布朗运动与牛顿位势

王梓坤

南开大学数学系

1980.11

布朗运动与牛顿位势

（南开大学数学系　　王梓坤）

目　　录

布朗运动与牛顿位势

§1 概论

(一)现代概率论的重要进展之一是发现了马尔科夫过程（简称马氏过程）与位势理论（简称势论）之间的深刻联系。这一发现便得势论中的許多概念和结论获得了概率意义。同时也使马氏过程获得了新的分析工具。因而促进了二者的发展。丰富了它们的內容。这种联系的萌芽最早见于S.Kakutani〔13〕及J.L.Doob〔7〕。前者证明了：平面上Dirichlet问题的解可以用二維布朗运动的某些概率特征来表达。Doob等人的大量工作发展了这方面的研究；而把这种联系推广到相当一般的马氏过程（所谓Hunt过程）。则主要是G.A.Hunt的贡献。

近年来这方面的文献很多。初学时不容易了解它们的背景。本文试图通过比较簡单具体的布朗运动与牛顿位势。对一般理论作一前导。由于前者是后者的思想泉源。这样。也許有助于对一般理论中的概念和定理的理解。由于布朗运动与势论的內容都很丰富。我们不可能深入到各自的领域中去。而只能把讨论的重点放在二者的联系上。同时也叙述一些新结果。这种联系反应在Dirichet问题的解、Green函数、平衡势等问题上。在本文主干上的结果。基本上都作了详细证明。

随着布朗运动所在的相空间R^n（n維欧氏空间）的維数n不同。布朗运动的概率性质也有显著差异。以后会看到。当$n\leq 2$时。它是常返的(Recurrent)。对应于对数势；当$n\geq 3$时。它是暂留的(Transient)。对应于牛顿势。本文主要讨论$n\geq 3$的

情形。

(二) 势论大意　古典势论起源于物理。后来抽象成为数学的一分支。根据电学中的库仑定律。两个异性电荷互相吸引。引力方向在其联线上。力的大小为

$$F = c\frac{Qq}{r^2}$$

其中 Q、q分别为二电荷的数量。r 为二者在 R^3 中的距离。c 为某常数与单位有关。为了研究引力。可以引进势的概念。设在点 x_0 处有一电荷 q_0，它在任一点 x（$x \neq x_0$）处所产生的势。等于把一单位电荷从无穷远移到点 x 处所作的功。势与此电荷在到达 x 以前所走的路径无关。势的值为

$$\frac{1}{2\pi}\frac{q_0}{|x-x_0|} \tag{1}$$

常数 $1/2\pi$ 依赖于单位的选择，并非本质。

今设有 m 个电荷 q_i，分别位于点 x_i，（$i=1, 2, \cdots m$），可视

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_m \\ q_1, & q_2, & \cdots, & q_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

为一离散的电荷分布。这组电荷在点 x（$x \neq x_i$）处所产生的势仍定义为把单位电荷自无穷远处移到 x 所作的功。由于力及功都是可加的，故此势为

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i}{|x-x_i|} \tag{3}$$

现在假设电荷按照测度μ而分布。由上式的启发，自然称由μ所产生的在点x的势为

$$G\mu(x)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{R^3}\frac{\mu(dy)}{|x-y|} \tag{4}$$

以后会证明，如$\mu(R^3)<\infty$，则关于勒贝格测度L，对几乎一切x，$G\mu(x)<\infty$，（见引理3）。

（4）式定义一积分变换G，它把测度μ变为函数$G\mu$。下面会看到，变换的核$1/2\pi|x-y|$恰好等于三維布朗运动转移密度对时间t的积分。这正是把布朗运动与牛顿势联系起来的桥梁之一。

在物理中，势论所研究的，主要是电荷分布μ、势以及借助于它们而定义的各种量间的关系。作为这种量的例，可举出电荷分布μ的能I_μ（Energy），它是势对此μ的积分，即

$$I_\mu\equiv\int_{R^3}G\mu(x)\mu(dx)=\frac{1}{2\pi}\int_{R^3}\int_{R^3}\frac{\mu(dy)\mu(dx)}{|x-y|} \tag{5}$$

电荷分布的全电荷是$Q\equiv\mu(R^3)$。如果把全部电荷Q散布在某导体上，它们便会重新分布，使得在此导体所占的集A上，势是一常数。记此新分布为μ_0。它具有下列能的极小性：

$$I_{\mu_0}=\min_{\mu}(I_\mu:\mu(R^3)=Q,\quad \llcorner\mu\subset A)$$

其中$\llcorner\mu$表μ的支集（support），它是一切使$\mu(U)=0$的开集U的和的补集。μ_0所决定的分布形态，在物理中称为平衡态。对

紧集$E(\subset R^3)$，如存在μ使 $L_\mu\subset E$，而且$G\mu(x)=1$，($x\in E$)，则称$G\mu$为E的平衡势；具有平衡势的集称为平衡集；而$\mu(E)$则称为E的容度，记为$C(E)$。因此，导体E的容度，是为了在此导体上产生单位势的全电荷。以上諸概念来自物理，以后还要从数学上重新定义。下面简述古典势论中的一些结果，其中有些以后会用概率方法加以证明。下设μ为有穷测度。

电荷分布的唯一性：势$G\mu$唯一决定μ。

势的决定：$G\mu$被它在 L_μ上的值所决定。

平衡势唯一：一集最多有一平衡势。

平衡势的刻画：设平衡集E的平衡势为$G\mu_0$，则

$$G\mu_0(x)=\inf(G\mu(x):\ G\mu(x)\geq 1,\ \forall x\in E)\quad(6)$$

平衡势的能：如平衡集E的能有穷，则在所有支集含于E，全电荷等于E的容度的电荷分布μ所对应的势中，平衡势$G\mu_0$的能I_{μ_0}极小；即

$$\begin{aligned}I_{\mu_0}&=\int_{R^3}(G\mu_0)d\mu_0\\&=\min_{G\mu}\left(\int_{R^3}(G\mu)d\mu:\ L_\mu\subset E,\ \mu(E)=C(E)\right)\end{aligned}\quad(7)$$

控制原理：二势$h=G\mu$、$\bar{h}=G\bar{\mu}$如处处有$h\geq\bar{h}$，则$\mu(R^3)\geq\bar{\mu}(R^3)$。

投影(Balayage)原理：设已给势$h=G\mu$及闭集E，则存在势$\bar{h}=G\bar{\mu}$，满足

$\overline{h}(x)=h(x)$，$(\forall x\in E)$；$\overline{h}(x)\leq h(x)$，$(\forall x\in R^3)$；(8)

$L\overline{\mu}\subset E$；$\overline{\mu}(R^3)\leq\mu(R^3)$ (9)

此外，还满足，$\forall x$

$$\overline{h}(x)=\inf_v(Gv(x):Gv(x)\geq h(x), \forall x\in E; L_v\subset E) \quad (10)$$

$$=\sup_v(Gv(x):Gv(x)\leq h(x), \forall x\in E; L_v\subset E) \quad (11)$$

称 $\overline{h}$ 为 h 的投影势(Balayage Potential)。

下包络原理：諸势的逐点下确界也是势。

(三)若干引理　考虑 n 維欧氏空间 R^n，其中的点记为 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，它与原点的距离为 $|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$，对 $r>0$，记

$$B_r\equiv(x:|x|\leq r); \quad \overset{0}{B}_r\equiv(x:|x|<r);$$

$$S_r\equiv(x:|x|=r)$$

它们分别是以原点为中心、r 为半径的球、开球和球面。

<u>引理1</u>　设 $f(y)$ 为一元函数，$y\geq 0$，如下式左方积分存在，则

$$\int_{B_r}f(|x|)dx=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^r s^{n-1}f(s)ds \quad (12)$$

证　为计算

$$\int_{B_r} f(|x|)dx = \underset{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le r^2}{\int \cdots \int} f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) dx_1 \cdots dx_n$$

引进极坐标

$$x_1 = s\cos\varphi_1, \quad x_2 = s\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \cdots\cdots,$$

$$x_n = s\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}$$

得

$$\int_{B_r} f(|x|)dx = \int_0^r s^{n-1} f(s)ds \cdot \int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1 \cdots$$

$$\cdots \int_0^\pi \sin^2\varphi_{n-3}\, d\varphi_{n-3} \cdot \int_0^\pi \sin\varphi_{n-2} d\varphi_{n-2}$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}$$

利用公式

$$\int_0^\pi \sin^{a-1}\varphi d\varphi = \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

化后简即得(12) #

在(12)中取 $f=1$。并利用公式

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{13}$$

即得球 B_r 的体积 $|B_r|$ 为

$$|B_r| = \pi^{n/2} r^n / \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \tag{14}$$

对r微分。得球面S_r的面积$|S_r|$为

$$|S_r| = 2\pi^{n/2} r^{n-1} / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \tag{15}$$

球面S_r上的勒贝格测度记为$L_{n-1}(dx)$。以$U_r(dx)$表S_r上的均匀分布。即

$$U_r(dx) = L_{n-1}(dx) / |S_r| \tag{16}$$

系1 设函数$K(x)$ $(x \in R^n)$的积分有意义。则

$$\int_{R^n} K(x)dx = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty \left[\int_{S_r} K(x) U_r(dx)\right] r^{n-1} dr \tag{17}$$

证 左方积分等于

$$\int_0^\infty \int_{S_r} K(x) L_{n-1}(dx) dr = \int_0^\infty \left[\int_{S_r} K(x) U_r(dx)\right] |S_r| dr.$$

以(15)代入即得(17) #

引理2 下列积分是y的有界函数

$$A(y) = \int_{B_r} \frac{dx}{|x-y|^{n-2}} \qquad (n \geq 2) \tag{18}$$

证 以$\chi_D(x)$表集D的示性函数。它等于1或0。视$x \in D$或$x \bar{\in} D$而定。则对任意$\delta > 0$。有

$$A(y)=\int_{R^n}\frac{\chi_{B_r}(x)}{|x-y|^{n-2}}dx$$

$$=\int_{R^n}\frac{\chi_{B_r}(x+y)}{|x|^{n-2}}dx$$

$$\leq\int_{|x|\leq\delta}\frac{dx}{|x|^{n-2}}+\int_{|x|>\delta}\frac{\chi_{B_r}(x+y)}{|x|^{n-2}}dx$$

由(12)，右方第一积分等于$\pi^{n/2}\delta^2/\Gamma(n/2)$；第二积分不大于

$$\frac{1}{\delta^{n-2}}\int_{|x|>\delta}\chi_{B_r}(x+y)dx\leq\frac{1}{\delta^{n-2}}\int_{R^n}\chi_{B_r}(x+y)dx$$

$$=\frac{|B_r|}{\delta^{n-2}}\quad\#$$

注1　其实，易见$A(y)$的上确界在$y=0$达到。

以“$v-a.e$”表“关于测度v几乎处处”；以β^n表R^n中全体Borel集所成的σ代数；(R^n,β^n)上的勒贝格测度记为L。

引理3　设μ为(R^n,β^n)上有穷测度，$n\geq2$，则

$$\int_{R^n}\frac{\mu(dx)}{|x-y|^{n-2}}<\infty\qquad(L-a.e)\qquad(19)$$

证 以K表(18)中$A(y)$的一上界。有

$$\int_{B_r}\int_{R^n}\frac{\mu(dx)}{|x-y|^{n-2}}dy=\int_{R^n}\left(\int_{B_r}\frac{dy}{|x-y|^{n-2}}\right)\mu(dx)$$

$$\leq K\mu(R^n)<\infty$$

故(19)中积分在B_r上有穷(L-a.e)。再由$R^n=\bigcup_{r=1}^{\infty}B_r$ (r-正整数)即得证(19)#。

以C_0表R^n上全体连续。而且满足$\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=0$的函数$f(x)$的集。

引理4 设$f\in C_0$而且L-可积。则当$n\geq3$。有

$$g(y)\equiv\int_{R^n}\frac{f(x)}{|x-y|^{n-2}}dx\in C_0$$

证

$$|g(y)-g(y_0)|=\left|\int_{R^n}\frac{f(y+x)-f(y_0+x)}{|x|^{n-2}}dx\right|\leq$$

$$\leq2\|f\|\int_{|x|<\delta}\frac{dx}{|x|^{n-2}}+\frac{1}{\delta^{n-2}}\int_{|x|\geq\delta}|f(y+x)-$$

$$-f(y_0+x)|dx \qquad (20)$$

其中$\|f\|=\sup\limits_{x}|f(x)|$。对任意$\varepsilon>0$。如引理2证明所述。

可选$\delta>0$充分小，使(20)中右方第一项小于$\varepsilon/2$。固定此δ，由勒贝格收敛定理，当$y\to y_0$时，第二项趋于0。此得证$g(y)$的连续性。

为证 $\lim\limits_{|y|\to\infty} g(y)=0$。任取 $0<r<s$，则

$$g(y)=\left(\int_{|x|\geq s}+\int_{s\geq|x|>r}+\int_{r\geq|x|}\right)\frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}}dx$$

对任意$\varepsilon>0$，由于f可积，可选s充分大，以便

$$\left|\int_{|x|>s}\frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}}dx\right|\leq\frac{1}{s^{n-2}}\int_{R^n}|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{3};$$

次取r充分小，以便

$$\left|\int_{r\geq|x|}\frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}}dx\right|\leq\|f\|\int_{r\geq|x|}\frac{dx}{|x|^{n-2}}<\frac{\varepsilon}{3};$$

最后

$$\left|\int_{s\geq|x|>r}\frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}}dx\right|\leq\frac{1}{r^{n-2}}\int_{s\geq|x|}|f(x+y)|dx$$

由于 $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z)=0$，存在$a>0$，当$|y|>a$时，上式右方项小于$\varepsilon/3$。综合上述，当$|y|>a$时，$|g(y)|<\varepsilon$ #

§2 布朗运动略述

(一)定义 设(Ω, $\mathcal{F}$, P)为概率空间。其中$\Omega=(\omega)$是基本事件ω所成的集，$\mathcal{F}$为Ω中子集的σ代数，P为$\mathcal{F}$上的概率测度。考虑定义在此空间上的随机过程$\{x(t,\omega), t\geq 0\}$，它取值于R^n。有时也记$x(t,\omega)$为$x_t(\omega)$或$x(t)$或x_t。

称X为n维布朗运动，如果它满足：

(i)对任意有限多个数$0\leq t_1<t_2<\cdots<t_m$，

$$x(t_1),\ x(t_2)-x(t_1),\ \cdots,\ x(t_m)-x(t_{m-1})$$

互独立；

(ii)对任意$s\geq 0$，$t>0$，增量$x(s+t)-x(s)$有n维正态分布，密度为

$$p(t,x)=\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right),\quad (x\in R^n) \tag{1}$$

(iii)对每固定的ω，$t\to x(t,\omega)$连续。

(1)式给出$x_{s+t}-x_s$的密度；至于x_t的分布，则依赖于开始分布，即x_0的分布。设

$$\mu(A)=P(x_0\in A),\qquad A\in\beta^n$$

由$x_t=(x_t-x_0)+x_0$及(i)和卷积公式，得

$$P(x_t\in A)=\int_A\left[\int_{R^n}\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)\mu(dx)\right]dy \tag{2}$$

为了强调开始分布μ的作用，记

$$P_{\mu}(x_t \in A) = P(x_t \in A) \tag{3}$$

<u>引理1（正交不变性）</u> 设H是R^n中正交变换，则$HX \equiv HX \equiv \{Hx_t, t \geq 0\}$也是n维布朗运动。

<u>证</u> 由于

$$Hx_{s+t} - Hx_s = H(x_{s+t} - x_s)$$

只依赖于$x_{s+t} - x_s$故由X的增量独立性即得HX的增量独立性。其次，X对t连续，故HX亦然。最后，由(1)，$x_{s+t} - x_s$有特征函数为

$$Ee^{i(x_{s+t} - x_s, y)} = e^{-(y, y)t/2}, \quad (y \in R^n) \tag{4}$$

由于正交变换保持内积不变，并利用(4)以及H^{-1}也是正交变换，得

$$Ee^{i(H(x_{s+t} - x_s), y)} = Ee^{i(x_{s+t} - x_s, H^{-1}y)}$$

$$= e^{-(H^{-1}y, H^{-1}y)t/2} = e^{-(y, y)t/2} \tag{5}$$

故$Hx_{s+t} - Hx_s$也有分布密度为(1)#

类似易见。

<u>平移不变性</u> 设定点$a \in R^n$，则$\{x_t + a, t \geq 0\}$也是布朗运动；

尺度不变性　设常数 $c>0$。则 $\{\frac{x(ct)}{\sqrt{c}},\ t\geq 0\}$ 也是布朗运动。

(二) 转移密度 $p(t,x,y)$ 的性质。定义

$$p(t,x,y)\equiv p(t,y-x)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) \quad (6)$$

其中 $t>0$，$x\in R^n$，$y\in R^n$。由 (2) 可见。如 $x_0(\omega)\equiv x$，或 μ 集中在点 x 上。并记 P_μ 为 P_x 则有

$$P_x(x_t\in A)=\int_A p(t,x,y)dy \quad (7)$$

故直观上可理解 $p(t,x,y)$ 为：作布朗运动的粒子，自点 x 出发，于时刻 t 转移到点 y 附近的转移密度。显然，它关于 x，y 是对称的。

下列简单定理是布朗运动与牛顿位势重要联系之一。因为 $g(x,y)$ 正是牛顿位势的核 ($n\geq 3$ 时)。

定理1

$$g(x,y)\equiv\int_0^\infty p(t,x,y)dt=\begin{cases} C_n/|x-y|^{n-2} & (n\geq 3); \\ \infty & (n\leq 2) \end{cases} \quad (8)$$

其中 C_n 为常数：

$$\dot{C}_n=\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{2\pi^{n-2}}=\begin{cases}1/2\pi & n=3\text{时,}\\ 1/2\pi^2 & n=4\text{时。}\\ 1.3.\cdots(2K-3)/(2\pi)^K & n=2K+1>3\text{时}\\ 1.2.\cdots(K-2)/2\pi^K & n=2K>4\text{时}\end{cases}\tag{9}$$

证 对 $s>0$ 有

$$\int_0^s p(t,x)dt=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^s\frac{1}{t^{n/2}}\exp(-\frac{|x|^2}{2t})dt$$

$$=\frac{|x|^{2-n}}{2\pi^{n/2}}\int_{\frac{|x|^2}{2s}}^{\infty}u^{\frac{n}{2}-2}e^{-u}du,$$

$$(u=\frac{|x|^2}{2t})\tag{10}$$

注意当且只当 $a>0$ 时，$\int_0^\infty u^{a-1}e^{-u}du$ 收敛。在上式中令 $s\to\infty$，即得

$$\int_0^\infty p(t,x)dt=\begin{cases}C_n/|x|^{n-2}, & (n\geq 3)\\ \infty & ,\quad (n\leq 2)\end{cases}\tag{11}$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi^{n/2}}\int_0^\infty u^{\frac{n}{2}-2}e^{-u}du=\Gamma(\frac{n}{2}-1)/2\pi^{n/2}\tag{12}$$

以$y-x$代入(11)中的x即得(8)#

比较§1(15)，可见

$$C_n=2/(n-2)|S_1| \tag{13}$$

设$f(x)$为定义在R^n上的函数。令

$$\left.\begin{aligned} B&=(f:\ 有界,\ \beta^n可测);\\ C&=(f:\ f\in B,\ f连续);\\ C_0&=(f:\ f\in C而且\ f(\infty)\equiv\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0 \end{aligned}\right\}\tag{14}$$

又令$\|f\|=\sup_x|f(x)|$。对$f\in B$，定义变换T_t

$$T_tf(x)=\int_{R^n}f(y)p(t,x,y)dy,\quad (t>0) \tag{15}$$

显然

$$\|T_tf\|\leq\|f\|,\qquad \|T_t\|\leq 1 \tag{16}$$

引理2 (i) $T_tB\subset C$; (ii) $T_tC_0\subset C_0$

证 对$f\in B$有

$$|T_tf(x)-T_tf(x_0)|$$

$$\leq\|f\|\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\int_{R^n}\left|e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}-e^{-\frac{|x_0-y|^2}{2t}}\right|dy$$

由勒贝格定理，当$x\to x_0$时，右方趋于0。此得证(i)。