第二卷

上册（第二版）

高中竞赛数学教程

刘诗雄 熊 斌 主编

全国优秀出版社
武汉大学出版社

第二卷

上册（第二版）

高中竞赛数学教程

■ 主编　刘诗雄　熊　斌

■ 编著（以姓氏笔画为序）

边红平　冯志刚　刘诗雄

岑爱国　范端喜　姚华鹏

郭希连　董方博　裴光亚

熊　斌

全国优秀出版社
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中竞赛数学教程:第 2 卷上册/刘诗雄,熊斌主编. —2 版. —武汉:武汉大学出版社,2003. 4

ISBN 7-307-03864-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①刘… ②熊… Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 001498 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:刘　欣　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu. edu. cn　网址:www. wdp. whu. edu. cn)

印刷:武汉大学出版社印刷总厂

开本:787×960　1/16　印张:17. 75　字数:295 千字　插页:1

版次:1993 年 3 月第 1 版　2003 年 4 月第 2 版

2003 年 4 月第 2 版第 1 次印刷

ISBN 7-307-03864-1/G・614　定价:20. 00 元

再版前言

本书自初版以来，受到了广大读者的持久欢迎。作为作者，没有比经常收到读者因使用此书而获得数学学习长足进步或参加国内外竞赛获奖后写来感谢信更高兴的事了——能为中国数学基础教育的提高和科学人才的发现培养尽绵薄之力这正是我们的初衷！谨借此书再版之机，向为中国数学教育事业倾情奉献的广大数学教育工作者致以崇高的敬意！

此次再版，我们对原书作了较大修改。其中第一卷修改由熊斌、冯志刚、范端喜完成；第二卷由刘诗雄、郭希连、边红平、岑爱国、姚华鹏完成。诚恳欢迎广大读者指正书中错漏。

编　　者

2002 年 12 月

序　言

数学竞赛是当今中国教育界的热点之一。自 1986 年我国派出整队参加国际奥林匹克数学竞赛以来，连获佳绩，令世人侧目。国人在欢欣之余，不断升温，以至各级领导、各类学校都将它列入议事日程，此种“热”，在世界上也堪称独步。

关于“数学竞赛”在数学教育中的地位和作用，国际上是有争论的。1992 年 8 月，在加拿大魁北克市举行的第七届国际数学教育会议上，就有一场特意设计的辩论会（Crossfire），题目就是数学竞赛。会上，攻之者说“数学竞赛只为少数天才服务，题目怪偏，不反映数学的应用功能，在社会公众中带来不好影响。”辩之者称“数学竞赛是培养学生数学兴趣的重要途径，竞赛题思考性强，有助于创造性能力的培养，天才学生的选拔对整个国家的人才开发有利，等等。”辩论没有统一的结论，但是多数人似乎赞成数学竞赛，问题是要组织得好，尽量使多数人受益，数学题目有很多档次，应该在不同水平上组织竞赛，吸收更多的人参加。

我想，这里还是用得到一句名言：“在普及的基础上提高，在提高的指导下普及。”我国的数学竞赛已取得巨大成绩，频夺奖牌之际，今后也许应在普及上多下些功夫，多从教育意义上着眼。

有念及此，恰闻熊斌、刘诗雄等先生编著《高中竞赛数学教程》一书，洋洋近百万字中，有一部分内容安排得和当今的数学教学进度同步，便于一般教师采用，这倒是一个进步。数学竞赛和日常教学相结合，该会更有生命力吧！

作者告诉我，此书非常全，又非常新，几乎囊括了历届的竞赛题及世界各国近几年来的试题，可称数学竞赛的“百科全书”。以我国数学竞赛规模之大，水平之高，出这样一部“全书”，应该是合适的。

二位主要作者都是 30 岁上下的年轻人，尤令人高兴，我国的数学竞赛专家，早期由华罗庚、苏步青等亲自领导。近 10 年来则以中国科技大学等高校的一批教授为中坚。现在，欣喜地看到第三梯队也在成长。这是我国数学竞赛事业继续兴旺的标志之一。我想：他们的努力将会是跨世纪

的，应该给予支持。我对数学竞赛可说是外行，但因希望中国数学竞赛继续取得成功，遂乐于作此序，并就教于方家。

张奠宙

1992年10月8日于华东师大

前　言

数学奥林匹克是一项历史悠久的国际性智力竞赛活动。自1894年匈牙利揭开现代中学生数学竞赛的序幕始，近百年来，开展数学竞赛的范围由欧洲而北美，而澳洲，而亚洲、非洲，不断扩大。尤为引人注目的是，在有着五千年光辉文明的中华大地，鼓励、支持和参加数学竞赛正在成为一种社会风尚。

悠久的历史，普遍的热情，广泛的参与，促成了数学奥林匹克的形式和内容日臻完善。一门奥林匹克数学（又称竞赛数学）正在发育成熟。奥林匹克数学是数学百花园中的一株奇葩，她把现代的数学内容与趣味性的陈述、独创性的技巧有机地结合起来，充分展示了数学的统一美、简洁美、对称美和奇异美。

作为一次甘冒失败风险的尝试，我们编写了这套《高中竞赛数学教程》。也许她过于早产，过于稚嫩。但我们还是抱着聊胜于无的想法将她献给我们所敬重的数学教育界的前辈、专家学者和年轻的同仁，献给跃跃欲试立志在数学奥林匹克赛场上一抖雄风的广大中学生朋友。

鉴于数学奥林匹克培训在我国已经形成的特点，《高中竞赛数学教程》的编写突出了以下两点：(1) 基础与提高并重，本书采用同一内容分“A”和“B”两部分的编写方法，“A”强调基础，帮助学生从竞赛的角度进一步深化对中学数学内容的认识，掌握中学数学以外的竞赛内容；“B”强调提高，帮助学生掌握奥林匹克数学的一些较难的内容和技巧。(2) 同步与超前结合。“A”内容顺序与中学数学内容同步，但在数学思想方法的渗透和思维能力与技巧的培养方面又有一定的超前性，以便帮助那些出类拔萃的学生更快地提高；“B”则不受教材知识顺序的限制，在突出重点的基础上加强知识和方法的纵横联系，帮助学生从整体上把握奥林匹克数学的内容，提高数学素养和综合解题的能力。

这套《高中竞赛数学教程》由熊斌、刘诗雄共同策划和主编。其中第2,4,5,7,8,9,10,13,14章由熊斌和冯志刚编写；第3,6,16,20章由裴光亚编写；第15,18,19章由董方博编写；第1,11,12,17章由刘诗雄编写。

正值《高中竞赛数学教程》出版之机，我们向热情为本书题写书名的全国政协副主席、我国数学竞赛创始人之一的著名数学家苏步青老前辈致

以无比的敬意和谢忱；向支持和关心本书写作的数学家、数学教育家张莫宙教授致以崇高的谢意；我们要感谢为数学竞赛作出贡献的所有专家学者和中学数学教师，本书的许多材料来源于他们的智慧和创造。

由于水平所限，书中错漏难免，敬请专家和读者批评指正。作为抛砖引玉，我们热情地期待更多的优秀奥林匹克数学教材问世。

编　者

1992 年 9 月 1 日

符号说明

$\mathbf{N}$	自然数 $0,1,2,\cdots$ 构成的集合
$\mathbf{N}^{+}$	正整数集
$\arg z$	复数 z 的辐角主值
$\tan\alpha$	角 α 的正切函数值
$\cot\alpha$	角 α 的余切函数值
(a,b)	整数 a,b 的最大公约数
$[a,b]$	整数 a,b 的最小公倍数
$a\mid b$	整数 a 能整除 b
$p^{\alpha}\parallel a$	表示 $p^{\alpha}\mid a$，而 $p^{\alpha+1}\nmid a$，这里 p 为质数，$\alpha\in\mathbf{N}^{+}$
$[x]$	不超过实数 x 的最大整数
$\{x\}$	实数 x 的小数部分，即 $\{x\}=x-[x]$
$\binom{n}{m}$	从 n 个元素中选出 m 个元素的组合数
$\delta_m(a)$	a 对模 m 的指数
$\mathbf{Z}[x]$	整系数多项式全体构成的集合
$\deg f$	多项式 $f(x)$ 的次数

目　录

第11章 组合基础

组合数学是一个既古老又年轻的离散数学分支. 近几十年来，由于计算机科学的发展和日益增多的组合问题的出现，丰富和发展了组合理论，这直接影响到数学竞赛的命题工作. 求解竞赛中出现的初等组合问题并不需要复杂的数学知识，然而在趣味性命题的陈述下包含了高超的解题技巧，无论是从智力训练的角度，还是从竞赛准备的角度考虑，理解和钻研这些问题都是十分有意义的.

本书辟两章介绍组合基础知识和求解组合问题的基本方法. 本章将以组合概念和构造性问题为主进行介绍，介绍中也不回避计数问题.

A

§11.1 加法原理和乘法原理

首先，我们介绍加法原理和乘法原理. 它们是基本的组合计数原理，同时也是进一步研究其他组合问题的基础.

1. 加法原理

借助有关集合划分的知识，我们给出加法原理的集合论形式如下：

加法原理 *设 S 为完成一件事的所有方法的集合，它可以划分为 n 个互不相交的非空子集：$A_1,A_2,\cdots,A_n$，$|A_i|=m_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=S$. 那么，完成这件事共有*

$$N=|S|=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法.

使用加法原理的关键在于对所计数的对象必须进行“完全分组”.

例1 在正方体的8个顶点、12条棱的中点、6个面的中心及正方体的中心共27个点中，共线的三点组的个数是多少？

解 由于以每两个顶点为端点的线段的中点都是27点组中的点，所

以以顶点为线段两端点的共线三点组有 $C_8^2=\frac{8\times7}{2}=28$ 个.

两条平行棱中点的连线的中点也在 27 点组中，这一类的共线三点组有 $3C_4^2=3\times\frac{4\times3}{2}=18$ 个.

两端点为面的中心的共线三点组共有 3 个.

由加法原理，共线的三点组共有 $28+18+3=49$ 个.

例 2 设正整数 a,b,c 为三角形三边长，$a+b=n$，$n\in\mathbf{N}^+$，$1\leqslant c\leqslant n-1$. 求这样的三角形的个数.

解 不妨设 $b\geqslant a$，则 $1\leqslant a\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$. 满足题设条件的三角形可分为两类：

第一类：c 为最大边. 令 $a=i$，则 $b=n-i$，$n-i\leqslant c\leqslant n-1$. 这样的三角形有 $(n-1)-(n-i)+1=i$ 个.

第二类：c 不为最大边. 则 $b>c$，$c+a>b$，故 $b-a=n-2i$，$n-2i<c<n-i$. 因此 $n-2i+1\leqslant c\leqslant n-i-1$. 这样的三角形有

$$(n-i-1)-(n-2i+1)+1=i-1\text{ 个}.$$

由加法原理，满足题设条件的三角形的个数为

$$f(n)=\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(i+i-1)=\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(2i-1)=\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)^2.$$

例 3 设 n 是一个固定的正偶数. 考虑一块 $n\times n$ 的正方板，它被分成 n^2 个单位正方格. 板上两个不同的正方格如果有一条公共边，就称它们是相邻的.

将板上 N 个单位正方格做上标记，使得板上的任意正方格（做上标记的或者没有做上标记的）都与至少一个做上标记的正方格相邻. 确定 N 的最小值.

解 设 $n=2k$. 首先将正方板黑白相间地涂成像国际象棋盘那样. 设 $f(n)$ 为所求的 N 的最小值，$f_w(n)$ 为必须做上标记的白格子的最小数目，使得任一黑格子都有一个做上标记的白格子与之相邻. 同样地，定义 $f_b(n)$ 为必须做上标记的黑格子的最小数目，使得任一白格子都有一个做上标记的黑格子与之相邻. 由于 n 为偶数，“棋盘”是对称的，故有

$$f_w(n)=f_b(n),\quad f(n)=f_w(n)+f_b(n).$$

为方便起见，将“棋盘”按照最长的黑格子对角线水平放置，则各行黑格子的数目分别为 $2,4,\cdots,2k,\cdots,4,2$.

在含有 $4i-2$ 个黑格子的那行下面，将奇数位置的白格子做上标记. 当该行在对角线上方时，共有 $2i$ 个白格子做上了标记(如图 11-1)；而当该行在对角线下方时，共有 $2i-1$ 个白格子做上了标记(如图 11-2). 因而

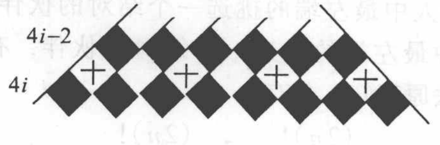

图 11-1

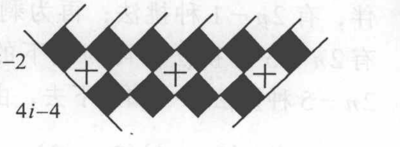

图11-2

做上了标记的白格子共有

$$2+4+\cdots+k+\cdots+3+1=\frac{k(k+1)}{2}\text{个}.$$

易见这时每个黑格子都与一个做上标记的白格子相邻，故得

$$f_w(n)\leqslant\frac{k(k+1)}{2}.$$

考虑这$\frac{k(k+1)}{2}$个做上标记的白格子，它们中的任意两个没有相邻的公共黑格子，所以，至少还需要将$\frac{k(k+1)}{2}$个黑格子做上标记，以保证这些白格子中的每一个都有一个做上标记的黑格子与之相邻. 从而

$$f_b(n)\geqslant\frac{k(k+1)}{2}.$$

故 $f_w(n)=f_b(n)=\frac{k(k+1)}{2}$. 因此 $f(n)=k(k+1)=\frac{n(n+2)}{4}$.

2. 乘法原理

加法原理讨论的是可完全分组的计数问题. 有些计数问题的求解必须分步骤一步一步进行，解决这类问题的方法由下面的乘法原理给出.

乘法原理 设完成一件事需要 n 个步骤，实现第 i $(i=1,2,\cdots,n)$个步骤的方法的集合为 A_i，$|A_i|=m_i$，那么，完成这件事共有

$$N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$$

种不同的方法.

例 4 设 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{1,2,\cdots,2001\}$，映射 f: $A\to B$ 满足对任意的 $x\in A$，均有数 $x+f(x)+x^2f(x)+2001$ 为偶数. 问这样的映射有多少个?

解 由题设，当 x 为偶数时，$f(x)$只能为奇数；而当 x 为奇数时，数 $x+f(x)+x^2f(x)+2001$ 必为偶数. 于是，$f(0)$取奇数有 1000 种取法，$f(1)$和 $f(-1)$各有 2001 种取法. 由乘法原理知，这样的映射共有 $2001^2\times 1000$ 个.

例 5 有 $2n$ 个人参加收发电报培训，每两人结为一对互发互收. 试问有多少种不同的结对方式?

解 让这 $2n$ 个人列成一横排，先为最左端的人挑选一个结对的伙伴，有 $2n-1$ 种挑法；再为剩下的人中最左端的挑选一个结对的伙伴，有 $2n-3$ 种挑法；再为剩下的人中最左端的挑选一个结对的伙伴，有 $2n-5$ 种挑法……如此下去，由乘法原理知，共有

$$(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1=\frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$$

种不同的结对方式.

一些计数问题要同时应用加法原理和乘法原理来解决.

例 6 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，并使同一条棱的两个端点异色. 如果只有 5 种颜色可供使用，求不同的染色方法的总数.

解 四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的一个侧面 SAB 上的 3 个顶点 S,A,B 所染的颜色互不相同，而总共有 5 种颜色可供使用，则它们共有 $5\times4\times3$ 种染色方法.

当 S,A,B 已染好时，不妨设其颜色分别为 1,2,3. 下面来考虑 C,D 两点的染色情形，由于同一条棱的两端点异色，则 C 只可能染颜色 2,4,5 中的一种.

(1) 若 C 染颜色 2，则 D 可染颜色 3,4,5 之一，有 3 种染法.

(2) 若 C 染颜色 4，则 D 可染颜色 3 或 5，有 2 种染法.

(3) 若 C 染颜色 5，则 D 可染颜色 3 或 4，有 2 种染法.

可见，当三点 S,A,B 已染好时，C 与 D 还有 $3+2+2=7$ 种染法.

由乘法原理可知，总的染色方法数为 $60\times7=420$ 种.

对于一些从正面直接计算不易求解的计数问题，可以考虑采用从反面间接计算的技巧.

例 7 有多少个能被 3 整除而又含有数字 6 的五位数?

因为五位数中含有数字 6 的情况比较复杂：可以含一个 6、两个 6……乃至 5 个 6. 而这些 6 又可能出现在各个不同的数位上，故正面分类计算太繁. 但反过来一想，“能被 3 整除而又不含数字 6”的五位数只有一类，而且较易计算其个数. 由“能被 3 整除的五位数”的总数再减去“能被 3 整除又不含数字 6”的五位数的个数便得所求结果.

解 易知，在由 10000 至 99999 这 90000 个五位数中，共有 30000 个可被 3 整除. 下面求其中不含数字 6 的有多少个.

这可从逐位讨论数字的可能情况入手. 在最高位，不能为 0 和 6，因此有 8 种可能情况. 在千、百、十位上，不能为 6，各有 9 种可能情况. 在个位上，不仅不能为 6，还应使整个五位数能被 3 整除，因此所出现的数应与前 4 位数字之和被 3 除的余数有关：当该余数为 2 时，个位可为 1,4,7 中的一个；当该余数为 1 时，个位可为 2,5,8 中的一个；当该余数为 0

时，个位可为 0,3,9 中的一个．总之，不论前 4 位数如何，个位数字都有 3 种可能情况．所以，这类五位数的个数为 $8\times9\times9\times9\times3=17496$.

因此，不含数字 6 而又可被 3 整除的五位数共有 $30000-17496=12504$ 个．

像此例这样利用"总数－不合格数＝合格数"的方法进行计数，是数学解题中典型的避繁就简、从反面考虑的策略．

3．排列

乘法原理的一个重要应用是以其推导排列数公式．

定义 从一个 n 元集里，每次取出 r 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素里取出 r 个元素的排列，简称 ***r*-排列**．所有这样的排列的个数叫做**排列数**，记为 P_n^r．特别地，当 $r=n$ 时，叫做 n 个元素的**全排列**．

由乘法原理立得

$$P_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1),$$

或 $P_n^r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$.

为了使上式当 $r=n$ 和 $r=0$ 时有意义，我们规定：

(1) $0!=1$．这时，$P_n^n=\dfrac{n!}{0!}=n!$.

(2) $P_n^0=1$．这说明从 n 个元素中不取任何元素的排列恰有一种．

例 8 三位数(100,101,…,999)共 900 个．在卡片上打印这些三位数，每张卡片打印 1 个三位数．有的卡片所印的，倒过来看仍为三位数，如 198 倒过来看是 861 (1 倒过来看仍视为 1)；有的卡片则不然，如 531 倒过来是 ΙƐS．因此有些卡片可以一卡二用，于是至多可以少打印多少张卡片？

解 将卡片上的数字倒过来看仍是三位数，这些三位数的十位可以是 0,1,6,8,9 中的任何一个，有 5 种取法，而百位数字与个位数字只可以取 1,6,8,9 中的任何一个，分别有 4 种取法，这样的三位数共有 $5\times4\times4=80$ 个．

但是这 80 个三位数中有的虽然倒过来仍为三位数，但仍与原来的数相同，如 619 倒过来看仍为 619．这种三位数的十位数字只能取 0,1,8，有 3 种取法，百位可取 1,6,8,9 中的任一个，有 4 种取法．当十位数字、百位数字确定后，满足条件的三位数的个位数字也就随之确定了．所以相应的三位数共有 $3\times4=12$ 个．

所以可省去的卡片的张数最多为 $\dfrac{1}{2}(80-12)=34$.

例 8 这类问题称为"限位"排列．"限位"可以是限制某些元素必须排在

什么位置，也可以是限制某些元素不能排在某些位置，解决这类问题，可从有限制的“元素”或“位置”入手，也可以采用像例7一样间接求解的方法.

例9 圆桌的9个位置上放着9样不同的点心和饮料. 6位先生与3位女士共进早餐，3位女士两两不相邻的坐法有多少种？

解 从圆桌的某个位置开始，将9个位置依次编为第1号、第2号……第9号，然后将9个人排成一列从左到右依次坐第1号、第2号……第9号即可. 现在来排这9个人. 先让6位先生从左到右站成一列，有P_6^6种站法，然后让3位女士分别站在排头或排尾或两位先生之间，有P_7^3种站法. 因此，9个人排成一列有$P_6^6P_7^3$种站法. 但如果排头排尾都是女士，当9个人围桌进餐时，则这两位女士相邻，这类情况有$P_3^2P_6^6P_5^1$种. 所以，女士不相邻的坐法共有$P_6^6P_7^3-P_3^2P_6^6P_5^1=129600$种.

例9的问题称为“间隔”排列. 解决这类问题可以从不必间隔的元素入手，先将其排好，然后将不能相邻的元素一个一个插入已经排好的元素两两之间的空位里，便可将全部元素按要求排好.

还有一类较常见的被称为“集团”排列的问题，我们把它放在本节的习题中.

例10 1,2,3,4,5,6的一排列p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6具有性质：对$1\leqslant n\leqslant 5$，$p_1,p_2,\cdots,p_n$不构成$1,2,\cdots,n$的排列. 求这种排列的个数.

解 显然$p_1\neq 1$.

$p_1=6$的$5!$个均合乎要求.

$p_1=5$的当中，$p_6=6$的$4!$个不合乎要求.

$p_1=4$的当中，$4\times\times\times\times6$，$4\times\times\times65$均不合乎要求.

$p_1=3$的当中，$3\times\times\times\times6$，$3\times\times\times65$，$3\times\times645$，$3\times\times564$，$3\times\times654$不合乎要求.

$p_1=2$的当中，$2\times\times\times\times6$，$2\times\times\times65$，$2\times\times645$，216345，$21\times\times35$，$2\times\times564$，$2\times\times654$，$21\times\times34$，$21\times3\times4$，$21\times\times\times3$不合乎要求.

因此，所求的个数为$5!+(5!-4!)+(5!-4!-3!)+(5!-4!-3!-3\times2!)+(5!-4!-2\times3!-6\times2!-1)=461$.

习题11.1

A 组

1. 填空题

(1) 三角形的3条边长均为正整数，其中有一条边长为4，但它不是最短的边，这样不同的三角形共有________个.