



Theory of Trigonometric Series

数学·统计学系列

三角级数论 (下册)

陈建功 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

013048662

0174. 21
06
V2

数学·统计学系列

Theory of Trigonometric Series 三角级数论

● 陈建功 著

(下册)



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



北航

C1656039

0174.21
06
V2

内 容 简 介

本书是作者三十多年来为国内外研究生讲授三角级数论所用讲义几经修改补充整理而成. 全书分上下两册, 此部分是下册.

下册共四章: 第五章至第八章. 第五章傅里叶级数的发散, 阐述了傅里叶级数和它的共轭级数、更序级数的发散问题. 第六章傅里叶系数, 阐述了傅里叶系数的性质、条件、估计等问题. 第七章三角多项式的逼近论, 阐述了三角多项式的逼近问题, 讨论了几种逼近法和它们的偏差估计. 第八章一般的三角级数, 介绍了黎曼的理论及以后的发展. 书中包含了国内外迄至六十年代为止的一些重要成果.

本书可供高等学校数学系高年级学生、研究生、科研工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

三角级数论. 下册/陈建功著. —哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2013. 1

ISBN 978-7-5603-3922-1

I. ①三… II. ①陈… III. ①三角级数—研究
IV. ①O174.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 001020 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 宋晓翠

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 24.25 字数 470 千字

版 次 2013 年 1 月第 1 版 2013 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3922-1

定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读, 我社负责调换)

序

著

者于 1929 年,遵指导教师藤原松三郎先生的嘱咐,用日本文写成《三角级数论》,于 1930 年在东京岩波书店出版,从 1939 年起,在浙江大学(当时校址在贵州湄潭)指导研究生,就以上述三角级数论为基础,作成三角级数的讲义,历年都有修改.到了 1960 年,将讲义重新整理,添入挽近材料,以授杭州大学的研究生,仍称这部讲义为三角级数论.由于内容较之原来的日文书,丰富许多,难免有许多未妥之处,希望高明有以教我,不胜感盼.

陈建功



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007—09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007—09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007—09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007—09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010—06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008—01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010—07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010—01	18.00	61

数学眼光透视	2008—01	38.00	24
数学思想领悟	2008—01	38.00	25
数学应用展现	2008—01	38.00	26
数学建模导引	2008—01	28.00	23
数学方法溯源	2008—01	38.00	27
数学史话览胜	2008—01	28.00	28

从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007—10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008—01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008—05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011—08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		

数学解题中的物理方法	2011—06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011—06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012—01	48.00	116
三角形中的角格点问题	2013—01	88.00	207
中学数学证明方法	2012—01	58.00	117
数学趣题巧解	2012—03	28.00	128
含参数的方程和不等式	2012—09	28.00	213

数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006—05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008—01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008—07	58.00	34
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010—01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011—08	58.00	87



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第1版)	2007-01	68.00	11,12
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第1版)	2005-10	18.00	2
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
平面几何天天练上卷·基础篇(直线型)	2013-01	58.00	208
平面几何天天练中卷·基础篇(涉及圆)	2013-01	28.00	234
平面几何天天练下卷·提高篇	2013-01	58.00	237
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012-01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅰ)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅱ)	2011-01	28.00	78
世界著名初等数论经典著作钩沉(理论和实用算术卷)	2011-07	38.00	126
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的解法与应用	2012-07	18.00	183
近代的三角形几何学	2012-07	48.00	184
一般折线几何学	即将出版	58.00	203
三角形的五心	2009-06	28.00	51
三角形趣谈	2012-08	28.00	212
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯平面几何5000题	2011-03	58.00	89
俄罗斯初等数学万题选——三角卷	2012-11	38.00	222
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室



已出版(即将出版)图书目录

书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
463 个俄罗斯几何老问题	2012-01	28.00	152
近代欧氏几何学	2012-03	48.00	162
罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要	2012-07	28.00	188
超越吉米多维奇——数列的极限	2009-11	48.00	58
Barban Davenport Halberstam 均值和	2009-01	40.00	33
初等数论难题集(第一卷)	2009-05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011-02	128.00	82,83
谈谈素数	2011-03	18.00	91
平方和	2011-03	18.00	92
数论概貌	2011-03	18.00	93
代数数论	2011-03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011-02	28.00	95
超越数论基础	2011-03	28.00	96
数论初等教程	2011-03	28.00	97
数论基础	2011-03	18.00	98
解析数论基础	2012-08	28.00	216
数论入门	2011-03	38.00	99
数论开篇	2012-07	28.00	194
解析数论引论	2011-03	48.00	100
无穷分析引论(下)	2013-03	98.00	245
数学分析中的一个新方法及其应用	2013-01	38.00	231
数学分析例选:通过范例学技巧	2013-01	88.00	243
三角级数论(上册)	2013-01	38.00	232
三角级数论(下册)	2013-01	48.00	233
基础数论	2011-03	28.00	101
超越数	2011-03	18.00	109
三角和方法	2011-03	18.00	112
谈谈不定方程	2011-05	28.00	119
整数论	2011-05	38.00	120
随机过程(Ⅰ)	2012-12	78.00	224
随机过程(Ⅱ)	2013-01	68.00	235
整数的性质	2012-11	38.00	192
初等数论 100 例	2011-05	18.00	122
初等数论经典例题	2012-07	18.00	204
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012-01	138.00	144,145
算术探索	2011-12	158.00	148



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
初等数论(Ⅰ)	2012-01	18.00	156
初等数论(Ⅱ)	2012-01	18.00	157
初等数论(Ⅲ)	2012-01	28.00	158
组合数学浅谈	2012-03	28.00	159
同余理论	2012-05	38.00	163
丢番图方程引论	2012-03	48.00	172
平面几何与数论中未解决的新老问题	2013-01	68.00	229
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006-05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008-09	28.00	40
历届加拿大数学奥林匹克试题集	2012-08	38.00	215
历届美国数学奥林匹克试题集:多解推广加强	2012-08	38.00	209
历届国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012-01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007-03	28.00	15
全国大学生数学竞赛辅导教程	2012-07	28.00	189
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009-03	88.00	43
前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解(上编)	2012-04	28.00	169
前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解(下编)	2012-04	38.00	170
整函数	2012-08	18.00	161
俄罗斯初等数学问题集	2012-05	38.00	177
俄罗斯函数问题集	2011-03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011-01	48.00	79
博弈论精粹	2008-03	58.00	30
多项式和无理数	2008-01	68.00	22
模糊数据统计学	2008-03	48.00	31
模糊分析与特殊泛函空间	2013-01	68.00	241
受控理论与解析不等式	2012-05	78.00	165
解析不等式新论	2009-06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011-11	28.00	147
建立不等式的方法	2011-03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009-08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2012-02	68.00	153
初等数学研究(Ⅰ)	2008-09	68.00	37
初等数学研究(Ⅱ)(上、下)	2009-05	118.00	46,47
中国初等数学研究 2009 卷(第 1 辑)	2009-05	20.00	45
中国初等数学研究 2010 卷(第 2 辑)	2010-05	30.00	68
中国初等数学研究 2011 卷(第 3 辑)	2011-07	60.00	127
中国初等数学研究 2012 卷(第 4 辑)	2012-07	48.00	190



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
数阵及其应用	2012-02	28.00	164
绝对值方程—折边与组合图形的解析研究	2012-07	48.00	186
不等式的秘密(第一卷)	2012-02	28.00	154
初等不等式的证明方法	2010-06	38.00	123
数学奥林匹克不等式散论	2010-06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011-09	38.00	138
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010-01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011-08	158.00	134, 135
近代拓扑学研究	2013-01	28.00	239
500个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00	3
新编640个世界著名数学智力趣题	2013-02	88.00	242
400个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00	36
500个世界著名数学征解问题	2009-06	48.00	52
400个中国最佳初等数学征解老问题	2010-01	48.00	60
500个俄罗斯数学经典老题	2011-01	28.00	81
1000个国外中学物理好题	2012-04	48.00	174
300个日本高考数学题	2012-05	38.00	142
500个前苏联早期高考数学试题及解答	2012-05	28.00	185

数学 我爱你	2008-01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00	39
数学史概论	2009-06	78.00	50
斐波那契数列	2010-02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010-07	38.00	72
斐波那契数列欣赏	2011-01	28.00	160
数学的创造	2011-02	48.00	85
数学中的美	2011-02	38.00	84

最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009-02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009-08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007-04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009-08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010-01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010-01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011-03	68.00	118



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010-01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011-07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011-07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011-07	38.00	133
我怎样解题	2013-01	48.00	227
2011年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011-10	48.00	139
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007~2011)(上、下)	2011-10	78.00	140, 141
30分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012-01	48.00	146
高考数学压轴题解题诀窍(上)	2012-02	78.00	166
高考数学压轴题解题诀窍(下)	2012-03	28.00	167
格点和面积	2012-07	18.00	191
射影几何趣谈	2012-04	28.00	175
斯潘纳尔引理——从一道加拿大数学奥林匹克试题谈起	2012-12	18.00	228
李普希兹条件——从几道近年高考数学试题谈起	2012-10	18.00	221
拉格朗日中值定理——从一道北京高考试题的解法谈起	2012-10	18.00	197
闵科夫斯基定理——从一道清华大学自主招生试题谈起	2012-10	18.00	198
哈尔测度——从一道冬令营试题的背景谈起	2012-08	28.00	202
切比雪夫逼近问题——从一道中国台北数学奥林匹克试题谈起	2013-01	38.00	238
伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲面——从一道全国高中数学联赛试题谈起	2013-03	38.00	236
卡塔兰猜想——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
麦卡锡函数和阿克曼函数——从一道前南斯拉夫数学奥林匹克试题谈起	2012-08	18.00	201
贝蒂定理与拉姆贝克莫斯尔定理——从一个拣石子游戏谈起	2012-08	18.00	217
皮亚诺曲线和豪斯道夫分球定理——从无限集谈起	2012-08	18.00	211
平面凸图形与凸多面体	2012-10	28.00	218
斯坦因豪斯问题——从一道二十五省市自治区中学数学竞赛试题谈起	2012-07	18.00	196
纽结理论中的亚历山大多项式与琼斯多项式——从一道北京市高一数学竞赛试题谈起	2012-07	28.00	195
原则与策略——从波利亚“解题表”谈起	即将出版		
转化与化归——从三大尺规作图不能问题谈起	2012-08	28.00	214



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
代数几何中的贝祖定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	2012-07	18.00	193
成功连贯理论与约当块理论——从一道比利时数学竞赛试题谈起	2012-04	18.00	180
磨光变换与范·德·瓦尔登猜想——从一道环球城市竞赛试题谈起	即将出版		
素数判定与大数分解	2012-08	18.00	199
置换多项式及其应用	2012-10	18.00	220
许瓦兹引理——从一道西德 1981 年数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
椭圆函数与模函数——从一道美国加州大学洛杉矶分校 (UCLA) 博士资格考题谈起	2012-10	38.00	219
差分方程的拉格朗日方法——从一道 2011 年全国高考理科试题的解法谈起	2012-08	28.00	200
拉姆塞定理——从王诗宬院士的一个问题谈起	即将出版		
力学在几何中的一些应用	2013-01	38.00	240
高斯散度定理、斯托克斯定理和平面格林定理——从一道国际大学生数学竞赛试题谈起	即将出版		
康托洛维奇不等式——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
西格尔引理——从一道第 18 届 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
罗斯定理——从一道前苏联数学竞赛试题谈起	即将出版		
拉克斯定理和阿廷定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	2013-04	58.00	246
毕卡大定理——从一道美国大学数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝齐尔曲线——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
拉格朗日乘子定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
雅可比定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
李天岩-约克定理——从一道波兰数学竞赛试题谈起	即将出版		
整系数多项式因式分解的一般方法——从克朗耐克算法谈起	即将出版		
布劳维不动点定理——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
压缩不动点定理——从一道高考数学试题的解法谈起	即将出版		
伯恩赛德定理——从一道英国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
布查特-莫斯特定理——从一道上海市初中竞赛试题谈起	即将出版		
数论中的同余数问题——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
范·德蒙行列式——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
中国剩余定理——从一道美国数学奥林匹克试题的解法谈起	即将出版		
牛顿程序与方程求根——从一道全国高考试题解法谈起	即将出版		
库默尔定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卢丁定理——从一道冬令营试题的解法谈起	即将出版		
沃斯滕霍姆定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卡尔松不等式——从一道莫斯科数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
信息论中的香农熵——从一道近年高考压轴题谈起	即将出版		
约当不等式——从一道希望杯竞赛试题谈起	即将出版		
拉比诺维奇定理	即将出版		
刘维尔定理——从一道《美国数学月刊》征解问题的解法谈起	即将出版		
卡塔兰恒等式与级数求和——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
勒让德猜想与素数分布——从一道爱尔兰竞赛试题谈起	即将出版		
天平称重与信息论——从一道基辅市数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
艾思特曼定理——从一道 CMO 试题的解法谈起	即将出版		
一个爱尔特希问题——从一道西德数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
有限群中的爱丁格尔问题——从一道北京市初中二年级数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝克码与编码理论——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		

中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语	2007-03	28.00	16
统计学专业英语(第二版)	2012-07	48.00	176
幻方和魔方(第一卷)	2012-05	68.00	173
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第一卷)	2012-07	48.00	205
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第二卷)	2012-07	38.00	206

实变函数论	2012-06	78.00	181
非光滑优化及其变分分析	2013-01	48.00	230
初等微分拓扑学	2012-07	18.00	182
方程式论	2011-03	38.00	105
初级方程式论	2011-03	28.00	106
Galois 理论	2011-03	18.00	107
古典数学难题与伽罗瓦理论	2012-11	58.00	223
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011-03	28.00	108



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
线性偏微分方程讲义	2011-03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011-03	28.00	111
代数方程式论	2011-05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011-07	48.00	137
基于短语评价的翻译知识获取	2012-02	48.00	168
应用随机过程	2012-04	48.00	187
闵嗣鹤文集	2011-03	98.00	102
吴从玢数学活动三十年(1951~1980)	2010-07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012-01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012-01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012-01	58.00	151
钱昌本教你快乐学数学(上)	2011-12	48.00	155
钱昌本教你快乐学数学(下)	2012-03	58.00	171

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

网 址:<http://lpj.hit.edu.cn/>

邮 编:150006

联系电话:0451-86281378 13904613167

E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn

第五章 傅里叶级数的发散 //1

- § 1 法都的问题 //1
- § 2 傅里叶级数的无界概散和有界概散 //14
- § 3 函数的平均连续性与级数的概散 //23
- § 4 相互共轭的两个三角级数可能都成概散的傅里叶级数 //26
- § 5 傅里叶级数的概散点集可以为任意的 G_δ 集 //30
- § 6 L^2 中的傅里叶级数的更序级数可以概散 //34
- § 7 外尔因子 //40
- § 8 函数族 $L^p(0, 2\pi)$ 中有 F , 它的傅里叶级数具有概散的更序级数 //50
- § 9 连续函数的傅里叶级数的发散点集 //56
- § 10 从函数 $f(x) \in L(0, 2\pi)$ 产生的几个特殊积分 //61
- § 11 部分和趋向于无穷大的问题 //66
- § 12 三角函数系的更序 //73

第六章 傅里叶系数 //83

- § 1 连续函数的傅里叶系数 //83
- § 2 收敛于零的数列如何成为傅里叶系数 //92
- § 3 级数 $\sum n^{\gamma-2} \Phi(na_n) (\Phi(t) \uparrow)$ 的收敛与函数 $x^{-\gamma} \Phi\left(\left|\sum a_n \cos nx\right|\right), x^{-\gamma} \Phi\left(\left|\sum a_n \sin nx\right|\right)$ 的可积 //105
- § 4 能使 $\int |S_n(x)| dx = O(1)$ 的三角级数 //112
- § 5 积分平均的李普希兹函数族 //120
- § 6 系数的变动与函数的变质 //137

§ 7	系数的准确估计及其应用	//150
§ 8	几种具有特殊系数的三角级数及其应用	//163
第七章 三角多项式的逼近论 //182		
§ 1	周期连续函数的逼近问题	//182
§ 2	$L_p(0, 2\pi)$ 中的函数	//195
§ 3	$L_p(0, 2\pi)$ 中的幂级数与其相关联的正值函数	//209
§ 4	偏差落在光滑模区间中的线性逼近	//222
§ 5	几种古典求和法与最佳逼近	//230
§ 6	适合 $\int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0$ 的 $\varphi(t)$ 所产生的外尔函数	//238
§ 7	用线性求和法求傅里叶级数的和	//265
§ 8	插值逼近法	//281
第八章 一般的三角级数 //308		
§ 1	黎曼的理论及有关事项	//308
§ 2	三角级数的 M 集和 U 集	//318
§ 3	点集 E 与正数 θ 的乘积 E_θ	//323
§ 4	特殊 M 点集以及特殊三角级数的 U 集	//326
§ 5	用三角级数概表可测函数	//334
§ 6	正测度点集上取 $\pm\infty$ 的可测函数	//344
§ 7	从三角级数的部分和子列 $\{S_{n_k}(x)\}$ 可以概括到全列 $\{S_n(x)\}$ 的性质	//349
§ 8	周期函数级数	//354
编辑手记 //367		

傅里叶级数的发散

第五章

§ 1 法都的问题

法都(P. Fatou)在他的“三角级数与泰勒级数”(Acta M., 30, 1930)的名著中,提出如下的问题:存在在圆周 $|z| = 1$ 上到处发散,而满足条件 $\alpha_n = o(1)$ 的幂级数 $\sum \alpha_n z^n$ 吗?

鲁金(Лузин)于1911年,在意大利的杂志(R. C. Palermo)上,给法都的问题以肯定的回答.

鲁金的幂级数 $\sum \alpha_n z^n$ $\alpha_n = o(1)$,而 $\sum \alpha_n z^n$ 在 $|z| = 1$ 上处处发散.

置 $z = e^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), $S_n(z) = 1 + z + \cdots + z^n$, 则

$$|S_n(z)| = \left| \frac{\sin(n+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \right|$$

当 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时

$$\frac{2}{\pi} \leq \left| \frac{\sin \theta}{\theta} \right| \leq 1$$

因此,在区间

$$-\frac{\pi}{n+1} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n+1}$$

上

$$\left| \frac{\sin(n+1) \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right| = (n+1) \left| \frac{\sin(n+1) \frac{\varphi}{2}}{(n+1) \frac{\varphi}{2}} \right| \left| \frac{\frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right| \geq \frac{2}{\pi} (n+1)$$

以 $n+1$ 个分点

$$\varphi_v = e^{i \frac{2v\pi}{n+1}} \quad (v = 0, 1, \dots, n)$$

将单位圆周等分成 $n+1$ 个圆弧. 当

$$\frac{\pi}{n+1}(2v-1) \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n+1}(2v+1)$$

时,我们见到 $|S_n(e^{-i \frac{2v\pi}{n+1}} z)| \geq \frac{2}{\pi}(n+1)$. 作多项式

$$H_{(n)}(z) = S_n(z) + z^{n+1} S_n\left(\frac{z}{\varphi_1}\right) + z^{2(n+1)} S_n\left(\frac{z}{\varphi_2}\right) + \dots + z^{n(n+1)} S_n\left(\frac{z}{\varphi_n}\right)$$

$H_{(n)}(z)$ 的次数是 $\psi(n) = n(n+2)$, 每项系数的模都等于 1. 令

$$\lambda_1 = \psi(0) + 1 = 1^2$$

$$\lambda_2 = \psi(0) + \psi(1) + 2 = 1^2 + 2^2$$

$$\lambda_3 = \psi(0) + \psi(1) + \psi(2) + 3 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

⋮

$$\lambda_n = \psi(0) + \dots + \psi(n-1) + n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

⋮

那么 $z^{\lambda_n} H_{(n)}(z)$ 的最低次项的次数 λ_n 大于 $z^{\lambda_{n-1}} H_{(n-1)}(z)$ 的最高次项的次数 $\lambda_{n-1} + \psi(n-1) = \lambda_n - 1$. 因此

$$H_{(0)}(z) + \frac{1}{\sqrt{1}} z^{\lambda_1} H_{(1)}(z) + \frac{1}{\sqrt{2}} z^{\lambda_2} H_{(2)}(z) + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} z^{\lambda_n} H_{(n)}(z) + \dots$$

成一 z 的幂级数 $\sum \alpha_n z^n$, $\alpha_n = o(1)$.

对于单位圆周上的一点 ξ , 前述 $n+1$ 个圆弧 $(\varphi_0, \varphi_1), \dots, (\varphi_n, \varphi_0)$ 中必有一个圆弧含有 ξ . 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \xi^{\lambda_n + v(n+1)} H_{(n)} \right| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2}{\pi} (n+1) \right| = \infty$$

所以 $\sum \alpha_n \xi^n$ 发散. 从而 $\sum \alpha_n z^n$ 在 $|z| = 1$ 上到处发散.

令 $\alpha_n = a_n + i b_n$, 则 $\sum \alpha_n z^n$ 的实部和虚部 (若 $z = e^{i\varphi}$) 分别是