

女

题名

葛严麟



中国人民大学出版社

1995年研究生入学考试 数学模拟题及题型分析

葛严麟 主编



中国人民大学出版社

(京)新登字 156 号

图书在版编目(CIP)数据

1995 年研究生入学考试数学模拟题及题型分析/葛严麟
主编. —北京:中国人民大学出版社,1994
ISBN 7-300-01956-0

I. 19...

II. 葛...

III. 数学-研究生-入学考试-教学参考资料

IV. 01-44

1995 年研究生入学考试数学模拟题及题型分析

葛严麟 主编

出版 发行: 中国人民大学出版社
(北京海淀路 39 号 邮码 100872)
经 销: 新华书店
印 刷: 测绘出版社印刷厂

开本: 850×1168 毫米 1/32 印张: 12.5
1994 年 6 月第 1 版 1994 年 6 月第 1 次印刷
字数: 308900 册数: 1-8000

定价: 10.00 元

前 言

为了帮助广大参加研究生入学数学考试的考生复习应考,我们根据国家教委考试中心制定的全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学大纲的要求,对近年来的考题进行了反复的研究,并结合我们在长期考研辅导、阅卷中的实践经验,针对考生在临场答卷中出现的典型错误,编写了这本复习用书。希望通过本书的训练,能使读者在考试中有一个较大的突破。

本书共分两部分:题型分析和模拟试题。题型分析部分突出大纲所要求的概念和有关方法,精选各类题型,进行详细的分析和解答,从而提高考生对各种题型的审题、解题能力。模拟试题部分采用研考实战形式,精心采编各类题型构成套题,针对性强,实用性强,重在强化考生的应试能力,突出训练重点,测试考生对应试内容的记忆、理解、掌握程度。

本书在去年版本的基础上作了一些修改,力求突出近几年考研试题的发展趋势,即证明题难度趋增,计算题愈益灵活多样,综合题型增多。本书的许多题目取自于清华大学题库,以及历届考研试题,取材具有一定的代表性。

参加本书编写工作的同志,全部来自于清华大学数学系。全书由葛严麟副教授组织编写,俞雄飞、何建平、陆继坦、谷立振等老师分别编写了有关内容。由于经验不足,书中难免有不妥之处,欢迎广大读者批评指正。

编 者

1994年5月于清华

目 录

题型分析部分

第一章 一元函数微积分	(3)
§ 1 极限、连续和导数	(3)
§ 2 函数的单调性、极值、证明不等式、作图	(22)
§ 3 介值定理、中值定理、 ξ 问题、零点问题	(32)
§ 4 不定积分	(39)
§ 5 定积分和广义积分	(46)
§ 6 无穷级数	(65)
§ 7 傅立叶级数	(83)
§ 8 常微分方程	(87)
第二章 多元函数微积分	(100)
§ 1 空间解析几何	(100)
§ 2 多元函数的基本概念	(107)
§ 3 多元函数微分法	(109)
§ 4 多元函数微分法的应用	(113)
§ 5 重积分及其应用	(118)
§ 6 曲面积分及应用	(126)
§ 7 曲线积分及其应用	(132)

第三章 线性代数	(139)
§ 1 行列式	(139)
§ 2 矩阵	(146)
§ 3 n 维向量空间	(152)
§ 4 线性方程组	(160)
§ 5 特征值、特征向量、矩阵对角化、 对称矩阵、正交矩阵.....	(168)
§ 6 二次型	(174)
第四章 概率论	(185)
§ 1 随机事件及其概率	(185)
§ 2 随机变量及其分布	(191)
§ 3 多维随机变量	(193)
§ 4 随机变量的数字特征	(203)
§ 5 大数定律与中心极限定律	(211)
第五章 复变函数	(214)
§ 1 复数与复变函数的基本概念	(214)
§ 2 解析函数	(216)
§ 3 保角映射	(220)
§ 4 级数与孤立奇点	(224)
§ 5 积分与留数	(229)
第六章 经济数学	(235)

模拟试题及答案部分

数学(一)模拟试题及答案	(241)
数学(一)模拟试题(I)	(241)

数学(一)模拟试题(I)参考答案	(244)
数学(一)模拟试题(I)	(252)
数学(一)模拟试题(II)参考答案	(256)
数学(一)模拟试题(III)	(264)
数学(一)模拟试题(III)参考答案	(268)
数学(二)模拟试题及答案	(276)
数学(二)模拟试题(I)	(276)
数学(二)模拟试题(I)参考答案	(279)
数学(二)模拟试题(II)	(285)
数学(二)模拟试题(II)参考答案	(289)
数学(二)模拟试题(III)	(294)
数学(二)模拟试题(III)参考答案	(298)
数学(三)模拟试题及答案	(304)
\surd 数学(三)模拟试题(I)	(304)
数学(三)模拟试题(I)参考答案	(308)
数学(三)模拟试题(II)	(312)
数学(三)模拟试题(II)参考答案	(314)
数学(三)模拟试题(III)	(321)
数学(三)模拟试题(III)参考答案	(323)
数学(四)模拟试题及答案	(329)
数学(四)模拟试题(I)	(329)
数学(四)模拟试题(I)参考答案	(332)
数学(四)模拟试题(II)	(338)
数学(四)模拟试题(II)参考答案	(343)
数学(四)模拟试题(III)	(349)
数学(四)模拟试题(III)参考答案	(352)
数学(五)模拟试题及答案	(358)

数学(五)模拟试题(I).....	(358)
数学(五)模拟试题(I)参考答案.....	(362)
数学(五)模拟试题(II).....	(368)
数学(五)模拟试题(II)参考答案.....	(372)
数学(五)模拟试题(III).....	(377)
数学(五)模拟试题(III)参考答案.....	(381)

题型分析部分

第一章 一元函数微积分

§ 1 极限、连续和导数

1. 极限

数列 $\{x_n\}$ 的极限与数列的前有限项无关, 其定义是: 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \varepsilon$, 则认为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$. 要证明 $\{x_n\}$ 的极限不是 A , 则需找到一个正数 ε_0 , 使对于任意 N , 当 $n > N$ 时, $|x_n - A| \geq \varepsilon_0$.

如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ 都存在, 则下列运算成立; 如果上述极限并非都存在, 则下列运算不一定成立.

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n y_n) = (\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) (\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n}, \quad (\text{分母不为零}).$$

函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值无关, 其定义是: 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则认为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. 由于 $x \rightarrow x_0$ 有两种方式, 即

$x \geq x_0, x \rightarrow x_0$ 及 $x \leq x_0, x \rightarrow x_0$, 故极限有左极限、右极限之分, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, 显然, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都存在, 则下列四则运算亦成立:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) (\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad (\text{分母不为零}).$$

证明数列极限存在有两种基本方法: 一是单调有界数列必有极限; 另一个则是夹逼定理. 由于近年来研究生入学试题中很少出现数列极限, 因此我们主要讨论函数极限的计算.

常考题型如下: 当 $x \rightarrow a$ 时, 求未定型极限: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$ (可以转化为 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$), $\infty - \infty$ (必须先转化为 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$), $1^\infty, 0^0$.

常用算法: 对 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

(1) 使用洛比塔法则, 对分子、分母求导 (可能多次), 将未定型转化为有定型;

(2) 当 $a \neq \infty$ 时, 利用初等函数的泰勒展开公式 (具体展开到第几项, 视题目中 x 的最高次数决定), 尽可能用幂函数代替初等函数 (即等价代换), 将复杂的式子转化为简单的式子. 一般的情况下, $\sin x, \cos x, \tan x$ 最多展开到第二项; 而 $\ln(1 \pm x), e^{\pm x}$ 可能要多展开几项. 特别地, $\sin[u(x)] \approx u(x)$, 如果 $u(x) \rightarrow 0$.

对于含根号的未定型, 可以将根号有理化, 将其转化成分子、分母相除形式.

对于 $1^\infty, 0^0$ 这种指数形式的极限, 无一例外可取对数, 化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$. 特殊地, 如 $u(x) \rightarrow 0$, 则 $[1 + u(x)]^{\frac{1}{u(x)}} \rightarrow e$.

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$. $(\frac{0}{0})$

解 用洛比塔法则,

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin x) = 1 \end{aligned}$$

或用等价无穷小代替, $1 - \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$,

$$e^x - \sin x - 1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

因此, 原极限为 1.

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$. $(\frac{0}{0})$

解 去根号是关键, 分母有理化.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1 + x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1 + x \sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 + x \sin x - \cos x}$$

$$\stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x \cos x + \sin x + \sin x} = \frac{4}{3}$$

例 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)^x$. (1^∞)

解 令 $y = x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)$

则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} y & = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right) \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)}{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{求导}}{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \frac{\frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi}$$

所以, 原式 = $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

例 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

解 此题尽管含幂 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 但不是 $1^\infty, 0^0$ 型, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\text{求导}}{\lim_{x \rightarrow 0}} \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \right]' \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2 + x^3} \\ & = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2 + x^3} \\ & \stackrel{\text{求导}}{=} e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - 1}{x(2+3x)} \\ & = -\frac{e}{2}. \end{aligned}$$

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \int_0^{x^2} \cos(t^2) dt}{\sin^{10} x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

解 积分与函数极限联系在一起, 也是一类题型.

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\text{求导}}{\lim_{x \rightarrow 0}} \frac{2x - 2x \cos x^4}{10 \sin^9 x \cos x} \stackrel{\text{sinx 用 x 代}}{\lim_{x \rightarrow 0}} \frac{2x(1 - \cos x^4)}{10x^9 \cos x} \\ & \stackrel{\text{cos} x^4 \text{ 展开}}{\lim_{x \rightarrow 0}} \frac{2x \left\{ 1 - \left[1 - \frac{1}{2}(x^4)^2 \right] + 0(x^8) \right\}}{10x^9 \cos x} \\ & = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

下面的例题是已知幂参数的极限的数值, 需要求出参数的值.

例 6 求正常数 a 和 b , 使

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = 1.$$

解 由于 $bx - \sin x \rightarrow 0$ (当 $x \rightarrow 0$), 故

$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt \rightarrow 0$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt \stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{b - \cos x} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}} = 1$

由 $\sqrt{a+x^2} \rightarrow \sqrt{a} > 0, x^2 \rightarrow 0$, 故必有

$$\lim_{x \rightarrow 0} (b - \cos x) = 0, \text{即 } b = 1$$

于是, 原式左端 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{a}(1 - \cos x)} = \frac{2}{\sqrt{a}} = 1$,

故 $a = 4$.

例 7 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = \int_{-\infty}^c te^{2t} dt$, 求 c .

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{2c}{x-c} \right)^{\frac{x-c}{2c}} \right]^{\frac{2cx}{x-c}} = e^{2c}$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^c te^{2t} dt &= \frac{1}{2} e^{2t} \left(t - \frac{1}{2} \right) \Big|_{-\infty}^c \\ &= \frac{1}{2} e^{2c} \left(c - \frac{1}{2} \right) - \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^{2t} \left(t - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{2c} \left(c - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

因此 $\frac{1}{2} e^{2c} \left(c - \frac{1}{2} \right) = e^{2c}$, 即 $c = \frac{5}{2}$.

例 8 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b \right) = 0$, 确定 a, b .

解 此题可用洛比塔法则及等价无穷小来解.

原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + ax + bx^3}{x^3} \stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos 3x + a + 3bx^2}{3x^2}$,

由 $\lim_{x \rightarrow 0} (3\cos 3x + a) = a + 3$ 及上述极限的存在性, 则必有 $a = -3$. 于是

原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos 3x - 3 + 3bx^2}{3x^2} \stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9\sin 3x + 6bx}{6x}$

$\stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-27\cos 3x + 6b}{6}$,

故 $-27 + 6b = 0$, 即 $b = \frac{9}{2}$.

如用 $\sin 3x = 3x - \frac{1}{3!}(3x)^3 + o(x^3)$ 代入原式, 则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+a}{x^2} + b - \frac{9}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)$$

易得 $3+a=0, b=\frac{9}{2}$. 此法显然简单明了.

这种题型也常常用来求函数的渐近线.

例 9 试求函数 $\sqrt{x^2 - x + 1}$ 的斜渐近线.

解 要求 $y = ax + b$, 使 $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x^2 - x + 1} - (ax + b)] = 0$.

首先用等价无穷小来解. 当 $|x|$ 充分大时,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - x + 1} &= |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1-x}{x^2}} \\ &= |x| \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] \end{aligned}$$

因此, 对 $x \rightarrow +\infty$

$$\sqrt{x^2 - x + 1} - (ax + b) = x(1-a) + \left(-b - \frac{1}{2}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

故由渐近线性性质知: $a = 1, b = -\frac{1}{2}$.

对 $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - x + 1} - (ax + b) &= -x \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{x^2} \right) \\ &\quad - ax - b + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -(1+a)x + \frac{1}{2} - b + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

所以, $a = -1, b = \frac{1}{2}$.

这样得到 $\sqrt{x^2 - x + 1}$ 的两条渐近线.

如果此题用根号有理化来做, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1 - a^2x^2 - 2abx - b^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + ax + b} = 0 \end{aligned}$$

由此得 $a^2 = 1$, 显然 $a \neq -1$, 否则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - b) = +\infty.$$

其次, $-1 - 2ab = 0$, 即 $b = -\frac{1}{2}$. 这样当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$\sqrt{x^2 - x + 1}$ 的斜渐近线为 $x - \frac{1}{2}$. 类似可得当 $x \rightarrow -\infty$ 时,

$\sqrt{x^2 - x + 1}$ 的斜渐近线为 $-x + \frac{1}{2}$.

上述两种方法均比较简单, 读者可自行体会.

关于洛比塔法则求未定型极限, 有时(当然是非常罕见)会遇到下列情形: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 有极限, 但 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 却没有极限. 此时若用洛比塔法则来做, 则有可能出错.

$$\text{例 10 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{\ln(1+x)}. \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + x \sin \frac{1}{x} \right) \\ &= 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

如果使用洛比塔法则, 则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} = 1 + 0 - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在, 故洛比塔法则失效.

从上面这个例子可以看出, 如果使用洛比塔法则使得原式极