乐训®AP课程指定辅导教程

AP微积分

AP Calculus AB&BC

主编：陈江辉　蒋正浩

◆ 无缝对接国内大学课程，轻松入门
◆ 涵盖全部AP微积分考点，高效学习
◆ 历年经典考题精选精讲，助力5分

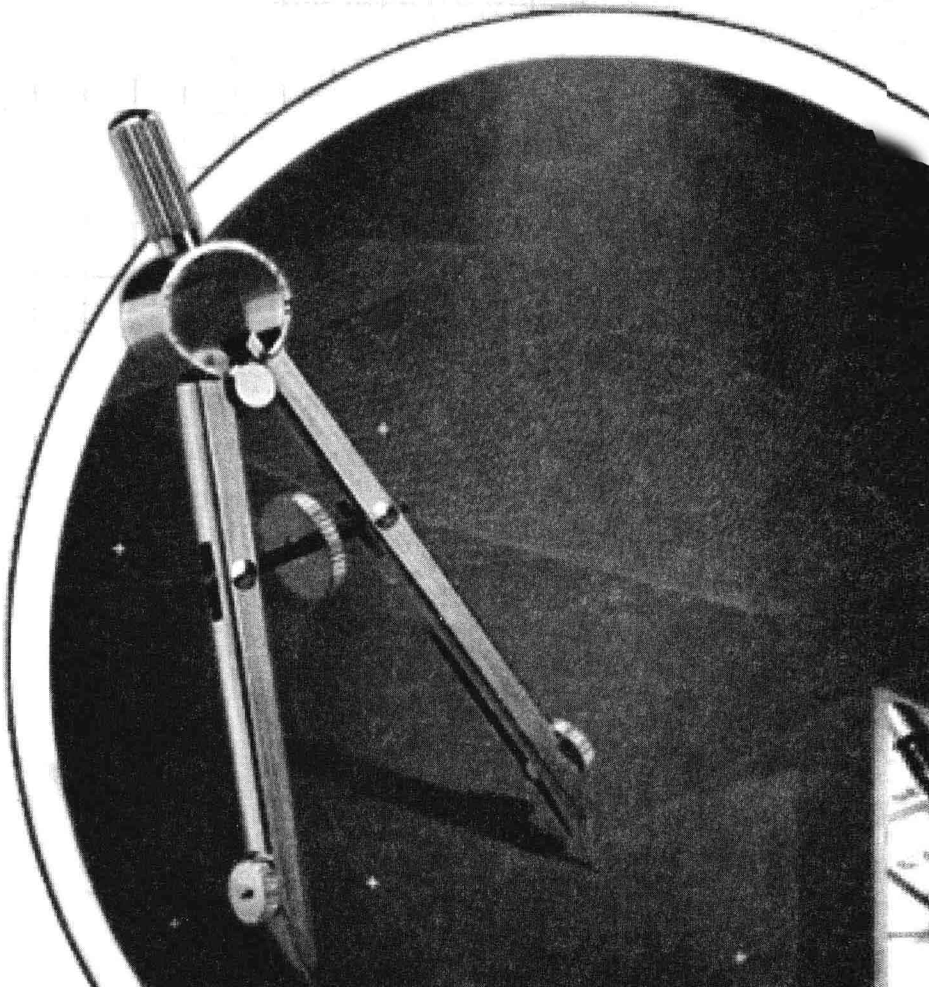
南京大学出版社

乐训®AP课程指定辅导教程

AP微积分

AP Calculus AB&BC

主编：陈江辉 蒋正浩



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

AP 微积分 / 陈江辉，蒋正浩主编. 一 南京 ：南京大学出版社，2012. 11

AP 考试系列教程

ISBN 978 - 7 - 305 - 10709 - 2

Ⅰ. ①A… Ⅱ. ①陈… ②蒋… Ⅲ. ①微积分一高等学校一入学考试一美国一教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 242962 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　　编 210093
网　　址 http://www. NjupCo. com
出 版 人 左　健

丛 书 名 AP 考试系列教程
书　　名 AP 微积分
主　　编 陈江辉　蒋正浩
责任编辑 耿士祥　董　颖　　编辑热线 025 - 83592655

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 盐城市华光印刷厂
开　　本 850×1168 1/16　印张 12. 25　字数 320 千
版　　次 2012 年 11 月第 1 版　2012 年 11 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 305 - 10709 - 2
定　　价 45. 00 元

发行热线 025 - 83594756　83686452
电子邮箱 Press@NjupCo. com
　　　　 Sales@NjupCo. com(市场部)

乐训AP课程辅导教材编写委员会

主　任：　赵峥涞

委　员：　（按姓氏笔画为序）

于允锋　王　洋　田　间　田　伟

吕林海　张景彪　张玉慧　李世良

吴兰德　陈江辉　钟　伟　赵春铭

桂　丽　耿　强　曹庆琪　蒋正浩

Chad Flanders　Ababa Babelyn Malate

Lapierre Marcel Gerard

序

AP是美国大学先修课程“Advanced Placement”的缩写；AP考试是由美国大学理事会(College Board)主办的全球性统一考试；AP教育则是一种国际通用的学分认证课程体系，其目的是让一些学有余力的高中生能够先行修读大学的基础课程，从而使这些优秀学生能够在进入大学之后免修这些课程，节省出更多的时间和精力去挑战其他更感兴趣的课程。此外，合格的AP考试成绩也往往是进入世界名校更有力的筹码。事实上，由于AP课程的学术性与大学低年级阶段相同课程的要求是同样的，所以在北美乃至世界其他国家的大学招生过程中，AP考试成绩通常被作为衡量学生学习能力的重要标准之一。

近年来，随着我国高等教育国际化和全球化趋势的快速发展，越来越多的高中生致力于赴北美及欧洲名校深造，越来越多的中国家长愿意把孩子送出国门，去国外接受高等教育，及早培养孩子的国际视野，为今后参与全球化社会的竞争打下坚实的基础。在此背景下，AP课程在中国也逐渐引起学校、家长和学生的更多关注。美国AP教育模式在规定统一标准性的同时，又具有极大的灵活性。一方面，每年的AP课程考试是全球统一的，合格标准是不变的，因此保证了课程所内蕴的学术性内涵；另一方面，课程教材、教学体系、教学方法、课堂评价等各种具体的课程教学活动却又是可以自行设计、因地制宜的。那么，如何设计出适合中国学生认知特点、符合中国学生文化背景、但又不失学术水准的高质量AP课程与教材，就成为了当前亟待解决的重要问题之一。

然而，AP教育在中国尚无先例，目前我国高等教育与中等教育的衔接问题还没有形成制度性的改革行动。其中跨文化教育问题更需要教育研究者和实践者共同努力和探索。乐训文教基金会长期致力于宣传、推广和实施AP课程，并在AP课程、教材、教学的本土化上做了大量的探索。近年来，每年有众多学生通过乐训文教基金会接受了AP教育，并由此成功地踏上欧美名校的求学之路。考虑到今后AP课程的更高质量的可持续发展，乐训文教基金会开始与南京大学教师和中学教师合作，进行相关课程和教材的开发工作。我们希望，也相信乐训文教基金会能把这项工作做好，让AP课程在中国大地上能不断结出丰硕的果实；我们也愿意与乐训一起，在进行美国框架下的AP课程开发的同时，对我国自己的AP课程进行研究，探索我国高等教育与中等教育衔接的课程模式。

总体而言，已经出版的系列教材，紧扣AP考试大纲，能够根据高中生的认知与情意特点，使用浅显易懂的语言和生动的案例来讲解抽象的学术理论。而且，教材采取中英文结合的编写方式，既考虑中国学生的学习习惯和基础，又适当地引入英文语境。例如在“重要名词解释”和大多数图表和习题中都采用英文表述。

南京大学教育研究院与美国乐训文教基金会的合作既是高等教育国际化的产物，也是教育研究为社会服务的初步尝试。我们认为，与美国乐训文教基金会的合作可以提高我们对高等教育与中等教育衔接问题的研究水平，提升我们国际化人才培养模式的水平，促进我们的研究工作更好地与社会需求接轨，进一步转变我们的学术研究范式，提高教育研究的实用性。我们希望通过我们的真诚合作能够为推进中国教育改革与发展做一点贡献。

南京大学教育研究院　张红霞

2012-10-8

AP考试系列教材

Contents 目录

Chapter 1 Function 函数

章节要点：

作为 AP 微积分的预备章节，本章主要介绍函数的有关知识，重点讲解多项式函数，三角函数，指数对数函数，参变量函数以及函数的反函数，函数复合，图像变换等. 在学习本章时，要注重理解每种函数的特性，熟练掌握相关计算技巧，为后面的学习做好准备.

1. 多项式函数
2. 反函数
3. 参变量函数
4. 极坐标函数
5. 复合函数
6. 函数图像变换

1.1 Polynomial Functions 多项式函数

1.1.1 Definition 多项式函数的定义

多个幂函数进行加减运算即得到多项式函数，认为：

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

这里 n 是确定的自然数，$a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1,a_0$ 是常数且 $a_n\neq 0$.

当 $n=1$ 时，$f(x)=kx+b(k\neq 0)$是一次函数；

当 $n=2$ 时，$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$是二次函数；

当 $n=3$ 时，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$是三次函数.

例如，$f(x)=x^5-x^2+1$，$g(x)=-6x^3+(x+1)(2x-1)$，$n(x)=-3$ 等都是有理数域上的多项式函数；$f(x)=\sqrt{3}x^6-\pi x^3+3x^2+\cos 15°$，$g(x)=(\pi x+\sqrt{3})^3+3.01$ 等是实数域上的多项式函数；$f(x)=\sqrt{2}x^4-\mathrm{i}x^3+\mathrm{i}$，$g(x)=(2\mathrm{i}x-1)^n$ 等是复数域上的多项式函数. 而 $f(x)=\frac{1}{3-x}$，$g(x)=x-\sqrt{x}+3$，$n(x)=2+\ln x-\sin x$ 等都不是多项式函数.

1.1.2 Division of Polynomial Functions 带余除法与综合除法

我们知道，两个多项式函数的和、差、积仍然是多项式函数，并且加法、乘法运算满足交换律和结合律，乘法对加法满足分配律. 但是，除法却不是总可以实施的. 一个多项式函数 $f(x)$不能被另一个多项式函数 $g(x)$整除时，可以用类似于整数的带余除法那样进行除法运算.

Example 1 设 $f(x)=3x^3+2x^2-5x-1$，$g(x)=x^2-3x-1$，求用 $g(x)$除 $f(x)$的商式和余式.

Solution
$$
\begin{array}{r}
3x+11 \\
x^2-3x-1\,\overline{)\,3x^3+2x^2-5x-1} \\
3x^3-9x^2-3x \\
\hline
11x^2-2x-1 \\
11x^2-33x-11 \\
\hline
31x+10
\end{array}
$$

所以，$g(x)$除 $f(x)$的商式为 $q(x)=3x+11$，余式为 $r(x)=31x+10$.

这个结果也可以写成：$3x^3+2x^2-5x-1=(x^2-3x-1)(3x+11)+(31x+10)$.

对于任意的两个多项式函数 $f(x)$，$g(x)$（$g(x)\neq 0$），总存在唯一的两个多项式函数 $q(x)$与 $r(x)$，使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x).$$

其中 $q(x)$叫做商式，$r(x)$叫做余式. 这种求商式和余式的方法叫做带余除法.

下面介绍一种计算除式是一次式的多项式除法的简便方法——综合除法.

先考察 $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 除以 $x-b$ 的运算过程：

$$
\begin{array}{l}
a_3x^2+(a_2+a_3b)x+[a_1+(a_2+a_3b)b] \\
x-b\,\overline{)\,a_3x^3 \quad +a_2x^2 \quad\quad a_1x \quad\quad +a_0} \\
a_3x^3 \quad -a_3bx^2 \\
\hline
(a_2+a_3b)x^2 \quad +a_1x \\
(a_2+a_3b)x^2-(a_2+a_3b)bx \\
\hline
[a_1+(a_2+a_3b)]x \quad\quad +a_0 \\
[a_1+(a_2+a_3b)]x-[a_1+(a_2+a_3b)b] \\
\hline
a_0+[a_1+(a_2+a_3b)b]
\end{array}
$$

这里，被除式要按 x 的降幂排列，运算的过程实际上主要是对多项式各项的系数进行运算，所得的商式也是按 x 的降幂排列的. 由于除式是一次式，所以余式是零次式或零. 注意以上除法算式中商式各项的系数以及余式依次是

$$
\begin{aligned}
&a_3,\\
&a_2+a_3b,\\
&a_1+(a_2+a_3b)b,\\
&a_0+[a_1+(a_2+a_3b)b]b.
\end{aligned}
$$

其中，第一个就是被除式中第一项的系数 a_3，把这个数乘以 b 再加上被除式中第二项的系数就得到第二个数 a_2+a_3b，把这个数乘以 b 再加上被除式中第三项的系数就得到第三个数$a_1+(a_2+a_3b)b$，依次类推，最后便得到余式 $a_0+[a_1+(a_2+a_3b)b]b$.

根据这样的规律，上面的除法可以用下面的简便算式进行：

$$
\begin{array}{cccc|c}
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & b \\
 & a_3b & (a_2+a_3b)b & [a_1+(a_2+a_3b)b]b & \\
\hline
a_3 & a_2+a_3b & a_1+(a_2+a_3b)b & \multicolumn{1}{|c}{a_0+[a_1+(a_2+a_3b)b]b} &
\end{array}
$$

运算过程是这样的，首先将被除式按变元降幂排列各项的系数（缺少的项必须补上系数零）a_3，a_2，a_1，a_0 依次写在第一行上，在竖线的右边写上除式 $x-b$ 中的常数项的相反数 b，然后把第一个数 a_3 移至横线下面作为第三行的第一个数；把它乘以 b 后写在 a_2 的下面，把它与 a_2 相加，其和写在横线下面作为第三行的第二个数；再把这个数乘以 b 后写在 a_1 的下面，把它与 a_1 相加，其和写在横线下面作为第三行的第三个数……这样依次得到的第三行的数就是商式各项的系数以及余式. 这种只

对系数进行运算的多项式叫做综合除法.

Example 2 用综合除法计算：

(1) $(3x^4-5x^3-10x^2-24)\div(x-3)$；

(2) $(4x^4-6x^3+2x^2-2x-1)\div(2x+1)$.

Solution (1) 被除式中缺一次项，应补上 $0x$ 运算一次，

$$\begin{array}{ccccc|c}
3 & -5 & -10 & +0 & -24 & 3 \\
 & +9 & +12 & +6 & +18 & \\
\hline
3 & +4 & +2 & +6 & \multicolumn{1}{|c}{-6} &
\end{array}$$

所以，商式是 $q(x)=3x^3+4x^2+2x+6$，余式是 $r(x)=-6$.

(2) 除式 $2x+1$，即 $2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$，先计算除以 $x+\dfrac{1}{2}$，可以看作 $x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

$$\begin{array}{ccccc|c}
4 & -6 & +2 & -2 & -1 & -\dfrac{1}{2} \\
 & -2 & +4 & -3 & +\dfrac{5}{2} & \\
\hline
4 & -8 & +6 & -5 & \multicolumn{1}{|c}{+\dfrac{3}{2}} &
\end{array}$$

所以 $4x^4-6x^3+2x^2-2x-1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(4x^3-8x^2+6x-5)+\dfrac{3}{2}$

$$=(2x+1)\left(2x^3-4x^2+3x-\frac{5}{2}\right)+\frac{3}{2}.$$

所以，商式是 $q(x)=2x^3-4x^2+3x-\dfrac{5}{2}$，余式是 $r(x)=\dfrac{3}{2}$.

对于除式是一次式的综合除法，在应用时要注意以下几点：

1. 被除式应按 x 的降幂排列，第一行依次写下各项系数，如有缺项，要将该项的系数添零写上；
2. 将除式写成 $x-b$ 的形式，并把 b 写在第一行竖线的右边；
3. 如除式是 $ax-b(a\neq0)$ 的形式，因为 $ax-b=a\left(x-\dfrac{b}{a}\right)$，所以先计算除式 $x-\dfrac{b}{a}$ 所得的商式及余式，再把所得的商式除以 a 作为所求到的商式，而余式不变.

练 习

1. 求 $f(x)$ 被 $g(x)$ 除得的商式和余式.

(1) $f(x)=3x^4-17x^3-13x^2+37x+30$，$g(x)=x^2-5x-6$；

(2) $f(x)=x^7-1$，$g(x)=x^3+x+1$.

2. 用综合除法计算：

(1) $(x^5-4x^3-6)\div(x-2)$；

(2) $(3x^4+7x^3-15x-20)\div(x+2)$；

(3) $(2x^4+3x^3+4x^2+5x+1)\div(2x-1)$；

(4) $(16x^4+81)\div(2x+3)$.

1.1.3 Remainder Theorem and Factor Theorem 余数定理与因式定理

回顾 1.1.2 中例 2 的第(1)小题，$f(x)=3x^4-5x^3-10x^2-24$ 除以 $g(x)=x-3$ 的商式是 $q(x)=3x^3+4x^2+2x+6$，余式(即余数)是 $r(x)=-6$，亦即 $f(x)=(x-3)q(x)-6$，所以 $f(3)=-6$. 那么 $f(3)$ 的值与余数 -6 相等是偶然的巧合，还是其中有必然的联系？

设一元多项函数 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的商式是 $q(x)$，余数是 r，则有

$$f(x)=(x-a)q(x)+r.$$

当 $x=a$ 时，可得 $f(a)=r$.

这样，我们得到了**余数定理**：

一元多项式函数 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的余数为 $f(a)$.

根据余数定理，我们可以通过 $f(a)$ 求 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的余数 r，也可以通过求 r 来求 $f(a)$.

Example 1 设 $f(x)=2x^7-6x+1$，求 $f(x)$ 除以 $x+1$ 所得的余数 r.

Solution 根据余数定理，有

$$r=f(-1)=2\times(-1)^7-6\times(-1)+1=5.$$

Example 2 设 $f(x)=3x^4-12x^3-21x^2+16x+69$，求 $f(5)$.

Solution 用综合除法求 $f(x)$ 除以 $x-5$ 的余数 r.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3 & -12 & -21 & 16 & 69 & 5 \\
 & +15 & +15 & -30 & -70 & \\
\hline
3 & +3 & -6 & -14 & \boxed{-1} &
\end{array}$$

所以 $r=-1$，根据余数定理，有 $f(5)=-1$.

从余数定理可以推出**因式定理**：

一元多项式函数 $f(x)$ 有一个因式 $x-a$ 的充要条件是 $f(a)=0$.

Example 3 判断 $f(x)=x^5+6x^4-5x^3-7x^2+2$ 是否有因式 $x-1$.

Solution 因为 $f(1)=1^5+6\times1^4-5\times1^3-7\times1^2+2=-3\neq0$，根据因式定理，$f(x)$ 没有因式 $x-1$.

Example 4 把 $f(x)=x^3+3x^2-4x-12$ 分解因式.

Solution $f(x)$ 可能出现 $x-a$ 这样的因式有 $x\pm1$，$x\pm2$，$x\pm3$，$x\pm4$，$x\pm6$，$x\pm12$. 因为 $f(1)=-12\neq0$，$f(-1)=-6\neq0$，所以 $x+1$，$x-1$ 都不是 $f(x)$ 的因式.

又

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +3 & -4 & -12 & 2 \\
 & +2 & +10 & +12 & \\
\hline
1 & +5 & +6 & \boxed{0} &
\end{array}$$

可知 $x-2$ 是 $f(x)$ 的因式，所以

$$f(x)=(x-2)(x^2+5x+6).$$

故 $f(x)=(x-2)(x+2)(x+3)$.

练　习

1. 求证：

(1) $x^4-8x^3-6x^2+9x+6$ 能被 $x+1$ 整除；

(2) $(x-1)^5-1$ 有因式 $x-2$.

2. 解答下列各题：

(1) k 取什么数时，多项式 $3x^3+kx^2-20x-4$ 能被 $x-2$ 整除？

(2) $a-b$ 取什么数时，多项式 $x^4+ax^3+2x^2+bx-2$ 能被 x^2-x-6 整除？

3. 已知 $f(x)=2x^5-5x^4+6x^2-7x-10$. 求：

(1) $f(x)$除以 $x-1$ 所得的余数；

(2) $f(-3)$、$f(6)$.

1.1.4 Partial Fraction 待定系数法与部分分式

待定系数法是一种重要的数学方法，它在因式分解，化部分分式以及在某些特定条件下求函数式、解方程等方面都起到一定的作用.

下面先看两个例子：

Example 1　当 a，b 为何值时，多项式 x^3+4x^2+ax+b 能被 x^2+x-1 整除？并求商式.

Solution　因为被除式是 x 的三项式，除式是 x 的二项式，所以商式必定是 x 的一项式.

设商式为 $x+c$，则 $x^2+4x^2+ax+b=(x^2+x-1)(x+c)$，

即 $x^3+4x^2+ax+b=x^3+(c+1)x^2+(c-1)x-c$.

根据多项式恒等定理，得到方程组

$$\begin{cases} c+1=4, \\ c-1=a, \\ -c=b. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=2, \\ b=-3, \\ c=3. \end{cases}$$

所以当 $a=2$，$b=-3$ 时，多项式 x^3+4x^2+2x-3 能被 x^2+x-1 整除，商式为 $q(x)=x+3$.

Example 2　已知直线 l 与直线 $3x-18y+z=0$ 平行，且和两坐标轴围成的三角形的面积为 3，求直线 l 的方程.

Solution　设所求直线 l 的方程为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，由题设条件，可得

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}|a||b|=3, \\ -\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{6}. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=-6, \\ b=1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=6, \\ b=-1. \end{cases}$$

所以所求直线 l 的方程为 $x-6y+6=0$ 或 $x-6y-6=0$.

从上面两个例题的解题过程可以看出，在某些数学问题中，如果我们能够判定所求问题的结果具有某种确定的数学表达式，仅仅是这种形式中的某些系数有待确定，就可以先按题意设出待定系数，组成一个恒等式，再根据多项式恒等定理列出方程或方程组，求出待定的系数的值，从而使问题得以解决. 这种方法叫做待定系数法.

待定系数法不但在解决有关多项式的问题中很有用，而且在解决有关分式的问题中，也能发挥它的作用.

在数学中，特别是在高等数学的微积分中经常要用到. 把一个分式分成部分分式，例如

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}.$$

下面,我们用待定系数法把一个真分式分成部分分式.

Example 3 将$\frac{x}{x^3-2x-4}$分成部分分式.

Solution 因为 $x^3-2x-4=(x-2)(x^2+2x+2)$,而 x^2+2x+2 在实数范围内不能再继续分解因式,所以设$\frac{x}{x^3-2x-4}=\frac{a}{x-2}+\frac{bx+c}{x^2+2x+2}$,

则有 $x\equiv a(x^2+2x+2)+(bx+c)(x-2)$

$\equiv(a+b)x^2+(2a-2b+c)x+(2a-2c)$.

所以$\begin{cases}a+b=0,\\2a-2b+c=1,\\2a-2c=0.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{1}{5},\\b=-\frac{1}{5},\\c=\frac{1}{5}.\end{cases}$

即$\frac{x}{x^3-2x-4}=\frac{1}{5x-10}-\frac{x-1}{5x^2+10x+10}$.

练 习

1. m,n 取什么值时,x^2-2x+1 能整除多项式 $f(x)=x^4-5x^3+11x^2+mx+n$?
2. 用 $x-2$ 的各次幂表示 $3x^3-10x^2+13$.
3. 将下列分式分成部分分式:

(1) $\frac{x^2-2}{x^3-2x^2-3x}$; (2) $\frac{x+2}{x^3-1}$.

1.2 Inverse Function 反函数

1.2.1 Definition 反函数的概念

我们知道,物体做匀速直线运动的位移 s 是时间 t 的函数,即 $s=vt$,其中速度 v 是常量.反过来,也可以由位移 s 和速度 v(常量)确定物体做匀速直线运动的时间,即 $t=\frac{s}{v}$,这时位移 s 是自变量,时间 t 是位移 s 的函数.

在这种情况下,我们就说 $t=\frac{s}{v}$是函数 $s=vt$ 的反函数.

又例如,在函数 $y=2x-1(x\in\mathbf{R})$中,x 是自变量,y 是 x 的函数.从函数 $y=2x-1$ 中解出 x,可以得到式子 $x=\frac{y+1}{2}(y\in\mathbf{R})$.这样,对于 y 在 $\mathbf{R}$ 中的任何一个值,通过式子 $x=\frac{y+1}{2}$,x 在 $\mathbf{R}$ 中都有唯一的值与它对应.也就是说,可以把 y 看作自变量($y\in\mathbf{R}$),x 作为 y 的函数,这时我们就说 $x=\frac{y+1}{2}(y\in\mathbf{R})$是函数 $y=2x-1(x\in\mathbf{R})$的反函数.

习惯上,函数的自变量用 x 表示,变量用 y 表示,故 $y=2x-1$ 的反函数通常写成 $y=\frac{x+1}{2}$.

一般地,函数 $y=f(x)(x\in D)$中,设它的值域为 A,我们根据这个函数中 x,y 的关系,用 y 把 x

表示出，得到 $x=\varphi(y)$. 如果对于 y 在 A 中的任何一个值，通过 $x=\varphi(y)$，x 在 D 中都有唯一的值和它对应，那么，$x=\varphi(y)$就表示 y 是自变量，x 是自变量 y 的函数. 这样的函数 $x=\varphi(y)(y\in A)$叫做函数 $y=f(x)(x\in A)$的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)(x\in D, y\in A)$. 在习惯上，我们一般用 x 表示自变量，用 y 表示函数，所以把它改写为 $y=f^{-1}(x)(x\in A)$.

例如函数 $y=3x$ 的反函数是 $y=\frac{x}{3}(x\in\mathbf{R})$，函数 $y=\frac{x}{5}-6$ 的反函数是 $y=5x+30(x\in\mathbf{R})$等.

从反函数的概念可知：如果函数 $y=f(x)$有反函数 $y=f^{-1}(x)$，那么函数 $y=f^{-1}(x)$的反函数就是 $y=f(x)$. 这就是说，函数 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$互为反函数.

函数 $y=f(x)$的定义域是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的值域，函数 $y=f(x)$的值域是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域(见表 1-1).

表 1-1

	函数 $y=f(x)$	反函数 $y=f^{-1}(x)$
定义域	D	A
值域	A	D

Example 1 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y=x^2-2x(x\leqslant -1)$；

(3) $y=1+\ln(2x+1)$；　　(4) $y=\frac{2x+5}{x-1}(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 1)$.

Solution (1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$，解得 $x=y^3-1$. 将 x 与 y 互换，得 $y=x^3-1$，所以函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数是 $y=x^3-1$.

(2) 函数 $y=x^2-2x(x\leqslant -1)$的值域为 $y\geqslant 3$，由函数 $y=x^2-2x(x\leqslant -1)$，得 $y=(x-1)^2-1$，解得 $x=1-\sqrt{y+1}$. 将 x 与 y 互换，得 $y=1-\sqrt{x+1}$，所以函数 $y=x^2-2x(x\leqslant -1)$的反函数是 $y=1-\sqrt{x+1}(x\geqslant 3)$.

(3) 由 $y=1+\ln(2x+1)$，解得 $x=\frac{1}{2}(e^{y-1}-1)$. 将 x 与 y 互换，得 $y=\frac{1}{2}(e^{x-1}-1)$，所以函数 $y=1+\ln(2x+1)$的反函数是 $y=\frac{1}{2}(e^{x-1}-1)$.

(4) 由 $y=\frac{2x+5}{x-1}$，得 $yx-y=2x+5$，即$(y-2)x=y+5$，当 $y\neq 2$ 时，$x=\frac{y+5}{y-2}$. 将 x 与 y 互换，得 $y=\frac{x+5}{x-2}$，所以函数 $y=\frac{2x+5}{x-2}(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 1)$的反函数是 $y=\frac{x+5}{x-2}(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 2)$.

1.2.2 The Graphs of Inverse Functions 互为反函数的函数图像间的关系

如果函数 $y=f(x)(x\in D)$的反函数是 $y=f^{-1}(x)$，那么在同一平面直角坐标系 xOy 中，它们的图像有什么关系呢？

我们看下面的例题.

Example 1 求函数 $y=f(x)$的反函数 $f^{-1}(x)$，并且在同一平面直角坐标系 xOy 中，作出原函数与它的反函数的图像.

(1) $f(x)=3x-2(x\in\mathbf{R})$；　　(2) $f(x)=2^x(x\in\mathbf{R})$.

Solution (1) $f(x)=3x-2$，解得 $x=\frac{y+2}{3}$，因此函数 $y=3x-2(x\in\mathbf{R})$的反函数是 $y=\frac{x+2}{3}$

$(x\in\mathbf{R})$. 函数 $y=3x-2(x\in\mathbf{R})$ 和它的反函数 $y=\dfrac{x+2}{3}(x\in\mathbf{R})$ 的图像如图 1-1 所示.

(2) 由 $y=2^x$, 解得 $x=\log_2 x$, 因此函数 $y=2^x$ 的反函数是 $y=\log_2 x(x>0)$. 函数 $y=2^x(x\in\mathbf{R})$ 和它的反函数 $y=\log_2 x(x>0)$ 的图像如图 1-2 所示.

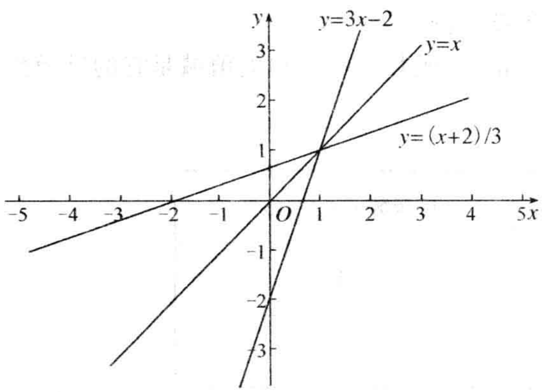


图 1-1

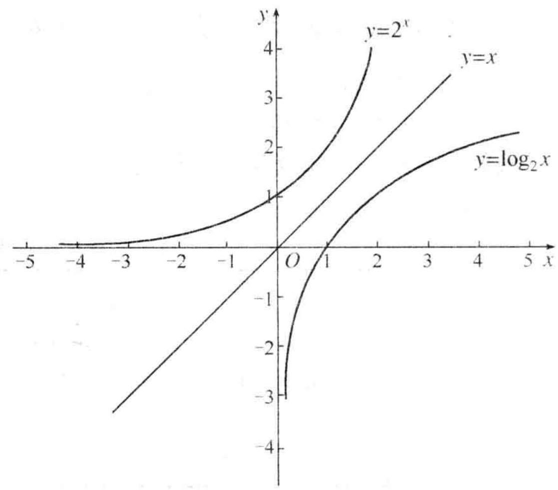


图 1-2

从图可以看出, 函数 $y=3x-2(x\in\mathbf{R})$ 和它的反函数 $y=\dfrac{x+2}{3}(x\in\mathbf{R})$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称; 函数 $y=2^x(x\in\mathbf{R})$ 和它的反函数 $y=\log_2 x(x>0)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

一般地, 函数 $y=f(x)$ 的图像和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

练 习

1. 求下列函数的反函数:

(1) $y=3x^3-4(x\in\mathbf{R})$;　　(2) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(3) $y=e^{2x+5}$;　　(4) $y=\sqrt{25-4x^2}\left(x\in\left[0,\dfrac{5}{2}\right]\right)$.

2. 求下列函数的反函数, 并画出函数及其反函数的图像:

(1) $y=x^2+2x+1(x\in[0,+\infty])$;

(2) $y=\dfrac{x}{x-2}(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 2)$.

3. 已知 $y=\dfrac{1}{5}x+a$ 与 $y=bx+3$ 互为反函数, 求常数 a,b 的值.

4. 验证函数 $f(x)=\dfrac{ax-b}{cx-a}$ 的反函数是该函数自身.

5. 试确定函数 $f(x)=x^2-2ax+3$ 在区间 $[1,2]$ 上存在反函数的充要条件.

1.2.3 Inverses of Trigonometric Functions 反三角函数

三角函数解决"知角求值"的问题, 例如 $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$, $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$. 在科学研究和生产实践中还会遇到大量的"知值求角"的问题, 例如 $\cos A=\dfrac{1}{3}$, 求 A; $\tan x=-\sqrt{3}$, 求 x.

"知角求值"和"知值求角"关系十分密切, 其本质是函数与反函数的问题. 因为三角函数都是周期函数, 所以三角函数不存在反函数.