

● 陈永明 著

CHENYONGMING
PINGYI
SHUXUEKE

陈永明 评议 数学课

(修订版)



没有宏论却发人深思。每每会意，竟好似清凉甘冽的泉水，一饮而沁心脾。

—— 张奠宙

上海科技教育出版社

陈永明

评议数学课

(修订版)

陈永明 著

上海科技教育出版社

陈永明

陈永明著《陈永明评议数学课》一书，由上海世纪出版股份有限公司出版。

《陈永明评议数学课》一书，由上海世纪出版股份有限公司出版。

责任编辑：冯晨阳
封面设计：杜一光

陈永明评议数学课
(修订版)
陈永明 著

出版发行：上海世纪出版股份有限公司
上海科技教育出版社
(上海市冠生园路393号 邮政编码 200235)

网 址：www.ewen.cc
www.sste.com

经 销：各地新华书店

印 刷：上海市印刷四厂有限公司

开 本：787×1092 1/16

字 数：380 000

印 张：17

版 次：2012年4月第1版

印 次：2012年4月第1次印刷

书 号：ISBN 978-7-5428-5364-6/O·756

定 价：35.00元

XU

序

陈永明教授是我相知几十年的老朋友。多年前，他提出要“咬文嚼字学数学”，我觉得微观地看必须如此，因而深表赞同。后来，我主张“把数学的学术形态转换为数学的教育形态”，反对“去数学化”，他又认为宏观上看应该如此，给予支持。可以说我们是“同声相应、同气相求”了。

一晃之间，我们都老了，不过彼此还在忙着。我埋头“爬格子、敲键盘”，他则花大量的时间下课堂听课、带“徒弟”。前不久，他也敲键盘，送来一叠书稿，说是听课以后的评论。打开一看，乃是一系列的“数学教学小品”，没有宏论却发人深思。每每会意，竟好似清凉甘冽的泉水，一饮而沁心脾。

数学教学的课堂实录与评课，坊间的出版物已相当不少。通常是把课堂所见，用“上位知识”——一般教育原理解释一番，即“教育学原理+数学例子”的研究模式。究其作用，无非是再次证明了一般教育原理的正确性。本书则不同，乃是原汁原味不加修饰的课堂实况，有好说好，有问题则谈问题，实事求是。永明教授关注教学本身，从课堂中发现矛盾冲突，使一般教育原理和数学教学实践相融合，提炼出数学教育的特定规律。比如，永明教授借用华罗庚先生“生书熟讲，熟书生温”的话，为如何上好复习课进行诠释，就是揭示了数学教育的一项特有的规律。这样的话，在一般教育学里是找不到的。

全书一共 49 节，每节都有一些亮点，属于作者的独到见解。比如，在“六谈双基模块——‘二限’排列问题”一节，我们可以看到作者娴熟的数学功底。其中有所谓“一限”和“二限”的区别，“二限”中又有类型之分，分析得清澈见底。在“直觉惹出的麻烦”一节，我们欣赏到作者积累的“不正确图形”的教学经验，帮助学生辩证地看待“直觉”的价值和局限。这些亮点，也是在一般教育学理念里所找不到的。

有人可能疑惑，这些“细枝末节”的经验，有多大的价值？确实，

比起某些充斥着“正确的废话”的大部头著作来，本书的确不够“伟大”。但是，数学教学过程，除了要接受一般教育理念的指导之外，教学过程还是一种实践性很强的艺术创造。优质的教学，需要精雕细刻，注意每一个细节，才能启发学生、感染学生。有一句名言就是“细节决定成败”。实际上，以为仅凭几条原则、大呼隆地评论一番就能上好课，那是神话。

我常将一般教育学比作基础科学，而把学科教育学比作工程技术。嫦娥奔月工程固然要运用物理学的原理，但物理学不能代替航天工程。要将飞行器送上太空还必须有航天技术设计理论和施工规范。制作航天器的工艺，需要精益求精，非常具体而细致。与此相似，一般教育学的规律固然能够指导学科教育，却不能代替学科教育，更无法取代那些用毕生实践总结得来的经验。

本书有一节是“谁知盘中餐，粒粒皆辛苦”。永明教授借以表扬执教的老师，其实也可以用来形容永明先生自己的著作。我们期待这种“见微知著，由小见大”的研究工作能够得到重视和发扬。

借鉴国外的教育理论是必要的，然而，面向教学第一线，继承优良传统，总结正反两面的经验，逐步提升，是发展具有中国特色的数学教育理论的必由之路。

阅读书稿有感而发，遂作为序。

张奠宙

2008年初春于上海

张奠宙：华东师大教授，欧亚国际科学院院士，曾任国际数学教育委员会（ICMI）执行委员。

目 录

数 学 区 分 册 三 章

第一部分 概念课

感悟概念	3
剖析概念	5
胸中有图,胸中有例,胸中有数——概念的直观化和具体化	9
教学目标要准确落实	15
要理解每节课在整个数学中的地位	20
“有思想”和“没思想”——揭示数学知识的来龙去脉	23
淡化形式——正确看待数学的严密性	27
概念的直接引入	29
谁知盘中餐,粒粒皆辛苦——把握教材,了解学生	32

第二部分 定理公式法则课

同课异构:勾股定理(之一)	45
同课异构:勾股定理(之二)	49
同课异构:勾股定理(之三)	54
同课异构:平行四边形判定定理(之一)	62
同课异构:平行四边形判定定理(之二)	65
一谈方法——通法和优法	70
启发式教学和好的导入	74
启发式教学和好的问题	78
读读议议	81
一谈难点:初遇待定系数法	85
二谈难点:数学归纳法的教学	88
三谈难点:“一贴二靠”好	94

不要为亮点而亮点	99
附：“量的目的是为了不量”	102
二谈方法——理解方法的深层意义	103
三谈方法——习拳容易改拳难	107
值得重视的“去数学化”倾向	110
把文章做足	113

第三部分 习题课

例题的典型性	119
关键还是对数学的理解	122
一谈解题模块——条件求值	126
要不要讲题目的类型	131
二谈解题模块——求一次函数的解析式	135
三谈解题模块——解直角三角形	138
四谈解题模块——函数的“借值求值”	143
五谈解题模块——复合函数的“限制分解”	147
六谈解题模块——“二限”排列问题	151
四谈方法——“回归本原”的方法	155
列方程解应用题的关键在哪里	158
谈教学能力——重要的是归纳能力	162
要突破照本宣科和就题论题的教书匠模式	166
习题课要有层次感	168
一道错题的讨论	171

第四部分 复习课

引导学生自我整理知识	177
用新的线索把知识串起来	181
归纳不等于罗列	184
谈“下游命题”——“它给我们提供了什么信息？”	186

第五部分 作业设计

让数学教学有些弹性	193
-----------------	-----

第六部分 试卷讲评课

试卷讲评和知识技能的巩固	199
试卷讲评和提高升华	208
一次尝试:由学生来讲评	212

第七部分 探索课

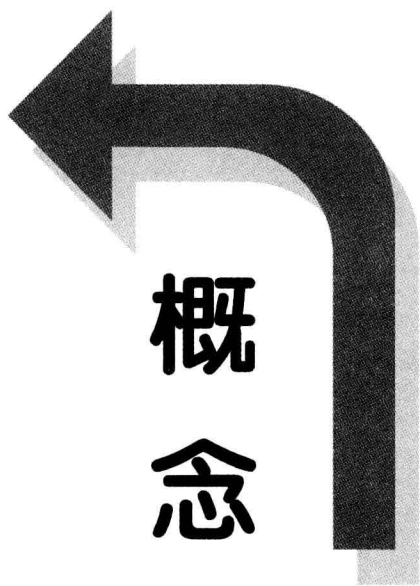
一堂探索课——画直线两等分图形面积	219
探索课和教师主导作用——用纸片折成四面体	227
提出问题——关键词改变法	231

第八部分 其他

精彩不精彩,语言占大半	237
不啰嗦不跳跃	240
过细没好处,过难也不对	243
直觉惹出的麻烦	246
要善于观察	249
研究“确定性”是一种数学思考	253
点拨和“留白”	256

后记——寄希望于青年教师	259
再版后记	261

7 第一部分



概念课

感悟概念

我听过一节很精彩的课,那是L老师上的平面直角坐标系.平面直角坐标系对学生来说是一个新的概念,L老师没有直截了当从概念出发讲解,而是不惜时间,组织学生做游戏,从而得到直角坐标系的概念.下面是L老师上课的部分记录:

一、创设情景,引入新知

(一) 我当破译小高手

游戏:方格中有25个字,若用A4表示“书”,

5	聪	明	自	了	于
4	书	天	在	勤	贵
3	标	宝	奋	可	来
2	敏	里	习	才	大
1	的	学	打	库	想
	A	B	C	D	E

1. 请破译下列密码:

A5B5C4E5D4C3

2. 请编制密码:

天才来自勤奋

师:有人用B表示“天”,行吗?

生:不行.

(二) 我做影院小向导

师:“4排3号”和“3排4号”中的4含义有什么不同?

生:“4排3号”中的4,是第几排;“3排4号”中的4是在某排里的第几座.

师:如果将“4排3号”简记为(4,3),那么“3排4号”

评:这个情景问题引起了学生的兴趣.老师的问题也提得好,强调了表示“天”字要2个数码才行.



应该怎么记？(2,4)表示什么位置？

生：“3排4号”应该记作(3,4)；(2,4)表示“2排4座”。

(三) 我爱我的班级

师：你能向大家介绍你的座位在教室中的位置吗？

生：(回答不出来)

师：看来要规定从哪里开始数。(教师作了规定，然后说)我报座位标号(3,8)，请对应座位上的同学站起来。

评：这又是一个精彩的问题，强调了两个数字前后顺序不同，意义是不同的。

评：这是在强调这两个数字，在计数时都要有基准。

议：数学概念是数学课的重要组成部分，概念课怎么上？各有各的做法，比较普遍的办法是老师直接讲授。直接讲授是可以的，特别是高中阶段可以多用些。对初中学生来说，可能通过情景引入更适合些。特别是对于重要概念，要舍得花一定的时间，让学生感悟为什么要引入这个概念？这个概念的本质是什么？有哪些事项需要注意？……

坐标概念是好不容易才诞生的重要思想，有了这个坐标概念，点可以转化为数，曲线可以转化为方程，于是几何问题可以转化为代数问题。这么个概念，在人类文明发展了几千年之后，才由笛卡儿来揭示。在笛卡儿之前，世界上出现了那么多的伟大数学家，都没有想到坐标系，可见这个概念不一般。像这种重要概念，一般要通过感悟，才能慢慢理解。这节课里，不但让学生感悟了平面上的点可以用数对表示，而且突出了：要两个数；前后顺序不能弄错；要规定从哪里开始数，就是要有个基准……把和坐标相关的东西，通过游戏，通过生活中熟悉的素材，让学生一一感悟，这样在学生头脑里的坐标知识是活的。

类似坐标这样的重要概念，数学里还有不少。我听到一位朋友抱怨地说她读小学的儿子，老师教：“‘15’中有‘1个10’(在前面)和‘5个1’。”他懂了，但考试时，题目倒过来了：“14中有_____个1和_____个10(在后面)”。儿子就不会了。

我对这位朋友说，不是你的儿子笨，而可能是老师没有教好。这里涉及了位值的概念。位值概念也是个重要的概念，希腊文明水平这么高，但就是不懂得位值制。因此这种重要概念不是轻而易举可以“教”会的，不是就事论事做些题目(甚至做很多题目)可以弄懂的，要感悟它，才会真正弄懂。

课改强调知识发生发展的过程，让课堂合理地再现这个过程，这是正确的。这样才能对结果理解得深，记得牢，用起来也会得心应手。当然，过程和结果都是重要的，应该是相辅相成的。

剖析概念

前面一篇文章主要讲述了重要概念要感悟,但要讲清楚一个概念本身,也是很重要的.这里一节课是直线的倾斜角和斜率,执教的D老师既重视了概念的发生发展,又比较清楚地分析了概念本身.

师:我们在爬山的时候,会感觉到有的山坡陡,有的平坦些.怎么来刻画这种区别呢?

生1:角.

师:说具体些.

生1:山坡和水平线所成的角.

师:如果把山坡看成直线,水平线看成横轴,那么……

生1:直线和 x 轴的夹角.

师:对,我们把这个角叫做直线的倾斜角.不过我只是给了个模糊的说法,试给倾斜角下个数学定义好吗?

生2:直线和 x 轴所成的角.

生3:(反驳)直线和 x 轴所成的角有4个,应为:与 x 轴正方向所成的角.

生4:(反驳)应改为:直线向上方向和 x 轴……

师:很好!我们给出了直线的倾斜角的定义:直线的向上方向和 x 轴的正方向所成的角叫该直线的倾斜角.(板书)

师:有没有不同意见?

……

生5:建筑工人在观察所砌的墙壁是不是垂直于地面时,是用一根线吊起来,看墙壁和吊线之间的夹角.这个夹角也可以衡量直线的倾斜程度的.

师:很好!真聪明.实际上是研究直线和 y 轴的夹角.

师:让我们回到和 x 轴的夹角.在三角里,我们已经把角的概念推广到任意角了,这样的说法可不可以改进一下?

评:教师原先的问题只是想引导到书本上倾斜角的定义,这个回答是出乎教师预料的.教师没有否定生5,而是表扬了他.事实上,概念大多是由实际需要引出的,而刻画它有时可以有多种方法.如果我们只是照本宣科,把书本上说的当成金科玉律,不能动,不能改,这是有害的.



生 6:应该说最小角.

生 7:应该确定角的旋转方向.

师:(得出定义,板书)请大家看书,划出关键词.

生 8:逆时针,最小正角.

师:以后,为了统一起见,我们以这个作为直线倾斜角的定义.

师:还有什么要注意的,定义中似乎还有什么情况被遗漏了……

生 9:当直线和 x 轴不相交时.

师:这时候规定它是几度较为合理?

生 9:0 度.

(得出完整的定义)

师:倾斜角的大小可以是任意的吗?

生 9:应该在 0 到 π 之间.

师:能够等于 0 吗? 能够等于 π 吗?

生 9:能够等于 0 , 不能等于 π .

评:尽管我们不要求背定义,但是定义的词语分析是很值得重视的.

评:有些概念常常会有几个特殊的情况,需要强调.譬如绝对值,定义是这样的:正数的绝对值是它自己,负数的绝对值是它的相反数,零的绝对值是零.其中的“零”的情形,就是特殊情况.它是整个定义的组成部分,又是学生容易忽视的.

接着,教师出了一些练习题:

1. 如图 1, 直线 l 是第一、三象限的角平分线, 能够说 l 的倾斜角是 45° 、 405° 、 $\frac{\pi}{4}$ 、 225° 吗?

2. 如图 2, 直线 l 是第四象限的角平分线, 能够说 l 的倾斜角是 315° 、 $-\frac{\pi}{4}$ 、 135° 、 $n \cdot 360^\circ + 315^\circ$ 吗?

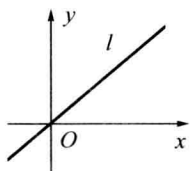


图 1

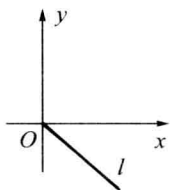


图 2

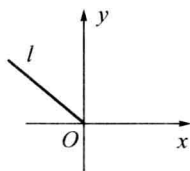


图 3

3. 如图 3, 直线 l 是第二象限的角平分线, 能够说 l 的倾斜角是 315° 、 $-\frac{3\pi}{4}$ 、 135° 、 $n \cdot 360^\circ + 135^\circ$ 吗?

师:要注意区分两个概念. 借用图 2, 对于“直线 l 的倾斜角”, 和“始边是 x 轴正方向、终边位置在 l 的角”, 有谁能够说清楚它们的区别和联系?

生 10:前面一个概念是对直线而言的, 而后面的概

念是对射线说的. 直线 l 的倾斜角只有一个, 而且范围是 $0 \leq \alpha < \pi$; 而始边是 x 轴正方向、终边位置在 l 的角, 有无数多个, 可正可负, 一般表达式是 $k \cdot 360^\circ + \alpha (k \in \mathbf{Z})$.

师: 好, 大致说清楚了.

.....

师: 刚才得出了倾斜角来反映直线的倾斜程度, 还有同学用吊线和 y 轴的夹角来刻画倾斜程度, 得到了倾斜角的定义. 除了用角来刻画直线的倾斜程度外, 还可以用别的什么数量吗?

生 11: 取倾斜角的正弦、余弦、正切, 这些都是数, 都可以反映直线的倾斜程度的.

师: 选哪个好?

生 12: 正弦不好, 因为在 $[0, \pi)$ 内角和正弦不是一一对应. 在正切和余弦之间, 好像选正切好.

师: 好的. 我们把直线倾斜角 α 的正切叫做直线的斜率, 即斜率 $k = \tan \alpha$. 注意, 这里要求 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, 即当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时直线的斜率不存在. 这是一个特殊情况.

.....

师: 到现在为止, 我们有哪些确定直线方向的方法?

生 13: 方向向量, 法向量, 倾斜角, 斜率.

师: 这四者如何转化? 有什么需要注意的?

.....

评: 相似概念的辨析比较落实.

评: 又是在展现概念的生成过程, 但又不过分.

议: D 老师的这节概念课, 一个特点是展现了概念的形成过程. 倾斜角也好, 斜率也好, 原来都是为了反映某类事物, 或者某种性质的. 反映某类事物或某种性质, 有时可以用多种办法来刻画, 经过适当取舍之后, 才有了书上的定义.

另一个特点是概念的分析比较到位. 为了理解一个概念, 一般说, 一是正反举例; 二是扣住定义的关键词语; 三是注意特殊情况; 四是与有关概念进行比较, 找出两个概念的区别和联系.

对概念教学, 教改之后更为强调概念的生成, 这是正确的. 但不能忽视对概念本身的分析, 这可是基本功.



要懂得种属定义的基本结构是“属差十种”(这是主要的定义方式,另一种方式是归纳定义),就是上位概念加上一个或几个限制词.有时候这种结构很清楚,有时候又比较含糊.有些学生定义背得很熟,却不知道某个概念的上位概念是什么.譬如,“数列的极限是什么?”对这样的问题,回答五花八门,有的说是无限趋近,有的说是 $\in N$ ……其实数列的极限是实数(上位概念),是一个数列无限趋近的(限制词,即属差)实数.复数的模是什么?也是弄不清楚,只知道复数的模 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$,其实复数的模是正实数(上位概念),是等于 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的正实数.除了知道上位概念之外,对定义里的限制词也要一个一个弄清楚.

要正反举例.概念是抽象的,词语是枯燥的,而例子是具体的,容易理解.在举正面例子的时候,要尽量考虑足够的代表性.否则会有意无意地使学生把概念的范围理解窄了.譬如讲无理数,老师如果只举 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 这样的例子,学生在无意中会把无理数理解成“不尽根”.在举正面例子的时候,对一些特殊情形和后面引进情形要给予充分的注意.譬如,零的绝对值是零,这就是特殊情形;幂的意义常常忘了负指数幂、分数指数幂的情形,这是因为原先学的是正整数指数幂,负指数幂与分数指数幂都是后面再学习的缘故.举反例,要指出违背了定义中的哪个要求.

要注意分辨容易混淆的概念.有些概念提法不同,含义是一样的,譬如正三角形和等边三角形.有的是提法相同,含义不同,譬如“距离”,有两点间的距离,有两平行线间的距离等;“圆柱”和“直圆柱”本是两回事,但常把“直圆柱”简称为“圆柱”.有的是提法相近,含义不同,譬如最大值和极大值.

要注意概念间的联系.两个概念,有时是从属的关系,譬如三角形和等边三角形.有时是并列关系,譬如正整数指数幂和负整数指数幂.有时是交叉的,譬如直角三角形和等腰三角形.有时甚至是不在同一个系统之内的,譬如本节课里的直线倾斜角和直线的斜率,一个是角,一个是比值,但它们有联系.

如果我们能够注意到概念的生成,又善于对概念本身进行分析,同时,在引进概念的时候,又不拖泥带水地“作秀”;在对概念本身进行分析时,又不在非基本的地方故意制造“麻烦”,那么这节概念课肯定是成功的.

有关概念的剖析,可参考拙作《数学教学中的逻辑问题》(上海科技教育出版社出版).

胸中有图,胸中有例,胸中有数

——概念的直观化和具体化

这是一节C老师早年上的幂函数图像课.众所周知,幂函数是一类函数,函数式里含的参数只有一个,但由于这一个参数值的不同,图像的形态是不相同的.这和二次函数不一样,二次函数式里有三个参数,但是不管这三个参数怎么变化,图像的形态却都是抛物线.

由于幂函数图像的形态过于复杂,要死记是困难的.C老师的办法是充分利用图形和典型的例子.

C老师先说明幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的指数 α 已经不只是正整数了,可以是一切有理数.并复习正整数指数幂、负整数指数幂、零指数幂、正分数指数幂、负分数指数幂的意义:

正整数指数幂 x^n (n 是正整数), 意义是 n 个 x 的乘积, 即

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ 个}};$$

负整数指数幂 x^m ($x \neq 0, m$ 是负整数, 并设 $m = -n$):

$$x^m = x^{-n} = \frac{1}{x^n};$$

零指数幂 ($x \neq 0$):

$$x^0 = 1;$$

正分数指数幂 $x^{\frac{n}{m}}$ (m, n 是正整数):

$$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n};$$

负分数指数幂 $x^{-\frac{n}{m}}$ ($x \neq 0, m, n$ 是正整数):

$$x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}.$$

接着指出形如 $y=x^{\alpha}$ 的函数叫幂函数.幂函数的函数表达式看起来简单,但它的图像却很复杂.我们来对它进行分析,看看有什么特点.