最新 教与学指导丛书

高中数学
题组教学与课堂设计

中央教育科学研究所教育科学技术开发中心 主编

GAOZHONGSHUXUE TIZUJIXUE YU KETANGSHEJI

光明日报出版社

高中数学题组教学与课堂设计

编委会主任　孙现璋

主　　　编　常克峰

副　主　编　项昭义　黄传江

编　　　委　邱永春　黄绪柱　彭新伟　常克峰　常明君

周明良　徐兴明　肖大宏　刘宪文　马法强

商应林　凌启祥　张全修　李树德　苏学朝

审　　　定　高敬宇　王　勇　翟连[illegible]　张巨龄

光　明　日　报　出　版　社

（京）新登字 101 号

内容提要

全书采用“题组教学法”，按教材顺序，将高中数学内容划分成 125 个课时（专题），每一课时按四步进行编写：一、基本知识与基本技能检测；二、基本思想与基本方法总结；三、典型例题；四、课堂练习与作业（各章最后均配有《回顾与小结》）．以上每课时的四部分，构成了以“检查双基，反馈信息——总结方法，确立思想——抓纲举目，培养能力——层次训练，全面提高”为核心的新的教学体系．

全书题目新颖灵活，方法具体实用，“查、补、讲、练”配合得当，为便于教学，全书答案另印成册．

高中数学题组教学与课堂设计
主编　常克峰
光明日报出版社出版发行
（北京永安路 106 号）
邮政编码 100050　电话：3017733—484
新华书店北京发行所经销
河南日报彩印厂印刷
开本 787×1092　1/16　印张 17.6　字数 442 千字
印数 1—10000
1993 年 6 月第一版　1993 年 6 月第一次印刷
ISBN7—88091—130—6/G·595

前　言

近年来，人们越来越重视高三复习工作的总体规划及第一轮教学模式的研究．全国范围内也相继出现了一批异于以往的较为成熟的复习资料，对推动复习工作的健康进行，提高复习效率起到了一定的作用．但令人遗憾的是，这些众多的复习资料都没有重视或突出数学思想与方法的研究，以及课堂教学设计的探讨，众所周知，思想与方法是打开知识大门的钥匙，是数学的灵魂，而设计好一堂课的教学内容、目标与方法又是提高课堂教学质量的关键．

正是基于这一点，我们特邀请常克峰先生任主编组织北京、天津、上海、湖北、江苏、山东、河南等七省市部分重点中学的高三把关老师以“基于课本、源于课本、高于课本”为原则，共同编写了《高中数学题组教学与课堂设计》，为了使本书对教与学具有较高的指导意义，我们又邀请了曾经多次参加过高考命题的有关专家高敬宇、王勇、翟连林、张巨龄四位教授审稿、定稿直至成书．

全书采用数学教学最新科研成果——“题组教学法”，按照教材顺序，将高中数学内容划分成 125 个课时（专题），每一课时按四步进行编写：一、基本知识与基本技能检测；二、基本思想与基本方法总结；三、典型例题；四、课堂练习与作业．以上每课时的四部分构成了以“检查双基，反馈信息——总结方法，确立思想——抓纲举目，培养能力——层次训练，全面提高”为核心的新的教学体系．从而使数学教学从“传授知识”的传统模型转变到了“以激励学习为特征的，以学生为中心”的实践模型；从热衷于无数的常规练习转到了发展有广阔基础的数学能力．

此书，为高三的第一轮复习提供了一种新的教学模式，全书题目新颖灵活，方法具体适用，“查、补、讲、练”配合得当，为便于教学，本书答案另印成册．参加本书编写、核算、校对、初审工作的还有孙培仁、贾国相、王剑刚、张天目、马兰武、胡增斋、袁金鼎、王生斌、王维翰、冯德献、孙运山、连铁山、陈曼莹、王风林、杨克仪、陈振双、徐宪清等同志，但因时间仓促，能力有限，书不当之处在所难免，敬请读者批评指正．

中央教育科学研究所教育科学技术开发中心

一九九三年六月

目　　录

代数部分

第一章　幂函数、指数函数与对数函数

第二章　不等式

第三章　数列、极限、数学归纳法

第四章　复　　数

代数部分

第一章　幂函数、指数函数与对数函数

国家考试大纲要求：

1、理解集合、子集、交集、并集、补集的概念.了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能够掌握有关术语和符号，能正确表示一些较简单的集合.

2、了解映射的概念，在此基础上理解函数及其有关概念，掌握互为反函数的图象间的关系.

3、理解函数的单调性和奇偶性概念，并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象.

4、掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图象和性质，并会解简单的指数方程和对数方程.

§1　集合的概念和基本运算

一　基本知识与基本技能检测

1. 选择题

(1)若 $M=\{$小于 7 的自然数$\}$，$N=\{$质数$\}$，$P=M\cap N$，则 P 的子集个数是(　　)

(A) 6；　(B) 7；　(C) 8；　(D) 16.

(2)集合 $A=\{x|x\neq-1,x\in R\}\cup\{x|x\neq1,x\in R\}$，集合 $B=\{x||x|\neq1,x\in R\}$，则 A 与 B 之间的关系是(　　)

(A)$A=B$；　(B)$A\subset B$；　(C)$A\supset B$；　(D)无法判定.

2. 填空题

(1)当 $x=-1$、0、1 时，函数 $y=x^2+2$ 的值的集合用列举法表示为__________；

(2)非空集合 $M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，对 M 中的任何一个元素 a，都能使得 $(6-a)\in M$，那么符合条件的集合 M 共有__________；

3. 设 $A=\{0,1\}$，且 $B=\{x|\varnothing\subset x\subseteq A\}$，求集合 B 中所含元素的个数；

4. 若 $A=\{x|x=a^2+2a+4,a\in R\}$，$B=\{y|y=b^2-4b+3,b\in R\}$，试确定集合 A,B 的关系；

二　基本思想与基本方法总结

1. 正确理解集合的概念必须掌握集合构成的两个必要条件，即研究对象是具体的，其属性是明确的，二者缺一不可，而所给对象能否构成集合与这些对象是否存在无关.

2. 在判断所给对象能否构成集合时，要特别注意它的“确定性”，在表示一个集合或已知某条件求集合中的元素时，要特别注意应用它的“互异性”及“无序性”(如一中的第 2 题的第(1)小题).

3. 在进行交、并、补的运算中，注意运用 $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$ 或 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$，以及空集$\varnothing$的特性. 若集合中含有参数，须对参数进行分类讨论.

4. 证明两个集合相等的基本而重要方法是“定义法”. 若集合中元素的表达式已给，则只须将这个表达式变形为另一个集合中元素的表达式的形式即为所证(如四中的第 4 题).

5. “数形结合”的思想，贯穿函数的始终，要养成见“数”想“形”，见“形”想“数”的习惯.

三 典型例题

例 1 设全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，子集 A,B 满足条件 $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$，求 $A\cup B$、A、B.

例 2 已知 $M=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$N=\{0,|x|,y\}$，且 M、N 均为三元素集合，试求集合 $C=\{x+y|A=B\}$.

例 3 已知 $f(x)=x^2+ax+b$，$a,b\in R$，$A=\{x|x=f(x),x\in R\}$，$B=\{x|x=f[f(x)],x\in R\}$，若 $a=1,b=2$，求 $A\cup B$，$A\cap B$..

例 4 设 $A=\{x|x^3+2x^2-x-2>0\}$，$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$，求使 $A\cup B=\{x|x+2>0\}$，且 $A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$ 的 a、b 的值.

四 课堂练习与作业

1. 选择题

(1) $x\in A\cap B$ 的否定命题是(　　)

(A) $x\notin B$ 且 $x\notin A$；　　(B) $x\notin A\cup B$；

(C) $x\in A$ 但 $x\notin B$；　　(D) $x\notin A$ 或 $x\notin B$.

(2) 设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in R\}$，$A=\{(x,y)|\dfrac{y-3}{x-2}=1\}$，$B=\{(x,y)|y=x+1\}$，则 $\overline{A}\cap B$ 是(　　).

(A) $\overline{A}$；　(B) B；　(C) $\{(2,3)\}$；　(D) $\varnothing$.

2. 填空题

(1) 如果 $x=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$，$y=3+\sqrt{2}\pi$，集合 $M=\{m|m=a+b\sqrt{2},a\in Q,b\in Q\}$，那么 x，y 与集合 M 的关系是 x ____ M，y ____ M.

(2) 若 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，$C=\{0,2,4,8\}$则满足上述条件的集合 A 为________.

3. 已知集合 $M=\{a,a+d,a+2d\}$，$N=\{a,aq,aq^2\}$，其中 $a\neq 0$ 且 $M=N$，求 q 的值.

4. 设 $m,n,p,q\in Z$，$M=\{x|x=12m+8n\}$，$N=\{x|x=20p+16q\}$，求证：$M=N$.

5. 已知集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，若 $A\cap B\supset\varnothing$ 与 $A\cap C=\varnothing$同时成立，求实数 a 的值.

§2 含参数的集合运算

一 基本知识与基本技能检测

1. 选择题

(1) 若 $M=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$N=\{x|\lg(x+1)<1\}$，则 $\overline{M}\cap N$ 为(　　)

(A) $\{x|x\leqslant -1\}\cup\{x|3\leqslant x<9\}$；　(B) $\{x|-1<x<3\}$；

(C) $\{x|-1<x<9\}$；　(D) $\{x|3\leqslant x<9\}$.

(2) 集合 $M=\{1,3,t\}$，$N=\{t^2-t+1\}$，若 $M\cup N=M$，则 t 的值是(　　)

(A) $t=1$；　(B) $t=2$ 或 $t=-1$；　(C) $t=2$ 或 $t=\pm1$；　(D) 不存在.

2. 填空题

(1) 已知 $I=R$，$A=\{x|x^2-3x+2>0\}$，$B=\{x||x-3|\leqslant 4\}$，那么 $A\cup B=$ ______；$A\cap B=$ ______.

(2) 已知集合 $M=\{x|\frac{x+1}{2}\in N\}$，$P=\{x|x=3k,k\in N\}$，$I=N$，则 $\overline{M}\cap P=$ ______.

3. 方程 $x^2-px-q=0$ 的解集为 A，方程 $x^2+qx-p=0$ 的解集为 B. 若 $A\cap B=\{1\}$，求 $A\cup B$.

4. 已知 $A=\{(x,y)|y=-x+m\}$，$B=\{(x,y)|y=-\sqrt{-x^2-2x}\}$，$A\cap B$ 中有两个元素，求常数 m 的取值范围.

二 基本思想与基本方法总结

1. 在集合运算中必须注意组成集合的元素应具有的性质(如一中的第1题的第(2)小题).

2. 若集合中的元素是用坐标形式表示的，要立即想到满足条件的点所构成的图形是什么，画出草图，利用几何知识解答(如一中的第4题).

3. 有些数学问题，由于前提条件不同，导致结论不同，因此必须根据不同的条件分类讨论. 这种讨论必须是既不重复又不遗漏的。

4. 由于集合思想渗透于中学数学内容的各个方面，方程、不等式、曲线、平面区域等有关知识都可以用集合来表述，因此进行集合运算时，必须正确理解用集合语言表述内容广泛的各种数学问题，并综合运用有关的数学知识求解问题.

三 典型例题

例1　设全集 $I=\{2,3,a^2+6a+13\}$，$A=\{|a-1|,2\}$，$\overline{A}=5$，求 a 的值.

例2　已知集合 $A=\{x|10+3x-x^2\geqslant 0\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，当 $A\cap B=\varnothing$ 时求 m 的取值范围.

例 3 已知 $A=\{x|x^2+(m+2)x+1=0,x\in R\}$，若 $A\cap R^+=\varnothing$，求 m 的取值范围.

例 4 对于点集 $A=\{(x,y)|x=m,y=-3x+2,m\in N\}$，$B=\{(x,y)|x=n,y=a(x^2-x+1)$，
$n\in N\}$是否存在非零整数 a，使得 $A\cap B\neq\varnothing$.

四 课堂作业与练习

1. 选择题

(1) 设 S,T 是两个非空集合，且 $S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，令 $M=S\cap T$，则下列关系式正确的是 ( )

(A) $S\cup M=T$； (B) $T\cup M=S$； (C) $S\cup M=M$； (D) $S\cup M=S$.

(2) 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|ax-4=0\}$且 $B\subseteq A$，则 a 的值的集合为 ( )

(A) $\{0,2\}$； (B) $\{0,2,4\}$； (C) $\{2,4\}$； (D) $\{0,4\}$.

2. 填空题：

(1) 已知 $A=\{x|x=2k+1,k\in Z\}$，$B=\{x|x=k+3,k\in Z\}$，则 $A\cap B=$__________，$A\cup B=$__________.

(2) 已知 $A=\{x|\log_3 x>1\}$，$B=\{x|\frac{x}{x-3}<0\}$，$C=\{x|(\frac{1}{2})^x>2\}$，则 $A\cap B\cap C=$__________.

3. 设全集 $I=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 9\}$，集合 $M=\{(x,y)||x|<1,|y|\leqslant 2\}$，$N=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 5\}$，求 $M\cap\overline{N}$.

4. 已知 $M=\{(x,y)|x^2+2x+y^2\leqslant 0\}$，$N=\{(x,y)|x+a-y\leqslant 0\}$，且 $M\cap N=M$，求 a 的取值范围.

5. 设 S 为满足下列两个条件的实数所构成的集合：(Ⅰ)S 内不含 1；(Ⅱ)若 $a\in S$，则 $\frac{1}{1-a}\in S$.

(1)若 $2\in S$，则 S 中必存在其它两个数，求出这两个数；

(2)求证：若 $a\in S$，则 $1-\frac{1}{a}\in S$；

(3)在集合 S 中，元素的个数能否只有一个？为什么？

§3　映射与函数

一　基本知识与基本技能检测

1. 看图 1—1 回答：下列各图中 $A \to B$ 的对应关系是 f，其中哪些是映射？哪些不是映射？为什么？

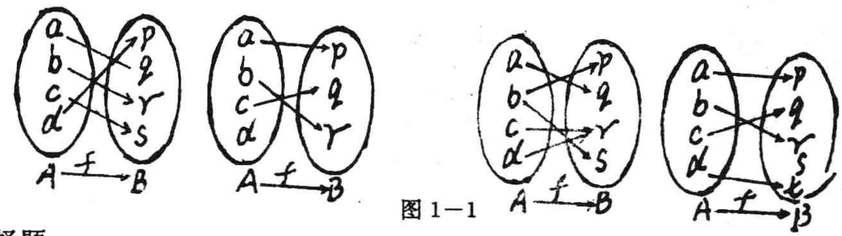

图 1—1

2、选择题：

(1)　下列哪一个对应是从集合 P 到集合 S 的一个映射？(　　)

(A)　$P=\{$数轴上的点$\}$，$S=\{$有理数$\}$，对应关系是数轴上的点→有理数.

(B)　$P=\{$有理数$\}$，$S=\{$数轴上的点$\}$，f：有理数→数轴上的点.

(C)$x\in P=R, y\in S=R^+$，对应法则：$|x|\to y$.

(D)$x\in P=R^+, y\in S=R^+$，对应法则：$x^2\to y$.

(2)　下列映射 $f:A\to B$ 为一一映射的是(　　)

(A)$A=\{x|x\in N\}, B=\{y|y\in N\}, f: y=x^2+1$；

(B)$A=\{x|x\in N\}, B=\{y|y\in N\}, f: y=x+1$；

(C)　$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}, B=\{y|-1\leqslant y\leqslant 1\}, f: y=\sin x$；

(D)　$A=\{x|x\in R\}, B=\{y|y\in R\}, f: y=x^2-1$.

(3)　下列说法正确的是(　　)

(A)　对于任意两个无限集合 A、B，一定不能建立一个从 A 到 B 的映射；

(B)　若集合 A 中只有一个元素时，B 为任意非空集合，则从 A 到 B 只能建立一个映射；

(C)　对于任意两个集合 A、B，都可以建立一个从 A 到 B 的映射；

(D)　集合 A 中有两个元素，集合 B 中有三个元素，则从 A 到 B 能建立 9 个不同映射.

3. 已知一次函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=0, f(2)=\frac{3}{5}$，求：$f(6)$.

二　基本思想和基本方法总结

1. 对于映射，如果集合 A 叫做起始集，集合 B 叫做终止集，起始集中元素的任意性和终止集中元素的唯一性是构成映射的核心. 因此映射中的对应法则可以是"一对一"或"多对一"，而不能是"一对多"或"一对无". 并且要注意集合 A 到集合 B 的映射不唯一.

2. 函数被定义为一类特殊映射即满足下列条件的映射 $f:A\longrightarrow B$.

(1)　集合 A、B 都是实数集的非空子集；(2)　B 中每一元素在 A 中都有原象. 这样的映射 $f:A\longrightarrow B$ 称为定义域 A 到值域 B 上的函数，记作 $y=f(x)$.

3. 两个函数，如果它们的定义域不同或定义域相同，对应法则不同而使值域不同，那么这两个函数是不同的. 如果两函数定义域相同且它们的对应法则能使同一个自变量的值对应同一个确定的函数值，不论对应法则在形式上是否相同，那么都认为它们是同一函数.

4. 作含绝对值符号的函数的图象时，首先应将其转化为分段函数的形式，再分别作出各段函数的图象即可.

5. 如果 y 是 u 的函数，而 u 又是 x 的函数，即 $y=f(u), u=g(x), x\in(a,b), u\in(m,n)$，那

么 y 关于 x 的函数 $y=f[g(x)]$，$x\in(a,b)$ 叫做 f 和 g 的复合函数，u 叫做中间变量，y 的定义域是 $g(x)$ 的值域.

三　典型例题

例 1　如图 1－2 指出下列各对应，哪些是映射？哪些是一一映射？对一一映射求出其逆映射，并画图表示其对应关系.

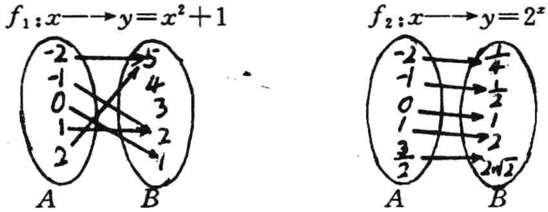

图 1－2

例 2　作下列函数的图象：(1)　$y=\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}-\log_2(x-\frac{1}{2})$；

(2)　$y=\sqrt{(x-1)^2}+\frac{|x|}{x}$.

例 3　已知 $f(x)=2x+a$，$g(x)=\frac{1}{4}(x^2+3)$，若 $g[f(x)]=x^2+x+1$，求 a 的值.

例 4　已知扇形的周长为 20cm.(1)　试用扇形半径(x)表示其面积(y)；

(2)　当中心角 θ 为何值时，扇形所卷成的圆锥的侧面积最大？其最大值是多少？

四　课堂练习与作业

1. 选择题

(1)　下列四组函数中表示同一函数的是(　　)

(A)　$y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$；　　(B)　$y=\sin x\cdot \mathrm{ctg} x$ 与 $y=\mathrm{con} x$；

(C)　$y=\arcsin(\sin x)$ 与 $y=x$；　　(D)　$y=(a^{2x})^{\frac{1}{2}}$ 与 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$.

(2)　已知 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant2\}$，$B=\{y|0\leqslant y\leqslant1\}$，下列从 A 到 B 对应关系 f 不是映射的是(　　)

(A) $f:x\to y=\frac{1}{2}x$；(B) $f:x\longrightarrow y=\frac{1}{3}x$；(C) $f:x\to y=(x-2)^2$；(D) $f:x\to y=\frac{1}{4}x^2$

2. 填空题

(1)　若 $f(x)=x^2-mx+n$，$f(n)=m$，$f(1)=-1$，则 $f(4)=$__________.

(2)　若点 (x,y) 在映射 f 作用下的象是 $(2x+y,x-2y)$，则点 $(2,3)$ 在 f^{-1} 作用下的象是__________.

3. 已知：

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x>0)\\ -e & (x=0)\\ x^2+1 & (x<0)\end{cases}\qquad 求：f\{f[f(\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}{2})]\}.$$

4. 已知实函数 $f(x)$ 满足下列两个条件，对于任意实数 a,b 有

(1)　$f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$；　(2)　$f(4)=16$，求 $f(0)$ 和 $f(1)$.

5. 作出函数 $y=|x-1|+2|x-2|$ 的图象.

§4　函数的定义域

一　基本知识与基本技能检测

1. 选择题

(1)　函数 $y=\dfrac{2}{x-\sqrt{x^2}}$ 的定义域为(　　)

(A)　$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$；　　(B)　$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

(C)　$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$；　　(D)　$(-\infty,0)$.

(2)　函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-2,2]$，则函数 $f(x^2-1)$ 的定义域是(　　)

(A) $-3\leqslant x\leqslant 3$；　(B) $0\leqslant x\leqslant 3$；　(C) $0\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$；　(D) $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$

2. 填空题

(1)函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{|x|-1}$ 的定义域是__________.

(2)已知函数 $y=f(\lg x)$ 的定义域是 $[10^{-1},100]$，则函数 $f(\dfrac{x}{2})$ 的定义域是__________.

3. 求函数 $y=\lg(3-x)+\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{x+1}$ 的定义域.

4. 求函数 $y=\log_a(a^x-1)(a>0,a\neq 1)$ 的定义域.

二　基本思想与基本方法总结

1. 求函数 $y=f(x)$ 的定义域，若对 x 未加任何限制，那么求出使 $f(x)$ 有意义的实数 x 的集合，即为该函数的定义域，若是实际问题，则应考虑变量的实际意义.

2. 常见初等函数的定义域求法

(1)　对于 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 应有 $g(x)\neq 0$；(2)　对于 $y=\sqrt[2k]{f(x)}$（k 为自然数）应有 $f(x)\geqslant 0$；

(3)　对于 $y=\log_a[f(x)](a>0,a\neq 1)$，应有 $f(x)>0$；

(4)　$f_1(x)$，　$f_2(x)$ 定义域分别为 D_1、D_2，　则函数 $f_1(x)\pm f_2(x)$ 或 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 定义域都为 $D_1\cap D_2$；

(5)　已知 $y=f[g(x)]$，若有 $y=f(u)$，定义域为 D_1，$u=g(x)$ 定义域为 D_2，一方面应有 $x\in D_2$，另一方面有 $g(x)\in D_1$，所以 $y=f[g(x)]$ 的定义域是 $D=\{x|x\in D_2$，且 $g(x)\in D_1\}$.

3. 对于含有参数的函数求其定义域，或已知定义域求字母参数的取值范围，必须对字母参数作分类讨论.

三　典型例题

例 1　求函数 $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$ 的定义域.

例 2 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$ 求下列函数的定义域.

(1) $f(x^2)$； (2) $f(2x-5)$； (3) $f(\sin x)$.

例 3 已知函数 $f(x^2-3)=\lg \dfrac{x^2}{x^2-6}$，求 $f(x)$ 的定义域.

例 4 求函数 $f(x)=\ln(a^x-k\cdot 2^x)(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的定义域.

四 课堂练习与作业

1. 选择题

(1) 若函数 $f(x)=3^x+5$，则 $f^{-1}(x)$ 的定义域是（ ）

(A) $(0,+\infty)$； (B) $(5,+\infty)$； (C) $(6,+\infty)$； (D) $(-\infty,+\infty)$.

(2) 函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则函数 $f(x+a)+f(x-a)(-\frac{1}{2}<a<0)$ 的定义域是（ ）

(A) $[0,1]$； (B) $[a,1-a]$； (C) $[-a,1+a]$； (D) $[1+a,1-a]$

2. 填空题

(1) 设全集 $I=R$，函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\lg(\sqrt{2}-x)}$ 的定义域是 A，则 $\overline{A}=$__________；

(2) 函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域是__________.

3. 函数 $y=\log_2(ax^2+3x+a)$ 的定义域是实数集 R，求 a 的取值范围.

4. 求 $y=\sqrt{\log_a(-x^2-x)}\,(a>0,a\neq 1)$ 的定义域.

5. $f(x)=a^x(x>0,a>0$ 且 $a\neq 1)$ 又 $f(2\log_a x)<\log_a f(x)$，求 x 的取值范围.

§5　函数的值域

一　基本知识与基本技能检测

1. 选择题

(1)　若 $\sqrt{x}$ 为实数，则函数 $y=x^2+3x-5$ 的值域是(　　)

(A)　$(-\infty,+\infty)$；　(B)　$[0,+\infty)$；　(C)　$[-7,+\infty)$；　(D)　$[-5,+\infty)$.

(2)　函数 $f(x)=\sqrt{2x^2+1}-x$ 的值域是(　　)

(A)　$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$；　　(B)　$(-\infty,\frac{\sqrt{2}}{2}]$；

(C)　$[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$；　　(D)　$[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

2. 填空题

(1)函数 $y=1-\frac{5}{2^x+1}$ 的值域是__________；

(2)函数 $f(x)=\sqrt{3x^2-x^4}\,(x>0)$ 的值域是__________；

(3)若 $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$，则 $f^{-1}(x)$ 的值域是__________.

3. 求函数 $y=\frac{x+1}{x+2}$ 的值域.

4. 求函数 $y=\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}$ 的值域.

二　基本思想与基本方法总结

1. 函数的值域由定义域和对应法则确定，所以在研究函数值域时，一方面要重视对应法则的作用，另一方面要特别注意定义域对值域的限制.

2. 求函数值域的几种常用方法：

(1)观察法：例如 $y=a+\sqrt{bx+c}$(a,b,c 为常数，且 $b\neq0$ 时，值域为 $\{y|y\geqslant a\}$；

(2)反函数法：当函数的反函数存在时，则反函数定义域是原函数的值域；

(3)函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}(c\neq0)$ 的值域是 $y\in R$，且 $y\neq\frac{a}{c}$(亦可用反函数法求).

(4)判别式法：把函数关系式转化为关于 x 的二次方程 $F(x,y)=0$，由于方程有实数解，(函数的定义域为 R 时)，故判别式大于等于零，从而求得函数 y 的值域. 一般适用于 $y=\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ 及 $y=ax+b\pm\sqrt{cx^2+dx+e}$ 形式的函数.(注意转换后的关于 x 的二次项系数不等于零，如一中的第 4 题).

(5)某些无理函数的值域常用换元法求解.

(6)最值法：对于闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $y=f(x)$ 可求出函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的极值并与边界值 $f(a)$，$f(b)$ 比较求出函数的最值，从而得到函数的值域.

(7)形数结合法：可利用几何图形确定函数的值域.

(8)配方法是求二次函数值域的基本方法.

三　典型例题

例 1　求下列函数的值域：

(1)$y=-x-2\sqrt{x^2+3x+4}$；　　(2)$y=2x-5+\sqrt{15-4x}$.

例 2　若函数 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+1$ 的定义域和值域都是$[1,b](b>1)$，求 b 的值.

例 3　求函数 $y=\frac{1+\sqrt{5}\sin x}{2+\cos x}$的值域.

例 4　已知 $f(x)$的值域是$[\frac{3}{8},\frac{4}{9}]$，试求函数 $y=g(x)=f(x)+\sqrt{1-2f(x)}$的值域.

四　课堂练习与作业

1. 选择题

(1)函数 $y=2-\sqrt{-x^2+4x}$，$x\in[0,4]$的值域是(　　)

(A)　$[-2,2]$；　(B)$[1,2]$；　(C)$[0,2]$；　(D)$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

(2)函数 $y=x+\sqrt{1-2x}$的值域是(　　)

(A)$y\geqslant\frac{1}{2}$；　(B)$0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$；　(C)$y\leqslant1$；　(D)$0\leqslant y\leqslant1$.

2. 填空题

(1)函数 $y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}$的值域是__________；

(2)函数 $y=1-\lg(e^x+e^{-x})$的值域是__________.

3. 求函数 $y=-2x^2-8x-7$，$x\in[-5,5]$的值域.

4. 求函数 $y=\log_2 x+\log_x 2x$ 的值域.

5. 求函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$的值域.

6. 已知函数 $y=\frac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$的值域是$\{y|1\leqslant y\leqslant9\}$，求 a,b 的值.