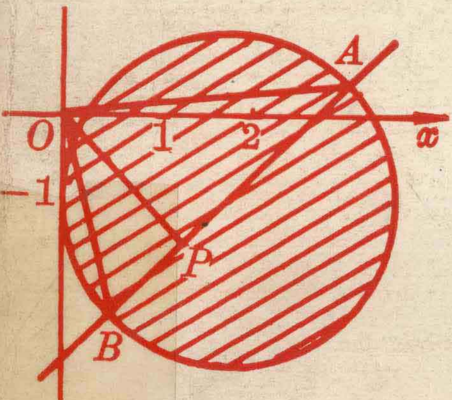
杨安澜 蔡武冈 主编



高考数学知识、能力和方法的剖析

上海科学技术出版社

高考数学知识、能力和方法的剖析

杨安澜　蔡武冈　主编

上海科学技术出版社

高考数学知识、能力和方法的剖析
杨安澜　蔡武冈　主编
上海科学技术出版社出版、发行
(上海瑞金二路450号)
新华书店上海发行所经销　上海市印刷十二厂印刷
开本 787×1092　1/32　印数 10.75　字数 237,000
1994年4月第1版　1994年4月第1次印刷
印数：1—5,000

ISBN 7-5323-3390-6/G·599
定价：5.60元

(沪)新登字108号

前　言

自1985年以来，国家教委考试管理中心、上海市教育考试中心，以及广东等地方教育考试中心的同志们对高考的命题方向和原则，做了大量的科研和实践工作.纵观八年来的高考试题，已形成了适合于中国实情的高考命题的原则.具体表现在三个不改变：一是纲本原则不变，考题不超纲，不超教材；二是三考不变，考基础、考能力、考方法不变；三是四个结构不变，试题的题型不变，考查各学科的比例不变，考查知识的重点不变，试题的总体难度要求不变. 稳是相对的，每年稳中也有所变，这种变主要是考查的侧重点有所转移；设计的难度与实施后的所得到结果有差异，造成难度有起有伏.这种变化，有的是为了适应选拔人才需要，有的是在探索中所引起的微波，无论从那个角度来说，历届高考试题都是一份极为好的资料，正确地剖析它，从中得出规律，将有利于指导我们中学的数学教学.

本书试图从1985～1992年的全国卷(理科)、上海卷(理科)、广东卷(至90年、理科)的命题要求中，归纳出在中学数学教学目标中的三个不同层次的能力要求。A级是理解并运用双基的能力；B级是具有三大基本能力能够灵活解题；C级是具有综合运用能力的综合题.为了便于读者的使用，本书的第一章是总体回顾了八年来高考数学命题的要求，详述了三级能力要求的内涵，并且对高考的复习作了一点指导. 第二章是基础篇，其中分代数、三角、立体几何、解析几何篇，每一篇

都按教学大纲的纲目讲述了基本能力要求，并举例作了分析，还配上了相关的历年考题，既用作备查，又可供读者练习．第三章是综合篇，其中包括了关于分类和讨论等十个问题，以供读者按专题学习和查阅．我们认为这样一本书籍，既是一本高考试题的大全，又是一本十分有用的高考复习课本，愿它会受到广大师生的欢迎．

参加本书编写的作者，还有张光华老师、李家元老师、徐宗楹老师、郁汝缪老师和徐士德老师．在编写过程中还得到上海教育考试中心陈家驹同志的热忱指导，还有许多同志提供资料，为此，一并致谢．

因编写时间匆促，编者水平有限，本书难免有不当之处，望读者和有关专家提出宝贵意见．

编　者

1993年8月于上海

目　　录

第一章　高考数学试题的回顾和评析

正确探究高考试题，对中学教学是有积极作用的，自1985年以来，中央和地方的教育部门，在贯彻“既有利于高等学校选拔合格的新生，又有利于促进中学的数学教学改革”的高考命题指导方针，做了大量的研究和实践工作。特别是近几年来，又遵循“不超过现行数学教学大纲规定的内容，不超过现行课本所能达到的程度”的原则，高考数学命题，基本上杜绝了偏题、怪题、超纲题。题型结构稳定，覆盖面广，容量较大，知识比例适当，重点突出，为中学数学教学创造了一个良好的环境。

自 1985 年至今的八年来，高考数学的全国、上海、广东卷（广东至 1991 年）为我们提供了一份丰富的资料，悉心研究，就可归纳出试题的特点、命题的规律，从而更正确地掌握高中数学的教学要求，把握住会考和高考的尺标，以全面地提高中学数学教学的质量。

一、高考数学试题的特点

1. 题型稳定

1992 年全国高考试卷中，选择题与填空题的分值之和占全卷的 57.8%；上海高考试卷中，选择题、填空题与简答题分值之和占全卷的64%

全国试卷的题型(理科)：

年份 分数 题型	1988	1989	1990	1991	1992
选择题	45	36	45	45	54
填空题	20 (简答)	24	15	15	15
解答题	55	60	60	60	51

上海试卷的题型(理科)：

份 分数 题型	1988	1989	1990	1991	1992
填空题	30	30	30	30	30
选择题	30	30	30	30	30
简答题	30	30	30	30	36
解答题	60	60	60	60	54

2. 覆 盖 面 大

全国高考数学理科试题考查知识点的个数：

年份 个数 项目	1988	1989	1990	1991	1992
部颁大纲知识点个数	132	132	132	132	132
高考考查知识点	65	74	85	89	88
占百分比(%)	49	56.0	63.8	67.4	66.7

上海高考数学试卷考查知识点的个数：

项目 \ 个数 \ 年份	1988	1989	1990	1991	1992
部颁大纲与上海考试说明知识点个数	132	132	132	122	122
高考考查知识点	72	78	80	89	79
占百分比(%)	54.5	59.1	60.6	72.9	61.4

各类试题考查的知识点都占大纲规定知识 点 的 60% 以上，自 1991 年起上海制定了高考说明，其中规定的知识点为 122个。

3. 比 重 适 当

高考中各科所占的比重与教学时数一致。高中数学按教学大纲规定总时数为 303 课时，代数占 49%，三角占 24%，立体几何占 19%，解析几何占 21%。而近几年来各类试卷的比分如下表：全国高考数学试题中各科的分数

目 \ 分数 \ 年份	1988	1989	1990	1991	1992	各科约占比重
代　　数	46	62	55	51	49	40.8%
三　　角	25	18	23	20	22	18.3%
立体几何	18	20	11	22	22	18.3%
解析几何	31	20	25	27	27	22.6%

上海高考数学试卷中各科的分数

项目 \ 分数 \ 年份	1988	1989	1990	1991	1992	各科约占比重
代　数	54	65	59	63	65	43.3%
三　角	30	22	22	20	21	14%
立体几何	32	24	31	29	28	18.7%
解析几何	34	39	38	38	36	24%

4. 起点较高

在各类试题设计上，突出体现了考查能力和智力素质的要求.试卷的容量较大，是起点高的标志之一. 以解题速度的快慢来区分考生. 以 1989 年试卷为例，全国卷平均 4 分钟答1小题，上海卷 3.9 分/小题，广东卷3.95分/小题，如全国卷第16题，"已知$(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，求$a_1+a_2+\cdots+a_7$的值". 要求考生只要令 $x=1$，而 $a_0=1$，就可以得到答案：-2. 由于试卷题量大，就要学生在解答填空题时，运算熟练、正确.解选择题时会用直接法、排除法、代入法等技巧.

各类试题的起点，都是以"活"题的形式，考查知识和能力.如果把基础题(选择题、填空题、简解题)的难度分为简单、中等、稍难三档，那么以 1989 年试卷为例，全国卷比例为 2∶9∶9，上海卷1∶7∶2，广东卷1.7∶5.8∶2.5. 试卷的起点是中等的，就是要用两个知识点和两个以上的技能的变换才能得分.如全国卷的第 5 题，已属"稍难"档的，"已知$\{a_n\}$是等比数列，如果$a_1+a_2+a_3=18$，$a_2+a_3+a_4=-9$，且$S_n=a_1+a_2+$

$\cdots + a_n$，求 S_n 的值”。它考查了等比数列的通项公式、无穷递缩等比数列所有项和的概念、多项式变换法则、极限的概念和计算。简答如下：

$\because\quad a_1(1+q+q^2)=18$，①；$a_2(1+q+q^2)=-9$，②

用②÷①得，$\dfrac{a_2}{a_1}=q=-\dfrac{1}{2}$。又可得 $a_1=24$。

$$\therefore\qquad \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}=16.$$

这类试卷对于习惯于死记硬背公式的考生来说，是难以迅速求得结果。

又如1992年上海试卷第3题，“函数 $y=\sin^2x-\sin x\cos x+\cos^2x$的最大值是________”。此题把三角函数的变换和三角函数的有界性、最值等知识结合起来考查，构成一个中档的基础题。

按国家考试中心1991年颁发的《考试说明》的要求，全卷试题题型为选择题、填空题和解答题，分值比例为35%，15%和50%。易、中、难试题的分值之比约为3∶5∶2。每个题的难度不应低于0.2，试卷总体难度在0.55左右。上海教育考试中心颁发的《上海卷考试说明》也明确规定基础部分占70%，有一定深度的试题占30%。而基础题考查水平识记级是很少的，侧重于灵活地运用基础知识和基本技能。

5. 富有新意

近几年在继承过去已形成的风格的基础上，部分试题力求富有新意。这主要是考查学生的潜在的学习能力。

如1991年全国理科卷第(5)题：

函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{2}\right)$的图象的一条对称轴的方程是

(　　)。

(A)　$x=-\frac{\pi}{2}$；　　(B)　$x=-\frac{\pi}{4}$；

(C)　$x=\frac{\pi}{8}$；　　(D)　$x=\frac{5\pi}{4}$。

考查这题目没有要求求出函数 $y=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)$的所有对称轴方程，而是给出四条直线让考生判定选择．如果考生根据对称轴的概念，采用特殊值法，若对称轴为$x=-\frac{\pi}{2}$，则用 $x_1=0,x_2=\pi$ 分别代入$\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)$就可判断选择(A)。

又如 1992 年上海试卷第 12 题：

下列函数中，在区间(0,1]上为减函数的是(　　)。

(A)　$y=\log_2 x$；　　(B)　$y=x^{\frac{1}{3}}$；

(C)　$y=\cos x$；　　(D)　$y=\arcsin x$。

此题全面考查了中学常见的四个基本函数的单调性，特别是要判断余弦函数在区间(0,1]上的单调性，是有新意的。题目考查的知识点多，试题又很完美，具有较好的区分度。

近几年来，对最后一题的压轴题在命题形式上也有变化。一方面适当地降低难度，另一方面把过去一题把关改为多题把关．这样的试卷具有更好的筛选功能。

6. 突 出 重 点

在高考试题的选题和编题时，既要考查中学数学的重点，又注意到考生在入大学后学习高等数学时的基础知识和能力的检查，因此高考命题中一般都以函数为纲，以数式运算能力为本，全面考查解析几何知识，侧重考查空间线面位置关系。

函数思想是近代数学中的重要思想方法，其内容除涉及集合、函数本身的性质、变换外，还渗透在解析几何、立体几何之中，无所不及。如 1992 年上海试卷，第 8、7 题考查了函数与反函数的概念，求定义域的方法；第 12 题考查函数的单调性；第 14 题考查函数周期性；第 18 题考查函数的值域；第26题考查函数的最值；第 11 题考查函数的图象。总计考分占 25.3%。

全部平面解析几何是在中学学完了，因此在高考中总要作全面的考查，重点一般是圆锥曲线，立体几何大题都是以中档题出现，并且大部分都给出了考题有关的图形，重点是空间的线面关系。

7. 注 重 方 法

近几年来，试题注重了对考生掌握数学思想方法的考查。其中，逻辑划分的分类思想；映射反演的思想；等价与非等价转化的思想分析；综合、演释、归纳、类比的思想；形与数互相转换的思想等等，都已成为选拔考生的重要方面。如1991 年全国理科试卷第 (25) 题：

已知：n 为自然数，实数 $a>1$ 解关于 x 的不等式

$$\log_a x-4\log_{a^2}x+12\log_{a^3}x+\cdots+n(n-1)^{n-1}\log_{a^n}x$$
$$>\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a(x^2-a).$$

解此题时，先用换底公式把原不等式化为等价的下列不等式 $\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a x>\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a(x^2-a)$。 ①

再用分类思想方法，以 n 为奇数、偶数两类，把①又化为等价的 $\log_a x>\log_a(x^2-a)$（n 为奇数）；$\log_a x<\log_a(x^2-a)$（n 为偶数），进而把上面两个不等式化为等价的不等式组，求得不等式的解集。只要掌握了正确的数学思想方法，就可

以化难为易。

又如1989年全国理科卷第22题：

已知$a>0, a\neq 1$，试求使方程$\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$有解的$k$的取值范围，这是一个代数题，用代数方法求解，运算较繁。如果把它转化为几何问题，用形数结合思想就可以用简便方法求得解答。

因为原方程等价于$\log_a(x-ak)=\log_a\sqrt{x^2-a^2}$。也只要考虑半直线$y=x-ak(y>0)$和双曲线$y=\sqrt{x^2-a^2}(y>0)$的部分有交点（图1.1）。而直线$y=x-ax$平行于双曲线的一条渐近线$y=x$，故只须$-a<-ak<0$或$-ak>a$，即$0<k<1$或$k<-1$。就是，$k\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$时，原方程有解。

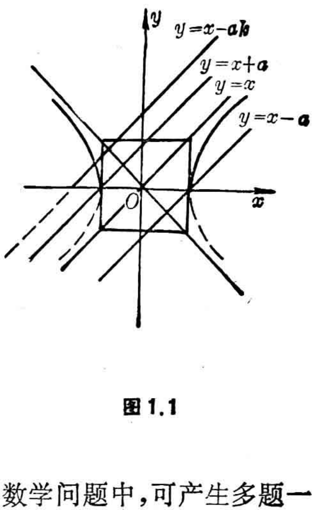


图1.1

由此可见，解题的过程实质上是命题的不断转换和数学方法的反复运用的过程。同一个数学问题的解决，受不同的数学思想的指导，运用不同的数学方法，会产生一题多解；受同一数学思想指导，运用同一数学方法于不同的数学问题中，可产生多题一解。因此数学方法在解题活动中起着指导作用。

8. 考查能力

《上海卷考试说明》明确指出，“数学科高考旨在考查中学数学的基础知识、基本技能和逻辑思维能力、运算能力、空间

想象能力以及综合运用能力”。这也是考试的目标。为此，我们将在以下作详细的论述。

二、高考数学的能力要求

在全国卷的《考试说明》中明确规定了，“了解、理解、掌握、灵活运用和综合应用”四个不同层次的能力要求。但是，在实际的数学命题中往往难以区分“了解”和“理解”两个不同的级别。为此，我们把四级并为 A、B、C 三级。

1. A 级——理解并运用基础知识和基本技能的能力

这主要是要求考生了解、理解中学数学的基础知识和基本技能，也就是要求考生对概念、法则、性质、公式、公理、定理等的辨别、记忆、理解和掌握；按照一定的顺序与步骤进行运算和画图的技能。

(1) 对数学概念的辨别与应用能力

数学概念是数学整体结构的支柱。因此，正确掌握概念的内涵和外延，直接应用概念进行辨析、判断，是中学数学所应达到的基本要求。

例 1 设甲、乙、丙是三个命题，如果甲是乙的必要条件；丙是乙的充分条件，但不是乙的必要条件，那么（　　）。

(A) 丙是甲的充分条件，但不是甲的必要条件；

(B) 丙是甲的必要条件，但不是甲的充分条件；

(C) 丙是甲的充要条件；

(D) 丙不是甲的充分条件，也不是甲的必要条件。

（1991年全国理科试题）

这是一个概念辨析试题，只要正确掌握条件与结论的逻辑关系，就能得出正确结论选择A，因为甲$\Leftarrow$乙，乙$\Leftarrow$丙，所以丙$\Rightarrow$甲。

(2) 直接应用公式和法则进行运算的能力

高考的命题要求考生迅速地求得解答。"迅速"不仅要求正确运算，更重要的是依赖概念清晰和基本原理的正确运用。

例2 已知：椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上一点 P 到椭圆一个焦点的距离为3，则P到另一焦点的距离为(　　)。

(A) 2；　(B) 3；　(C) 5；　(D) 7。

根据椭圆的定义$|PF_1|+|PF_2|=2a$，又$a=5$，则$|PF_2|=7$，故应选择D。

(3) 画图的能力

要求考生掌握画出基本初等函数的图象，方程所表示的曲线的大致图象。其中，基本初等函数是指一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数。三角(反三角)函数。方程是指一次方程和简化的二次方程（$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，其中A、C、D、E、F不同时为零）。这类考题的题型，一般是以选择题或作图简答题的形式出现。

例3 图1.2中曲线是幂函数 $y=x^n$ 在第一象限的图象。已知n取±2，$\pm\frac{1}{2}$四个值，相应于曲线C_1、C_2、C_3、C_4的n依次为(　　)。

(A) -2，$-\frac{1}{2}$，2，2；

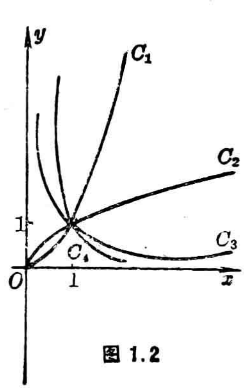


图 1.2

(B)　2，　$\frac{1}{2}$，　$-\frac{1}{2}$，　-2；

(C)　$-\frac{1}{2}$，　-2，　2，　$\frac{1}{2}$；

(D)　2，　$\frac{1}{2}$，　-2，　$-\frac{1}{2}$。

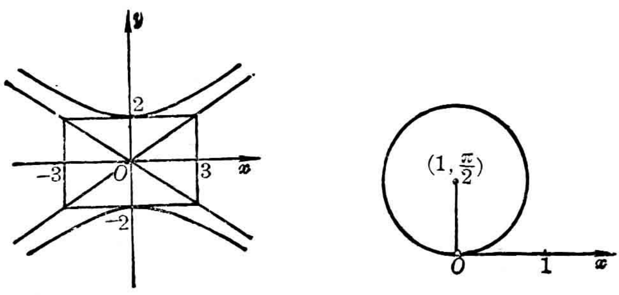
（1992年全国理科试题）

解　先用排除法进行判断。曲线C_1过原点O，故排除选择支中(A)、(C)。再用特殊法选取(B)或(D)。因为取$x=4$时$x^{-\frac{1}{2}}>x^{-2}$。即$x>1$时$x^{-\frac{1}{2}}>x^{-2}$。故应选择B。

例4　1）在直角坐标系内，方程$\begin{cases}x=3\operatorname{ctg}\varphi\\y=2\csc\varphi\end{cases}$（$\varphi$是参数）表示什么曲线？画出它的图形。

2）在极坐标系内，方程$\frac{2\sin\theta}{\rho}=1$表示什么曲线？画出它的图形。

解　1）方程表示的曲线是双曲线，图象如图1.3(1)所示。



(1)　　(2)

图1.3

2）方程表示的曲线是圆（极点除外），图象如图1.3(2)