普通高等教育“十二五”规划教材

国家特色专业建设点建设项目

数学分析立体化教材／刘名生　尹景学 主编

数学分析学习辅导II

——微分与积分

刘名生 韩彦昌
徐志庭 冯伟贞 编著

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

国家特色专业建设点建设项目

数学分析立体化教材/刘名生 尹景学 主编

数学分析学习辅导II

——微分与积分

刘名生 韩彦昌 编著
徐志庭 冯伟贞

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要研究数学分析中的微分与积分及相关的一些问题. 包括一元函数微分学、一元函数微分法的应用、一元函数积分学和多元函数及其微分学等. 本书在内容的安排上, 深入浅出, 表达清楚, 可读性和系统性强. 书中主要通过一些疑难解析和大量的典型例题来解析数学分析的内容和解题方法, 并提供了一定数量的习题, 便于教师在习题课中使用, 也有利于学生在学习数学分析时练习提高.

本书可以与本立体化教材的主教材相关章节配套, 可作为所有学习“微积分”的高等学校学生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析学习辅导. Ⅱ,微分与积分/刘名生等编著. —北京: 科学出版社, 2013

普通高等教育“十二五”规划教材 国家特色专业建设点建设项目 数学分析立体化教材

ISBN 978-7-03-038230-6

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①刘…　Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材 ②微分-高等学校-教材 ③积分-高等学校-教材　Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 174321 号

责任编辑: 姚莉丽 / 责任校对: 刘亚琦
责任印制: 阎　磊 / 封面设计: 陈　敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2013 年 8 月第　一　版　开本: 720 × 1000 B5
2013 年 8 月第一次印刷　印张: 16 1/4
字数: 328 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《数学分析立体化教材》序言

《数学分析立体化教材》通过提供多种教学资源而提出数学分析课程的整体教学解决方案.

本立体化教材包括主教材三册 (纸介质):《数学分析 (一)》、《数学分析 (二)》、《数学分析 (三)》, 学习辅导书两册 (纸介质):《数学分析学习辅导 I —— 收敛与发散》、《数学分析学习辅导 II —— 微分与积分》, 以及《数学分析续论》教材 (纸介质) 和《数学分析网络课程》.

主教材的编写考虑不同教学基础的学校和不同层次的学生在教学方面的不同需求, 在较充分顾及系统的完整性的基础上, 特别标记了选学内容. 对教材中的选学内容可以作灵活取舍及适当调整相关内容的讲授或阅读次序. 我们希望这种编排能更好地帮助教师落实分类、分层教学, 同时使学生获得合理的阅读指引.

在数学分析学习过程中, 学生往往因为欠缺学习自主意识或基础、能力, 难以驾驭一个较大数学知识体系的学习, 造成自我知识体系零碎、割裂, 这是数学分析教学中存在的主要问题及教学难点. 两册辅导书的编写均立足于类比, 希望教学双方在求同存异思想的指引下, 打通知识点的关联, 在反复对比中深化对基本数学思想方法的理解及问题解决技巧的掌握, 从而突破教学障碍.

《数学分析续论》是为已有数学分析基础的大学数学专业高年级学生提升整体分析素质、培养提出问题和分析问题的能力、激发他们对泛分析类课程的兴趣而编写的数学分析续论教材. 该书对传统的数学分析领地稍微作了一些扩张, 简要地介绍广义的 Newton-Leibniz 公式成立的充分必要条件、研究不可导函数极值问题的次微分方法、条件极值问题的惩罚函数方法、泛函条件极值的 Euler-Lagrange 方程及其在控制理论中的简单应用、矩阵函数的运算与分析性质、形式幂级数与 Fourier 变换在热方程求解中的应用以及一元单调函数和有界变差函数的相关知识, 目的在于扩大学生的视野, 使之较为顺利地过渡到相关课程的学习, 获得进一步的提高.

《数学分析网络课程》由课程简介、课程学习、图形与课件、测试题库、方法论、拓展阅读及学习论坛等模块构成, 为教学双方提供了丰富的教学资源. 我们希望这门网络课程能成为实施数学分析混合学习的理想平台.

本立体化教材的编写得到“数学与应用数学国家特色专业建设点”建设项目及“数学与应用数学广东省高等学校重点专业”建设项目的资助, 在华南师范大学数学科学学院 2008 级、2009 级、2010 级、2011 级和 2012 级中试用.

藉此机会感谢华南师范大学数学科学学院领导和科学出版社领导对本立体化教材的编写的大力支持. 对编辑们付出的辛勤劳动, 在此表示由衷的敬意和诚挚的谢意.

希望使用本教材的同行、学生批评指正, 以使本立体化教材进一步完善, 为数学分析课程建设作出更大的贡献.

刘名生　尹景学

2012 年 11 月于华南师范大学

前　　言

数学分析是数学各专业学生任务最重的课程, 一般要三个学期才能完成教学. 对于学生和教师来说, 都希望有一套好的辅导教材. 我们根据多年的教学经验, 在吸取一些现有数学分析辅导教材的优点基础上, 编写了本套辅导教材.

这套书是从收敛与发散、微分与积分两个方向编写的数学分析的学习辅导教材. 我们力求在可读性和系统性上能够编出特色.《数学分析学习辅导 I —— 收敛与发散》主要解决数学分析中的收敛与发散及相关的一些问题. 包括点列的收敛与发散、函数极限的存在性、$\mathbb{R}^n$ 的完备性、反常积分的收敛与发散、数项级数的收敛与发散、函数项级数的收敛与一致收敛, 以及函数的展开与级数的求和.《数学分析学习辅导 II —— 微分与积分》主要研究数学分析中的微分与积分及相关的一些问题. 包括一元函数微分学、一元函数微分法的应用、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数微分法的应用、重积分、曲线积分和曲面积分以及各种积分之间的关系.

首先, 在可读性方面, 每一章都编有疑难解析, 使读者通过阅读疑难解析, 对这一章的主要概念有清楚的认识. 然后通过典型例题讲述这一章的各种典型例题和解题方法, 而且在每个例题中均给出了详细的解法, 涉及的定义和定理都明确指出, 还有“分析”或者“注”, 教会读者如何分析问题和解决问题. 在每章后面还有练习题, 供读者练习使用. 书后还附有练习题的参考答案或提示.

其次, 在系统性方面, 我们理出了“收敛与发散”、“微分与积分”两条主线, 沿着这两条主线, 本着求同存异的思想, 展开对同一维度下的不同模型、不同维度下的同一模型的分析性质的讨论, 使概念、性质及方法的运用共性能够凸显, 并使其中的差异及特点受到关注. 我们将关系较密切的内容放在一起. 例如, 将数列的收敛与发散和点列的收敛与发散放在同一章; 将一元函数极限的存在性和多元函数极限的存在性放在同一章; 将反常积分的收敛与发散和含参变量反常积分的收敛与一致收敛放在同一章; 将函数的展开与级数的求和放在同一章. 这样更容易了解这些内容之间的联系与差别. 我们希望读者通过学习本套教材, 能够清楚理解数学分析中相关内容之间的联系. 例如, 在点列的收敛与发散这一章中, 讲述了数列的收敛与发散和 $\mathbb{R}^n$ 中点列的收敛性, 让学生通过学习与比较, 熟悉 $\mathbb{R}^n$ 中点列的收敛性与数列的收敛性的关系. 在反常积分的收敛与发散这一章中, 讲述了反常积分的收敛与发散和含参变量反常积分的收敛与一致收敛的内容, 使学生在学习含参变量反常积分的内容前, 要先复习反常积分的内容, 并且在学习中, 可以在不断的比

较中掌握它们之间的区别与联系.

本套教材分两册出版.《数学分析学习辅导 I —— 收敛与发散》由刘名生教授、冯伟贞副教授和罗世平博士编写,《数学分析学习辅导 II —— 微分与积分》由刘名生教授、韩彦昌副教授、徐志庭教授和冯伟贞副教授编写. 初稿完成后, 编写组全体成员多次仔细讨论、评阅和修改. 全套教材由刘名生教授和冯伟贞副教授负责编写组织工作.

本套教材在编写过程中得到华南师范大学数学科学学院许多同事的大力支持, 并得到国家特色专业建设点建设项目和广东省高等学校重点专业建设项目的资助. 我们在华南师范大学数学科学学院 2011 级师范班及 2011 级、2012 级勷勤创新班的数学分析课程中试用了本教材, 2011 级师范班及 2011 级、2012 级勷勤创新班的学生为本套教材的完善提供了许多宝贵意见, 在此一并致谢. 我们还要感谢科学出版社的热情关注和大力支持, 使本套教材得以尽早出版.

本套教材中的不足之处在所难免, 敬请读者批评指正.

编　者

2012 年 11 月于华南师范大学

目　　录

第 1 章　一元函数微分学

1.1 疑难解析

1. 对于函数 $y=f(x)$, 什么叫可微? 什么叫微分?

答: 设函数 $y=f(x)$ 在某个 $U(x_0;\delta)$ 内有定义, $x_0+\Delta x\in U(x_0;\delta)$. 如果存在与 Δx 无关的常数 A, 使 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 能表示成

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)\,, \tag{1.1.1}$$

则称函数 f 在点 x_0**可微**, 并称 $A\Delta x$ 为 f 在点 x_0 的**微分**, 记作

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} = A\Delta x \quad \text{或} \quad \mathrm{d}f|_{x=x_0} = A\Delta x\,.$$

2. 对于函数 $y=f(x)$, 什么叫可导? 什么叫导数?

答: 设函数 $y=f(x)$ 在某个 $U(x_0;\delta)$ 内有定义. 如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{1.1.2}$$

存在, 则称函数 f 在点 x_0**可导**, 并称这个极限值为 f 在点 x_0 的**导数**, 记作 $f'(x_0)$, 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

3. 可微、可导、微分、导数都是一回事吗? 它们之间有什么关系?

答: 不是一回事. 可微与可导是指函数在一点的状态, 而微分与导数是与函数在一点的可微与可导性相关的两个量. 对于一元函数来说, 可微与可导是等价的.

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 附近满足式 (1.1.1), 那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微, 此时函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 也可导, 反之亦然. A 就等于函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$, 而 $A\Delta x$ 就是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的微分 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}$. 即函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导与可微是等价的, 当函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导或者可微时, 函数在这点肯定有微分和导数, 但是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的微分与导数一般不相等.

4. 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 存在左导数和右导数, 问 $f(x)$ 在点 x_0 是否可导? 它们之间有什么关系?

答: 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 存在左导数和右导数, $f(x)$ 在点 x_0 不一定可导. 例如, 函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 存在左导数 $f'_-(0)=-1$ 和右导数 $f'_+(0)=1$, 但是 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 不可导.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导当且仅当 $f(x)$ 在点 x_0 存在左导数和右导数, 且左导数等于右导数.

5. 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 存在左导数和右导数, 问 $f(x)$ 在点 x_0 是否连续? 它们之间有什么关系?

答: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 因为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 存在左导数和右导数, 所以函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续和右连续, 因此 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

反过来, 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 不能推出 $f(x)$ 在点 x_0 存在左导数或者右导数. 例如, 函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在点 $x=0$ 连续, 但是 $f(x)$ 在点 $x=0$ 不存在左导数, 也不存在右导数.

6. 微分、导数的几何意义是什么?

答: 微分与导数的几何意义是: 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率, 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的增量 $f'(x_0)(x-x_0)$.

7. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 有切线, 问函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处是否可导?

答: 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 有切线, 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处不一定可导. 例如, 函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处有切线 $x=0$, 但是它在 $x=0$ 处不可导.

如果曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 有不垂直于 x 轴的切线, 那么函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处是可导的.

8. 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 能否推知 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内处处可导? 能否推知 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内处处连续? 能否推知 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义?

答: 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 那么由可导的定义知, $f(x)$ 必然在 x_0 的某个邻域内有定义. 但是, 不能由此推出 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内处处连续, 更不能推出 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内处处可导. 例如, 对于函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}, \end{cases}$$

易证 $f'(0)=0$. 但是 $f(x)$ 在所有 $x\neq 0$ 处都不连续, 更不可导.

9. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 当 $x\neq 0$ 时, $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$. 下面

关于 $f'(0)$ 不存在的两种证明是否正确?

(1) 在等式 $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ 中, 令 $x=0$, 显然没有意义, 所以 $f'(0)$ 不存在;

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right]$ 不存在, 所以 $f'(0)$ 不存在.

答: 这两种分析都不正确. (1) 中的错误是: 只有当 $x\neq0$ 时, 等式 $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$才正确. (2) 中的错误是: 不能由极限 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)$ 的存在性推出 $f'(0)$ 的存在性, 因为只有当 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续时, 才有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}f'(x)$.

正确的方法是按照导数的定义求 $f'(0)$:

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

一般地, 对于分段函数在分段点的导数都要用导数的定义或者左右导数来求.

10. 判断下列命题的真假, 并说明理由:

1) 设 f 在 $x=0$ 处可导, 若 $f(0)=0$, 则 $f'(0)=0$, 反之也成立;

2) 若 f 在 x_0 处可导, 且在 $U(x_0)$ 内 $f(x)>0$, 则 $f'(x_0)>0$;

3) 若 f 为 $[-a,a]$ 上偶函数, 且 $f'(0)$ 存在, 则 $f'(0)=0$;

4) 设 $f=\varphi+\psi$. 若 f 在 x_0 处可导, 则 φ,ψ 至少有一个在点 x_0 可导;

5) 设 $f=\varphi\cdot\psi$. 若 f 在 x_0 处可导, 则 φ,ψ 至少有一个在点 x_0 可导;

6) 若 f 在 x_0 可导, 则 $|f|$ 也在 x_0 可导, 反之也成立.

答: 1) 是假命题. 例如, $f(x)=x$ 在 $x=0$ 处可导, 且满足 $f(0)=0$, 但是 $f'(0)=1\neq0$. 反之, 对于 $f(x)\equiv1$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$, 但是 $f(0)=1\neq0$.

2) 是假命题. 例如, $f(x)=x^2+1$ 在 $x=0$ 处可导, 且在 $U(0)$ 内 $f(x)>0$, 但是 $f'(0)=0$.

3) 是真命题. 因为 f 为 $[-a,a]$ 上偶函数, 且 $f'(0)$ 存在, 所以

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}=-\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-f'(0),$$

因此 $f'(0)=0$.

4) 是假命题. 例如, 设 φ 在 x_0 处不可导, $\psi=1-\varphi$, 则 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)=1$ 在 $x=0$ 处可导, 但是 φ,ψ 都在点 x_0 不可导.

5) 是假命题. 例如, $\varphi(x)=|x|$ 与 $\psi(x)=-2|x|$ 都在 $x=0$ 处不可导, 但是 $f(x)=\varphi\cdot\psi=-2x^2$ 在点 $x=0$ 可导.

6) 是假命题. 例如, $f(x)=x$ 在 $x=0$ 处可导, 但是 $|f|=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导. 又如, 对于 $g(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ -1, & x\notin\mathbb{Q},\end{cases}$ 有 $|g(x)|\equiv1$ 在 $x=0$ 处可导, 但 $g(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. 即反之不成立.

11. 如何正确理解高阶微分不具备微分形式的不变性?

答: 以二阶微分为例, 当 x 是自变量时,

$$d^2y = f''(x)dx^2. \tag{1.1.3}$$

当 x 是中间变量时, 考虑两个可导函数 $y = f(x), x = \varphi(t)$ 复合而成的函数 $y = f(\varphi(t))$, 于是

$$\begin{aligned} d^2y &= (f(\varphi(t)))''dt^2 = (f'(\varphi(t))\varphi'(t))'dt^2 \\ &= [f''(\varphi(t))\varphi'^2(t) + f'(\varphi(t))\varphi''(t)]dt^2 \\ &= f''(\varphi(t))\varphi'^2(t)dt^2 + f'(\varphi(t))\varphi''(t)dt^2 \\ &= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

式 (1.1.3) 和式 (1.1.4) 表明, 二阶微分不具有微分形式的不变性. 其原因是当 x 是自变量时, $d^2x \equiv 0$; 当 $x = \varphi(t)$ 是中间变量时, $d^2x = \varphi''(t)dt^2 \neq 0$.

1.2 典型例题

1.2.1 微分与导数的概念

例 1 设 $f(x) = x|x|$, 试讨论函数 $f(x)$ 的可微性, 并求其微分.

分析 可以用可微的定义验证.

解 由于

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \Delta x|\Delta x| = 0 + o(\Delta x),$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可微, 且 $df|_{x=0} = 0$.

又因为当 $x > 0$ 时, 对于任意 $\Delta x \in (-x, x)$, 有

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 \\ &= 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \\ &= 2x \cdot \Delta x + o(\Delta x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可微, 且 $df = 2xdx$.

同理可得, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内可微, 且 $df = -2xdx$.

综上所述, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可微, 且 $df = 2|x|dx$. □

例 2 设 $f'(x_0)$ 存在, a, b 为两个非零常数, 求极限 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+ah)-f(x_0+bh)}{h}$. 若 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ 存在, 能否推出 $f'(x_0)$ 存在?

分析 所求极限与函数在一点的导数定义类似, 可以通过恒等变形, 设法利用导数定义计算.

解 由于 $f'(x_0)$ 存在, 及 a,b 为两个非零常数, 所以

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0+bh)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left[a\frac{f(x_0+ah)-f(x_0)}{ah}-b\frac{f(x_0+bh)-f(x_0)}{bh}\right]\\&=(a-b)f'(x_0).\end{aligned}$$

若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ 存在, 不能推出 $f'(x_0)$ 存在. 例如, 设 $f(x)=|x|$, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{h}=0,$$

但是 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处没有导数. □

例 3 讨论下列函数的连续性与可导性:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ x, & x\text{ 为有理数},\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ x^2, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

解 先考虑函数 f 的连续性与可导性. 对任意 $x_0\neq 0$, 取数列 $\{x_n'\}\subset\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\{x_n''\}\subset\mathbb{Q}$, 使满足

$$x_n'\to x_0,\quad x_n''\to x_0\quad (n\to\infty),$$

则

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=\lim_{n\to\infty}0=0,\quad \lim_{n\to\infty}f(x_n'')=\lim_{n\to\infty}x_n''=x_0\neq 0,$$

于是根据归结原则得, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在 x_0 处不连续, 当然也不可导.

对于 $x_0=0$, 由于 $|f(x)|\leqslant|x|$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 但因为

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ 1, & x\text{ 为有理数}\end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时极限不存在, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

再考虑函数 g 的连续性与可导性. 对任意 $x_0\neq 0$, 同理可得, $g(x)$ 在 x_0 处不连续, 也不可导.

对于 $x_0=0$, 由于

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=f(x)\to 0\quad (x\to 0),$$

所以 $g(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 当然也连续, 且 $g'(0)=0$. □

注　函数 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, 但是处处不可导的例子; 函数 $g(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, 但是仅在一点可导的例子.

例 4　求曲线 $y=2\sqrt{x}$ 在点 $x=1$ 的切线与法线方程.

分析　注意函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线的斜率.

解　由于 $y'|_{x=1}=\frac{1}{\sqrt{x}}|_{x=1}=1$, 所以曲线在点 $x=1$ 的切线方程为

$$y-2=1\cdot(x-1),$$

即 $y=x+1$.

又因为法线的斜率为 -1, 所以法线方程为

$$y-2=-1\cdot(x-1),$$

即 $y=-x+3$. □

1.2.2 微分与导数的计算

1. 利用定义求函数的导数

例 1　设 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ x^3, & x\leqslant 0, \end{cases}$ 求 $f'(0)$ 和 $\mathrm{d}f|_{x=0}$.

分析　这是分段函数, 在 $x=0$ 的两侧, 函数有不同的表达式, 所以要分别求左右导数, 然后求导数.

解　由于

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}x\cos\frac{1}{x}=0,$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}x^2=0,$$

所以 $f'_+(0)=f'_-(0)=0$, 因此 $f'(0)=0$, $\mathrm{d}f|_{x=0}=f'(0)\mathrm{d}x=0$. □

注　分段函数在分段点的导数, 一般都要用导数的定义求.

例 2　求函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\mathrm{e}^{-x^2}, & |x|\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}, & |x|>1 \end{cases}$ 的导函数.

分析　这是分段函数, 在 $x=\pm 1$ 的两侧, 函数有不同的表达式, 所以在 $x=\pm 1$ 处要分别用定义求左右导数, 然后求导数. 在其余地方可以用公式求导数.

解　由条件, 根据求导公式, 有

$$f'(x)=\begin{cases} (x^2\mathrm{e}^{-x^2})'=2x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}, & |x|<1, \\ \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)'=0, & |x|>1. \end{cases}$$

下面考虑函数在 $x=\pm 1$ 处的导数. 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-1}}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1^-}\mathrm{e}^{-x^2}\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1+1-\mathrm{e}^{x^2-1}}{x-1}\\&=\mathrm{e}^{-1}\left[\lim_{x\to 1^-}(x+1)-\lim_{x\to 1^-}(x+1)\cdot\frac{\mathrm{e}^{x^2-1}-1}{x^2-1}\right]\\&=\mathrm{e}^{-1}(2-2)=0,\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1}}{x-1}=0,$$

所以 $f'_-(1)=f'_+(1)=0$, 因此 $f'(1)=0$. 同理可得, $f'(-1)=0$, 故

$$f'(x)=\begin{cases}2x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$$ □

2. 利用导数的运算法则求导数

例 3 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-101)$, 求 $f'(1)$.

分析 这是乘积函数在一点的导数, 可以用导数的定义求, 也可以用乘积函数的导数公式求.

解法 1 用导数的定义求. 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-101)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}x(x-2)(x-3)\cdots(x-101)\\&=(-1)^{100}\cdot 100!=100!,\end{aligned}$$

所以 $f'(1)=100!$.

解法 2 用乘积函数的导数公式求. 由于

$$\begin{aligned}f'(x)&=[x(x-1)(x-2)\cdots(x-101)]'\\&=(x-1)(x-2)\cdots(x-101)+x(x-2)\cdots(x-101)+\cdots\\&\quad+x(x-1)(x-2)\cdots(x-100),\end{aligned}$$

所以 $f'(1)=f'(x)|_{x=1}=0+1(1-2)\cdots(1-101)+0+\cdots+0=100!$. □

例 4 求下列函数的导数: