初中代数
百题多解法

广西教育出版社

初中代数百题多解法

周泳港　王犁平　编著

广西教育出版社

初中代数百题多解法

周泳港　王犁平　编著

☆

广西教育出版社出版

（南宁市七一路7号）

广西民族印刷厂印刷　广西新华书店发行

*

开本 787×1092　1/32　5.25 印张　113 千字

1988年8月第1版　1991年7月第4次印刷

印 数 44,101—59,600 册

ISBN 7-5435-0355-7/G·300

定价：1.65 元

前　言

为了帮助中学生及自学青年学好中学代数知识，我们曾于1985年选编了一本《中学代数百题多解法》．出版以后，得到广大读者的欢迎，并给我们提了许多宝贵意见，特别初中程度的读者要求照顾他们的特点，希望有一本更适合他们的同类读物，为此，我们选编了这本《初中代数百题多解法》．

本书着眼于初中代数各部分内容中常用的、典型的解题方法，以及在运用这些方法中常用的、基本的技巧．故此每道题的解法，均以采用不同的方法或在技巧上具有特点时才加以选编，至于实质一样而仅在形式上稍加变动的情况，一般就不作为不同的解法加以介绍，总之不为“多解”而多解．

为了帮助读者加深理解，提高解题思维能力，我们在每种解法前给出分析，其作用为描述得出最终解答所经过的主要步骤，并力图阐明采取这些步骤的动机和想法；每一道题后作出简评，指出各种解法的优劣和关键之处，并总结一般的解题规律．

希望读者参照本书介绍的方法，在学习数学的过程中，经常进行分析，养成探索不同方法解题的习惯，然后加以对比、小结，得出自己的体会，从而提高解题能力．

由于水平所限，错误难免，不当之处敬祈指正．

编著者

目　　录

实　　数

1. a能被42整除，又能被55整除，a能被$42\times55=2310$整除吗？ b能被42整除,又能被90整除，b能被$42\times90=3780$整除吗？

分析1　对能被整除的两个整数分解质因数,看是否有相同的因数而进行判定.

解法1　$\because$ $42=2\times3\times7$，$55=5\times11$，$90=2\times3^2\times5$，

$\therefore$　a有质因数2、3、7、5、11，

$\therefore$　a能被$2\times3\times7\times5\times11=2310$整除.

而　b有质因数2、3^2、5、7，

$\therefore$ b能被$2\times3^2\times5\times7=630$整除，但不一定能被$42\times90=3780$整除.

分析2　考虑能被整除的两个整数的最小公倍数，与a、b对比进行判定.

解法2　$\because$42，55的最小公倍数是$42\times55=2310$，

$\therefore$满足能被42整除又能被55整除的最小整数就是$42\times55=2310$。

又$\because$　42，90的最小公倍数是630，

$\therefore$ 满足能被42整除又能被90整除的最小整数是630，故b不一定能被3780整除.

简评　解法1应用整数分解质因数的方法，在本题及多种整数运算的问题上，都是稳妥可靠的方法. 解法2应用最小公倍数的概念，这种解题的思路有较大的参考价值.

2．选择题*：如果 $p\geqslant 5$ 是一个质数，那么24整除p^2-1成立．

（A）是不可能的；　　（B）只是 $p>5$ 时可能；

（C）只是 $p=5$ 时可能；（D）总是可能的．

分析1　写出 p 的代数式的可能形式，从得出p^2-1的可能有的因数去进行判断．

解法1　$\because$ $p\geqslant 5$ 且 p 为质数，于是：

（1）p 总可写成 $p=3k-1$或$p=3k+1(k\geqslant 2)$．

$\therefore$　$p+1=3k$ 或 $3k+2$，

$p-1=3k-2$ 或 $3k$．

故　$p^2-1=(p+1)(p-1)$可被3整除．

（2）p 总可写成$p=8k-3$，或$p=8k-1$，或 $p=8k+1$，或 $p=8k+3(k\geqslant 1)$，

$\therefore$　$p+1=2(4k-1)$或 $8k$ 或 $2(4k+1)$或 $4(2k+1)$，

$p-1=4(2k-1)$或 $2(4k-1)$或 $8k$ 或 $2(4k+1)$，

$\therefore$　$p^2-1=(p+1)(p-1)=8(4k-1)(2k-1)$，

或 $16k(4k-1)$，或$16k(4k+1)$，或$8(2k+1)(4k+1)$，

故　p^2-1 可被8整除．

因此24整除 p^2-1 总是可能的．

$\therefore$　选择答案(D)．

分析2　由于选择题答案唯一，故可考虑用验值法对各选择支进行筛选排除．由于已知条件 $p\geqslant 5$，而选择支中分出 $p>5$ 及$p=5$两支，所以$p=5$应是首选之值．

解法2　当$p=5$时，$p^2-1=24$可被24整除，

$\therefore$　（A）是不可能的，应予排除；

---

* 有且只有一个答案正确，以后的选择题均如此．

(B)只是 $p>5$ 时可能，也应予以排除。

又当 $p=7$ 时，$p^2-1=48$可被24整除，

∴ (C)只是当 $p=5$ 时可能，应予排除。

故 应选择答案(D)。

分析3 把 p^2-1 变形为$\frac{(p-1)p(p+1)}{p}$,对其分子进行讨论，从而得出相应的结论。

解法3 ∵ $p^2-1=\frac{(p-1)p(p+1)}{p}$,

而 $p-1$，p，$p+1$是三个连续的整数，其中必有一个是3 的倍数，

∴ $(p-1)p(p+1)$ 含有因数3。

∵ $p\geqslant 5$ 是质数，故 p 不可能是偶数。

∴ $p-1$ 和 $p+1$都是偶数。

设 $p-1=2k$，则$p+1=2k+2=2(k+1)$，此时：

当 k 为偶数，即$k=2m$时，

$(p-1)(p+1)=2\times 2m\times 2(k+1)=8m(k+1)$,

含有因数8；

当 k 为奇数，即$k=2m+1$时，

$$(p-1)(p+1)=2\times(2m+1)\times 2(2m+1+1)$$

$$=8(2m+1)(m+1),$$

含有因数8。

∴ $(p-1)p(p+1)$含有因数 24。

但$\frac{(p-1)p(p+1)}{p}$的分母 $p\geqslant 5$ 为质数，与24 的质因数

3，2互质，不可能进行约分。

故$\frac{(p-1)p(p+1)}{p}$即$(p-1)(p+1)=p^2-1$含有因数24，从而可被24整除。

∴ 选择答案(D)。

简评 在各选择支中，(A)与(B)、(C)、(D)是互相排斥的，所以当后三者特别是(B)、(C)之一验值成立时便可予以排除。而(B)、(C)之间的关系又是互不相容的，此二者验值同时成立即同时予以排除，解法2应用各选择支之间的这种逻辑关系，从而正确、迅速地作出选择，这是解这种选择题特有的有效方法之一。解法1、3也有独到之处，可作为参考。

3．试证任一自然数的立方可分解为两个自然数平方之差。

分析1 首要的问题是设出表示自然数立方的代数式以及两个数平方之差的代数式，如果命题成立的话，那么它们相等时可得这两个数为自然数，注意到两数平方差可以分解因式，所以，就可能得到一个方程组，从方程组的解可以进行讨论。

证法1 设n是自然数，x、y是任意的两个整数，且$x>y>0$。

若 $x^2-y^2=n^3$，

则 $(x+y)(x-y)=n^2\cdot n$，

而 $n^2>n$，$x+y>x-y$，

那么$x+y=n^2$，$x-y=n$是可以的。

$$\therefore \begin{cases} x+y=n^2, \\ x-y=n. \end{cases} \text{解之得} \begin{cases} x=\dfrac{n(n+1)}{2}, \\ y=\dfrac{n(n-1)}{2}. \end{cases}$$

$\because$ n、$n+1$ 是两个连续的自然数，

$\therefore$ $n(n+1)$ 必然是偶数，$x=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 必然是自然数。

同理，$y=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 必然是自然数。

$\therefore$ $n^3=x^2-y^2$ 中，x、y 可以是自然数。

注 由 $(x+y)(x-y)=n^2\cdot n$ 得到 $x+y=n^2$ 和 $x-y=n$ 不一定是唯一的，证题不要求"唯一"，只要求"可以"，故只要是"可以"的，证题就可进行下去.

分析2 由乘法公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 和 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，可得到 $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$，不妨把它叫做"和差积恒等式"，利用这个恒等式对一个自然数的立方进行变换.

证法2 设 n 为自然数，$a=n^2$，$b=n$，则根据"和差积恒等式"可得：

$$4ab=(a+b)^2-(a-b)^2,$$

即 $$4n^2\cdot n=(n^2+n)^2-(n^2-n)^2,$$

即 $$n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2.$$

由于 $n(n+1)$ 是偶数，故 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 是自然数. 同理 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 是自然数，

$\therefore$ n^3可分为两个自然数平方差.

简评 两种证法都是以$n^3=n^2\cdot n$为起点，这是关键之处. 证法2由于巧用乘法公式,过程较简捷,是较好的方法. 证法1对方程组的处理方式不常用，要注意其适用的条件.

4. 证明$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$是一个自然数.

分析1 原式两项根号下试行配方,得到完全平方后就可以进行开平方化简.

证法1 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$

$$=\sqrt{9+2\times 3\sqrt{2}+2}+\sqrt{9-2\times 3\sqrt{2}+2}$$

$$=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{2})^2},$$

$\because$ $3>\sqrt{2}$,

$\therefore$ $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}$

$$=6.$$

分析2 设原式为x，两边平方后化简，然后再开平方.

证法2 设 $x=\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$，则$x>0$.

从而 $x^2=11+6\sqrt{2}+2\sqrt{11+6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{11-6\sqrt{2}}$

$$+11-6\sqrt{2}$$

$$=22+2\sqrt{49}$$

$$=36,$$

$\therefore$ $x=\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=6.$

分析3 对原式两项进行换元,由于它们分别表示相同两数和及差的算术根，所以平方和及积都可以得出自然数，从

而可进一步靠拢求证的目标。

证法3 设$u=\sqrt{11+6\sqrt{2}}$，$v=\sqrt{11-6\sqrt{2}}$，则$u>0$，$v>0$。

从而 $u^2+v^2=11+6\sqrt{2}+11-6\sqrt{2}=22$， (1)

$$uv=\sqrt{11+6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{11-6\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{49}=7, \qquad (2)$$

(1)+(2)×2得 $(u+v)^2=36$。

∵ $u+v>0$，

∴ $u+v=\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=6$。

注 用上述三种方法可以证明$\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}$是一个无理数.

简评 数字配方是一种基本的方法，证法1运用自如。两边平方的方法对去掉根号也是有效的基本方法，在证法2中得到了充分的体现。换元法是技巧性的方法，有很广泛的应用，证法3是较典型的例子。

5．比较a和$\frac{1}{a}$的大小。

分析1 据题意提示$a\neq 0$，即有$a>0$或$a<0$。就绝对值而言，当$|a|>1$时$\left|\frac{1}{a}\right|<1$，当$|a|<1$时$\left|\frac{1}{a}\right|>1$。当$|a|=1$时$\left|\frac{1}{a}\right|=1$。这样，就为讨论大小比较提供了分类的依据。

解法1 当$|a|>1$时，$\left|\frac{1}{a}\right|<1$，

$\therefore \quad |a|>\left|\dfrac{1}{a}\right|$.

此时，如$a>0$，则$\dfrac{1}{a}>0$，得$a>\dfrac{1}{a}$，

如$a<0$，则$\dfrac{1}{a}<0$，得$a<\dfrac{1}{a}$.

但由$|a|>1$仅可得$a>1$或$a<-1$，

$\therefore$ $a>1$ 时，$a>\dfrac{1}{a}$；$a<-1$时，$a<\dfrac{1}{a}$.

当 $|a|<1$ 时，$\left|\dfrac{1}{a}\right|>1$，

$\therefore \quad |a|<\left|\dfrac{1}{a}\right|$.

此时，如$a>0$，则$\dfrac{1}{a}>0$，得$a<\dfrac{1}{a}$，

如$a<0$，则$\dfrac{1}{a}<0$，得$a>\dfrac{1}{a}$.

但由$|a|<1$，$a\neq 0$，仅可得$0<a<1$或$-1<a<0$，

$\therefore$当$0<a<1$时，$a<\dfrac{1}{a}$；$-1<a<0$时，$a>\dfrac{1}{a}$.

当$|a|=1$时，$\left|\dfrac{1}{a}\right|=1$，

$\therefore \quad |a|=\left|\dfrac{1}{a}\right|$

但由 $|a|=1$ 仅可得 $a=\pm 1$

$\therefore$ 当 $a=\pm 1$ 时，$a=\dfrac{1}{a}$.

综上所述可得：

当$-1<a<0$或$a>1$时，$a>\frac{1}{a}$；

当$a=\pm1$时，$a=\frac{1}{a}$；

当$a<-1$或$0<a<1$时，$a<\frac{1}{a}$。

分析2 由于$y=\frac{1}{x}$是反比例函数，$y=x$是正比例函数，当分别作出它们图象时，交点坐标可由方程$x=\frac{1}{x}$解出。此时，由两图象的上、下方区间可以进行大小比较。

解法2 作$y=\frac{1}{x}$及$y=x$的图象如图1。

由$\frac{1}{x}=x$解得$x=\pm1$，从而$y=\pm1$，

∴两图象交点坐标为$(1,1)$及$(-1,-1)$。

当$x<-1$或$0<x<1$时，$y=\frac{1}{x}$图象在$y=x$图象上方，故$\frac{1}{x}>x$；

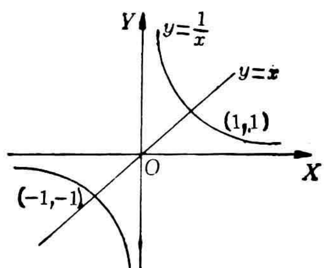

图1

当$x=\pm1$时，$x=\frac{1}{x}$。

当$-1<x<0$或$x>1$时，

$y=\frac{1}{x}$图象在$y=x$图象下方，

故 $\frac{1}{x}<x$.

将上述结果中字母 x 换成字母 a 即可得解.

注 由 $a-\frac{1}{a}>0$ 可得 $a>\frac{1}{a}$，$a-\frac{1}{a}=0$ 可得 $a=\frac{1}{a}$，$a-\frac{1}{a}<0$ 可得 $a<\frac{1}{a}$.解上述不等式和方程可得出 a 的取值范围大小比较，此法称为比较法.读者不妨一试.

简评 两个正实数中，绝对值大的数较大；而两个负实数中，绝对值较大的数较小，所以比较两数大小，既要明确它们是正数还是负数，还要比较它们绝对值的大小，这是解法1的要领，该法分类较多，应避免错、漏.解法2由于从函数图象进行观察，较简明直观，是较好的方法.

代 数 式

一、整式与分式

6．若 $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$，$x+y+z=2$，$xy+yz+zx=-3$，求 $x^4+y^4+z^4$ 的值。

分析1 运用乘法公式

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

对所求式子 $x^4+y^4+z^4$ 逐级配方，以化成含已知各式的形式。

解法1 $x^4+y^4+z^4$

$$\begin{aligned}
&=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\\
&=[(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)]^2\\
&\quad -2[(xy+yz+zx)^2-2xy\cdot yz-2yz\cdot zx\\
&\quad -2zx\cdot xy]\\
&=[(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)]^2\\
&\quad -2(xy+yz+zx)^2+4xyz(x+y+z).
\end{aligned}$$

$\because$ $x+y+z=2$，$xy+yz+zx=-3$，

$xyz=(x+y+z)(xy+yz+zx)=-6$，

$\therefore$ $x^4+y^4+z^4$

$=[2^2-2\times(-3)]^2-2\times(-3)^2+4\times(-6)\times2$

$=34$。

分析2 考虑从已知条件$(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$入手，如果能分解因式的话，可望得出x、y、z之间的关系。

解法2 由已知条件得

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz=0,$$

$$\therefore\quad xy^2+xz^2+yz^2+yx^2+zx^2+zy^2+2xyz=0,$$

$$(xy^2+yx^2+zx^2+xyz)+(xz^2+yz^2+zy^2+xyz)=0,$$

$$x(y^2+xy+xz+yz)+z(xz+yz+y^2+xy)=0,$$

$$(x+z)[(y^2+xy)+(xz+yz)]=0,$$

$$(x+z)[y(x+y)+z(x+y)]=0,$$

$$(x+y)(y+z)(z+x)=0,$$

从而　$x+y=0$，或$y+z=0$，或$z+x=0$。

若$x+y=0$，则由$x+y+z=2$可得$z=2$，由$xy+yz+zx=-3$得$xy=-3$。

但$x=-y$，$\therefore x^2=3$，$x=\pm\sqrt{3}$，$y=\mp\sqrt{3}$。

故　$x^4+y^4+z^4=(\pm\sqrt{3})^4+(\mp\sqrt{3})^4+2^4=34$。

同理，当$y+z=0$或$z+x=0$时，亦可求得相同结果。

简评 解法2是把已知条件作为一个三元三次方程组来处理，一般来说这样的方程组并不好解，但是，如解法中用因式分解得到x、y、z的关系以后，也就化难为易了。解法1连续使用三数和平方公式变形，其余无甚大难点，所以应以解法1为好。

7. 已知$x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，求$3x^2-5xy+3y^2$的值。