欲使 $A\subset B$，a 应满足

$$\begin{cases} a>-\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{3a}{2}\leqslant 1, \end{cases} \quad \therefore \quad -\frac{2}{3}<a\leqslant\frac{2}{3}.$$

在 $a\leqslant -\dfrac{2}{3}$时， 恒有 $A\subset B$(图 1—1(b)).

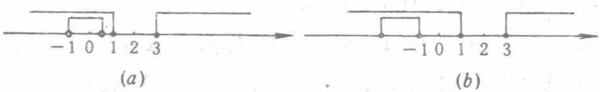


图 1—1

综上，使 $A\subset B$ 的实数 a 的取值范围应是 $a\leqslant\dfrac{2}{3}$.

小结 从上面的例子中可以知道，解决与集合有关的问题，首先应明确集合元素的特性(互异性、无序性等)，会正确地用符号表示集合以及准确把握集合间的相互关系. 借助于数轴或韦恩图可以直观地显示出集合与集合之间的关系，从而可为研究与解决集合问题提供便利. 例 7 正是这样. 另外，例 3(2)的解题过程从韦恩图(图 1—2)能更加清晰可见.

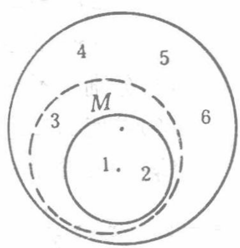


图 1—2

（二）集合的运算

我们把求集合的交集、并集与补集称为集合的运算．两个集合的交集、并集及某一集合对全集的补集定义是：

1．交集　由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的交集，即

$$A\cap B=\{x|x\in A,\text{且 }x\in B\}.$$

2．并集　由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的并集，即

$$A\cup B=\{x|x\in A,\text{或 }x\in B\}.$$

3．补集　已知全集 I，集合 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 I 中的补集，即

$$\overline{A}=\{x|x\in I,\text{且 }x\notin A\}.$$

它们分别用韦恩图表示如下：

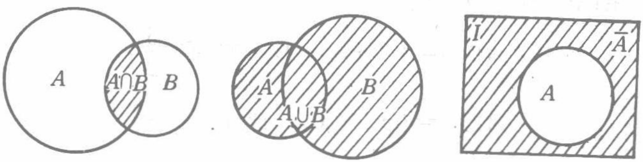


图 1—3

集合的运算具有下面的性质．

（1）交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

（2）结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

（3）分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

（4）德·摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

(5)其它　$A\cap A=A$，　$A\cap\Phi=\Phi$；

$A\cup A=A$，　$A\cup\Phi=A$；

$A\cup\overline{A}=I$　$A\cap\overline{A}=\Phi$，　$\overline{\overline{A}}=A$.

例 8　已知全集 $I=R$，$A=\{x|2x^2+x-6\geqslant 0\}$，$B=\{x|2x^2-5x<0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$A\cap\overline{B}$，$A\cup\overline{B}$.

解　∵　$A=\{x|x\leqslant -2,或\ x\geqslant\frac{3}{2}\}$，

$B=\{x|0<x<\frac{5}{2}\}$，

由图 1—4 (1)可见

$A\cap B=\{x|\frac{3}{2}\leqslant x<\frac{5}{2}\}$，

$A\cup B=\{x|x\leqslant -2,或\ x>0\}$，

又　　$\overline{B}=\{x|x\leqslant 0,\ 或\ x\geqslant\frac{5}{2}\}$，

由图 1—4 (2)可见

$A\cap\overline{B}=\{x|x\leqslant -2,\ 或\ x\geqslant\frac{5}{2}\}$，

$A\cup\overline{B}=\{x|x\leqslant 0,\ 或\ x\geqslant\frac{3}{2}\}$.

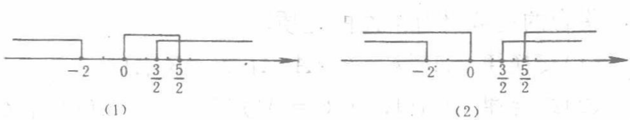


图 1—4

例 9　已知 $A=\{x|2x^2+px-q=0\}$，

$B=\{x|6x^2-(p-2)x-q=0\}$，且 $A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$，求 $A\cup B$.