题

葛严麟

中国人民大学出版社

1995年研究生入学考试数学模拟题及题型分析

葛严麟　主编

中国人民大学出版社

(京)新登字 156 号

图书在版编目(CIP)数据

1995 年研究生入学考试数学模拟题及题型分析/葛严麟主编. 一北京:中国人民大学出版社,1994
ISBN 7-300-01956-0

Ⅰ. 19…
Ⅱ. 葛…
Ⅲ. 数学-研究生-入学考试-教学参考资料
Ⅳ. 01-44

1995 年研究生入学考试数学模拟题及题型分析
葛严麟 主编

出版 发行:中国人民大学出版社
(北京海淀路 39 号 邮码 100872)
经 销:新华书店
印 刷:测绘出版社印刷厂

开本:850×1168 毫米 1/32 印张:12.5
1994 年 6 月第 1 版 1994 年 6 月第 1 次印刷
字数:308900 册数:1-8000

定价:10.00 元

前　言

为了帮助广大参加研究生入学数学考试的考生复习应考，我们根据国家教委考试中心制定的全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学大纲的要求，对近年来的考题进行了反复的研究，并结合我们在长期考研辅导、阅卷中的实践经验，针对考生在临场答卷中出现的典型错误，编写了这本复习用书。希望通过本书的训练，能使读者在考试中有一个较大的突破。

本书共分两部分：题型分析和模拟试题。题型分析部分突出大纲所要求的概念和有关方法，精选各类题型，进行详细的分析和解答，从而提高考生对各种题型的审题、解题能力。模拟试题部分采用研考实战形式，精心采编各类题型构成套题，针对性强，实用性强，重在强化考生的应试能力，突出训练重点，测试考生对应试内容的记忆、理解、掌握程度。

本书在去年版本的基础上作了一些修改，力求突出近几年考研试题的发展趋势，即证明题难度趋增，计算题愈益灵活多样，综合题型增多。本书的许多题目取自于清华大学题库，以及历届考研试题，取材具有一定的代表性。

参加本书编写工作的同志，全部来自于清华大学数学系。全书由葛严麟副教授组织编写，俞雄飞、何建平、陆继坦、谷立振等老师分别编写了有关内容。由于经验不足，书中难免有不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

编　者

1994 年 5 月于清华

目　　录

题型分析部分

模拟试题及答案部分

题型分析部分

第一章　一元函数微积分

§1　极限、连续和导数

1. 极限

数列 $\{x_n\}$ 的极限与数列的前有限项无关，其定义是：如果对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \varepsilon$，则认为 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = A$. 要证明 $\{x_n\}$ 的极限不是 A，则需找到一个正数 ε_0，使对于任意 N，当 $n > N$ 时，$|x_n - A| \geqslant \varepsilon$.

如果 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$，$\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$ 都存在，则下列运算成立；如果上述极限并非都存在，则下列运算不一定成立.

(1) $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n \pm \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

(2) $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n y_n) = \left(\lim\limits_{n \to +\infty} x_n\right)\left(\lim\limits_{n \to +\infty} y_n\right)$，

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n}{\lim\limits_{n \to +\infty} y_n},\qquad \text{（分母不为零）}.$$

函数极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值无关，其定义是：如果对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则认为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. 由于 $x \to x_0$ 有两种方式，即

$x \geqslant x_0, x \to x_0$ 及 $x \leqslant x_0, x \to x_0$，故极限有左极限、右极限之分，即 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$，显然，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$.

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ 都存在，则下列四则运算亦成立：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = (\lim\limits_{x \to x_0} f(x))(\lim\limits_{x \to x_0} g(x))$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \quad \text{(分母不为零)}.$$

证明数列极限存在有两种基本方法：一是单调有界数列必有极限；另一个则是夹逼定理. 由于近年来研究生入学试题中很少出现数列极限，因此我们主要讨论函数极限的计算.

常考题型如下：当 $x \to a$ 时，求未定型极限：$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$（可以转化为$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$），$\infty - \infty$（必须先转化为$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$），$1^\infty, 0^0$.

常用算法：对$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

(1) 使用洛比塔法则，对分子、分母求导（可能多次），将未定型转化为有定型；

(2) 当 $a \neq \infty$ 时，利用初等函数的泰勒展开公式（具体展开到第几项，视题目中 x 的最高次数决定），尽可能用幂函数代替初等函数（即等价代换），将复杂的式子转化为简单的式子. 一般的情况下，$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ 最多展开到第二项；而 $\ln(1 \pm x), e^{\pm x}$ 可能要多展开几项. 特别地，$\sin[u(x)] \approx u(x)$，如果 $u(x) \to 0$.

对于含根号的未定型，可以将根号有理化，将其转化成分子、分母相除形式.

对于 1^{∞}, 0^0 这种指数形式的极限，无一例外可取对数，化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$. 特殊地，如 $u(x) \to 0$，则 $[1+u(x)]^{\frac{1}{u(x)}} \to e$.

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.　　$(\frac{0}{0})$

解　用洛比塔法则，

$$\text{原式} \xlongequal{\text{求导}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(e^x+\sin x) = 1$$

或用等价无穷小代替，$1-\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$，

$$e^x - \sin x - 1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

因此，原极限为 1.

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.　$(\frac{0}{0})$

解　去根号是关键，分母有理化.

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)}{1+x\sin x-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{1+x\sin x-\cos x}$$

$$\xlongequal{\text{求导}} \lim_{x\to 0}\frac{4x}{x\cos x+\sin x+\sin x} = \frac{4}{3}$$

例 3　$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x\right)^x$.　(1^{∞})

解　令 $y = x\ln\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x\right)$

则
$$\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\xlongequal{\text{求导}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi}$$

所以,原式 $= e^{-\frac{2}{\pi}}$.

例 4 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$. $(\frac{0}{0})$

解 此题尽管含幂$(1+x)^{\frac{1}{x}}$,但不是1^∞,0^0型,故

$$\text{原式} \xlongequal{\text{求导}} \lim_{x \to 0} \left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]'$$

$$= \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2 + x^3}$$

$$= e \lim_{x \to 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2 + x^3}$$

$$\xlongequal{\text{求导}} e \lim_{x \to 0} \frac{1 - \ln(1+x) - 1}{x(2+3x)}$$

$$= -\frac{e}{2}.$$

例 5 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - \int_0^{x^2} \cos(t^2) dt}{\sin^{10} x}$. $(\frac{0}{0})$

解 积分与函数极限联系在一起,也是一类题型.

$$\text{原式} \xlongequal{\text{求导}} \lim_{x \to 0} \frac{2x - 2x\cos x^4}{10\sin^9 x\cos x} \xlongequal{\sin x \text{ 用 } x \text{ 代}} \lim_{x \to 0} \frac{2x(1 - \cos x^4)}{10x^9\cos x}$$

$$\xlongequal{\cos x^4 \text{ 展开}} \lim_{x \to 0} \frac{2x\left\{1 - \left[1 - \frac{1}{2}(x^4)^2\right] + 0(x^8)\right\}}{10x^9\cos x}$$

$$= \frac{1}{10}.$$

下面的例题是已知幂参数的极限的数值,需要求出参数的值.

例 6 求正常数 a 和 b,使

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = 1.$$

解 由于 $bx - \sin x \to 0$(当 $x \to 0$),故

$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt \to 0$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt \xlongequal{\text{求导}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{b-\cos x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}=1$

由 $\sqrt{a+x^2}\to\sqrt{a}>0, x^2\to 0$，故必有

$$\lim_{x\to 0}(b-\cos x)=0, \text{即 } b=1$$

于是，原式左端 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{a}(1-\cos x)}=\frac{2}{\sqrt{a}}=1$，

故 $a=4$.

例 7 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\int_{-\infty}^{c}te^{2t}dt$，求 c.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(1+\frac{2c}{x-c})^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}$，

$$\int_{-\infty}^{c}te^{2t}dt=\frac{1}{2}e^{2t}\left(t-\frac{1}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{c}$$

$$=\frac{1}{2}e^{2c}(c-\frac{1}{2})-\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2t}(t-\frac{1}{2})$$

$$=\frac{1}{2}e^{2c}(c-\frac{1}{2}).$$

因此 $\frac{1}{2}e^{2c}(c-\frac{1}{2})=e^{2c}$，即 $c=\frac{5}{2}$.

例 8 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b\right)=0$，确定 a,b.

解 此题可用洛比塔法则及等价无穷小来解.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+ax+bx^3}{x^3}\xlongequal{\text{求导}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos 3x+a+3bx^2}{3x^2}$，

由 $\lim\limits_{x\to 0}(3\cos 3x+a)=a+3$ 及上述极限的存在性，则必有 $a=-3$. 于是

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos 3x-3+3bx^2}{3x^2}\xlongequal{\text{求导}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-9\sin 3x+6bx}{6x}$

$\xlongequal{\text{求导}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-27\cos 3x+6b}{6}$，

故 $\quad -27+6b=0$,即 $b=\dfrac{9}{2}$.

如用 $\sin 3x=3x-\dfrac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3)$ 代入原式,则

$$原式=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+a}{x^2}+b-\frac{9}{2}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)$$

易得 $3+a=0, b=\dfrac{9}{2}$. 此法显然简单明了.

这种题型也常常用来求函数的渐近线.

例 9 试求函数 $\sqrt{x^2-x+1}$ 的斜渐近线.

解 要求 $y=ax+b$,使 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right]=0$.
首先用等价无穷小来解. 当 $|x|$ 充分大时,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-x+1}&=|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1-x}{x^2}}\\&=|x|\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\end{aligned}$$

因此,对 $x\to+\infty$

$$\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)=x(1-a)+\left(-b-\frac{1}{2}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

故由渐近线性质知:$a=1, b=-\dfrac{1}{2}$.

对 $x\to-\infty$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)&=-x\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{x^2}\right)\\&\quad-ax-b+o\left(\frac{1}{x}\right)\\&=-(1+a)x+\frac{1}{2}-b+o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

所以,$a=-1, b=\dfrac{1}{2}$.

这样得到 $\sqrt{x^2-x+1}$ 的两条渐近线.

如果此题用根号有理化来做,则

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-a^2x^2-2abx-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=0$$

由此得 $a^2=1$，显然 $a\neq-1$，否则

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-b\right)=+\infty.$$

其次，$-1-2ab=0$，即 $b=-\frac{1}{2}$. 这样当 $x\to+\infty$ 时，$\sqrt{x^2-x+1}$ 的斜渐近线为 $x-\frac{1}{2}$. 类似可得当 $x\to-\infty$ 时，$\sqrt{x^2-x+1}$ 的斜渐近线为 $-x+\frac{1}{2}$.

上述两种方法均比较简单，读者可自行体会.

关于洛比塔法则求未定型极限，有时(当然是非常罕见)会遇到下列情形：$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 有极限，但 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 却没有极限. 此时若用洛比塔法则来做，则有可能出错.

例 10 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$. $\left(\frac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)$$

$$=1+0=1.$$

如果使用洛比塔法则，则

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}}=1+0-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在，故洛比塔法则失效.

从上面这个例子可以看出，如果使用洛比塔法则使得原式极