

新编

奥林匹克基础知识及素质教育丛书

初中一年级 数学

主编：杨 骞

展开思想的翅膀
活跃在奥林匹克广场上
为了明天的成功
哪怕今天摸爬滚打
让我们手挽手
深挖智慧的力量
奋斗——前进——
这里是练兵的战场

$$a^2 + b^2 = c^2$$

科学技术文献出版社

新编奥林匹克基础知识 及素质教育丛书

在教材的基础上提高 在提高的基础上飞跃

全国著名品牌：十年磨一剑

名校权威新编：真诚新奉献

考试深入指导：透彻而全面

辅助学生学习：提高在当年

初中一年级数学	15.00元
初中二年级数学	19.50元
初中三年级数学	19.80元
初中物理	16.50元
初中生物	12.50元
计算机（上、下册）	24.00元

注：邮费按书款总价另加20%邮挂费

☎ 邮购热线：(010)68515544-2172

ISBN 7-5023-3237-5



9 787502 332372 >

ISBN 7-5023-3237-5/G · 714

定价：15.00元

◇新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

初中一年级数学

主 编 杨 骛

编 著 杨 骛 安道波

朱秉林 李庆奎

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

图书在版编目(CIP)数据

初中一年级数学/杨骥主编. -北京:科学技术文献出版社,1999.3
(新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书)

ISBN 7-5023-3237-5

I. 初… II. 杨… III. 数学课-初中 教学参考资料 IV. G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 40172 号

出 版 者:科学技术文献出版社

图 书 发 行 部:北京市复兴路 15 号(公主坟)中国科学技术信息研究所大楼 B 段/
100038

图 书 编 务 部:北京市西苑南一院 8 号楼(颐和园西苑公汽站)/100091

邮 购 部 电 话:(010)68515544-2953

图书编务部电话:(010)62878310, (010)62877791, (010)62877789

图书发行部电话:(010)68515544-2945, (010)68514035, (010)68514009

门 市 部 电 话:(010)68515544-2172

图书发行部传真:(010)68514035

图书编务部传真:(010)62878317

E-mail:stdph@istic.ac.cn

策 划 编 辑:王亚琪 王 琦

责 任 编 辑:方 圆

责 任 校 对:梁文彦

责 任 出 版:周永京

封 面 设 计:宋雪梅

发 行 者:新华书店北京发行所

印 刷 者:北京国马印刷厂

版 (印) 次:1999 年 3 月第 1 版 1999 年 3 月第 1 次印刷

开 本:850×1168 32 开

字 数:292 千

印 张:11

印 数:1—10000 册

定 价:15.00 元

© 版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书是根据初一数学教学内容和要求以及《初中数学竞赛大纲》，结合初一学生的学习规律和心理特点安排具体内容。其内容包括从算术到代数；数的整除性；有理数；一元一次方程(组)、不等式(组)；整式；排列组合、逻辑推理、抽屉原理、优化策略；平面几何初步。本书特别重视数学思想方法的渗透和运用，注重问题的提出和分析；强调解题规律的揭示和讲解，并充分地考虑到科学性、系统性、全面性、实用性、可读性、超前性等特点。

本书可作为数学奥林匹克培训班教材，也可作为学有余力的初一学生的辅助资料，还可作为教师教学的参考用书。

科学技术文献出版社 向广大读者致意

科学技术文献出版社成立于1973年，国家科学技术部主管，主要出版科技政策、科技管理、信息科学、农业、医学、电子技术、实用技术、培训教材、教辅读物等图书。

我们的所有努力，都是为了使您增长知识和才干。

前言

近些年来,世界范围内的学科奥林匹克竞赛方兴未艾。我国自参赛以来,不断取得优异成绩。1997年,我国参加在阿根廷布宜诺斯艾利斯举办的第37届世界数学奥林匹克竞赛,6名选手均获金牌,并取得了团体第一名的好成绩。学生参加各学科的奥林匹克竞赛活动,不但为国家争得了荣誉,也已成为他们丰富学习内容、增长知识、提高各门功课学习成绩的重要方式之一。

为了帮助广大中小学生完整、准确、全面地掌握各门功课的学习内容,在日常的学习和参加奥林匹克竞赛活动中取得好的成绩,同时为了配合目前中小学素质教育,我们邀请了京内外著名奥校具有多年教学与辅导经验的权威老师,编写了这套《新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书》。

参加本丛书编写工作的老师,全部来自于教学第一线,具有扎实的基础理论功底和丰富的教学实践经验。他们结合自己多年教学、科研和奥校辅导的经验,在总结各类奥林匹克竞赛教学讲义、习题解答及辅导材料的基础上,博采众家之长,形成了本丛书独具特色的风格和特点:

(1)学科门类齐全。全套丛书共18分册,涵盖数学、物理、化学、生物、计算机5个学科,跨越小学、初中、高中三个阶段,是目前此类图书中覆盖学科最广、教学内容最全、实用性最强的奥林匹克竞赛系列丛书之一。

(2)普及与提高并重。各册书紧密配合本年级的教学进度,选择基础性强、应用性广、具有代表性的教学内容作为专题,进行重点讲解,旨在提高大多数学生的学习水平。同时又根据各学科竞赛的实际需要,选择针对性强的专题,以点带面,重点讲解。

(3)科学准确,结构合理。各分册按照学科特点进行科学编排,内容繁简适当。对于教学中的重大疑难问题,分析透彻,注重科学性和准确性。重点、难点部分举一反三,力求使学生在理解的基础上,学会灵活运用。

(4)新颖独特,趣味性强。各分册力求做到选题典型、新颖有趣,例题讲解富有启发性,注意培养学生独立思考的能力。注重从学习方法、分析思路和解题技巧上,全方位、多角度地培养学生对各种知识的综合运用能力。

为便于学生掌握各门功课的学习要领,各分册除对基础知识进行系统讲解外,还配备有一定数量的练习,并附有提示及答案,供同学们根据自己的实际情况有选择地使用。

我们真诚地希望本套丛书能对同学们参加奥林匹克竞赛和各类学科竞赛有所裨益,能有助于我国中小学生全面提高各门功课的学习成绩。书中如有错漏或不当之处,欢迎读者批评指正。

新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

主要作者简介

- 吴文虎** 中国计算机学会普及委员会主任
国际信息学奥林匹克中国队总教练
清华大学计算机系教授
- 吕 品** 全国计算机教材审查委员会委员
北京信息学奥林匹克学校副校长
中学高级教师
- 刘 亮** 北京教育学院化学教研室主任、教授
- 陆 禾** 北京 14 中化学特级教师
北京市有突出贡献的专家
- 黄儒星** 北京教育局化学教研室主任
中学特级教师
- 冯士腾** 北京宣武区教育学会秘书长
中学特级教师
- 李方烈** 北京宣武区中学数学教研室主任
中学特级教师
- 赵欣如** 北京师范大学生物系教授
中国生物奥林匹克竞赛委员会委员
- 曹保义** 北京师范大学二附中副校长
生物教研组组长
中学高级教师

- 高建军** 湖南长沙一中生物教研组组长
中学高级教师
- 石长地** 首都师范大学研究生处教师
数学奥林匹克专业研究生毕业
教育学硕士
- 贺贤孝** 辽宁师范大学数学系教授
辽宁数学教育学会副会长
- 杨 骞** 辽宁师范大学数学系副教授
大连市奥林匹克学校校长
- 由 峻** 北京市宣武区中学教研室主任
- 秦家达** 北京市 66 中物理教研组组长
中学高级教师
- 高玉鍊** 北京师范大学附中物理高级教师
- 马凌风** 北京市 15 中物理教研组组长
中学高级教师
- 王健子** 北京市 15 中物理高级教师

目 录

第 1 讲	从算术到代数	(1)
第 2 讲	整除概念及其性质	(19)
第 3 讲	整除特征及其判定	(28)
第 4 讲	质数 合数 分解质因数	(35)
第 5 讲	最大公约数与最小公倍数	(45)
第 6 讲	带余除法	(55)
第 7 讲	同余	(64)
第 8 讲	完全平方数	(74)
第 9 讲	末位数	(83)
第 10 讲	有理数	(89)
第 11 讲	绝对值	(99)
第 12 讲	一次方程(组)及其应用	(107)
第 13 讲	不定方程(组)及其应用	(125)
第 14 讲	一次不等式(组)	(141)
第 15 讲	整式的恒等变形与证明	(157)
第 16 讲	排列与组合	(169)
第 17 讲	抽屉原理	(181)
第 18 讲	归纳与递推	(192)
第 19 讲	逻辑推理	(206)
第 20 讲	优化与策略	(223)

第 21 讲	棋盘数学	(238)
第 22 讲	图论初步	(250)
第 23 讲	$[x]$ 与 $\{x\}$	(262)
第 24 讲	直线与角	(270)
第 25 讲	命题·证明·求解	(283)
附录 1:	练习答案与提示	(300)
附录 2:	初中数学竞赛大纲(修订稿)	(334)
附录 3:	关于初中数学竞赛大纲的说明	(337)

第 1 讲 从算术到代数

一、用字母表示数与列代数式

在小学数学中,主要是对具体的数进行操作.到初中之后,常常需要用字母表示数,对字母进行操作.用字母表示数,有很多好处,在今后的学习中将逐步有所体会.

【例 1】 用字母表示数的运算定律.

分析与解 在小学学过加法的交换律、结合律,乘法的交换律和乘法对加法的分配律,这四个规律如果用字母表示,就可写为:

$$a + b = b + a$$

$$a + b + c = a + (b + c)$$

$$ab = ba$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

思考 如果圆柱体的底面半径是 r ,高是 h ,则它的底面积、侧面积、表面积和体积如何表示.

【例 2】 用字母表示:

- (1)奇数、偶数;
- (2)相邻两自然数;
- (3)连续三个自然数.

分析与解 (1)奇数与偶数一般分别表示为 $2n - 1$ (或 $2n + 1$); $2n$.

(2)相邻两自然数表示为 $n, (n + 1)$ 或 $(n - 1), n$.

(3)连续三个自然数经常表示为 $(n - 1), n, (n + 1)$;或 $n, (n + 1), (n + 2)$.

【例 3】自然数的十进位一般表示.

分析与解 自然数 234, 百位 2 表示 200, 十位 3 表示 30, 个位 4 表示 4, 即

$$234 = 200 + 30 + 4 = 2 \times 100 + 3 \times 10 + 4$$

一般地三位数 $\overline{abc}$, 表示:

$$\overline{abc} = a \times 100 + b \times 10 + c$$

四位数 $\overline{abcd}$ 表示:

$$\overline{abcd} = a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d$$

【例 4】如果下列各式分别为:

第一式: $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1$

第二式: $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 4$

第三式: $3 \times 4 \times 5 \times 6 + 9$

第四式: $4 \times 5 \times 6 \times 7 + 16$

用代数式表示第 n 式.

分析与解 由已知四个式子观察发现, 每一式都是连续四个自然数之积加上最小数的平方, 其中最小数就是第 n 式中的“ n ”, 于是第 n 式应为:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + n^2.$$

思考 根据下述规律, 用代数式表示第 n 行:

第一行: $\frac{1}{1}$;

第二行: $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$;

第三行: $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$;

第四行: $\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$;

【例 5】若规定运算: $a * b = a + b + ab$,

(1) 计算 $(1 * 2) * 3$.

(2) 验证是否有交换律与结合律.

 **分析与解** 根据运算“ $*$ ”的法则,有

$$1 * 2 = 1 + 2 + 1 \times 2 = 5$$

$$5 * 3 = 5 + 3 + 5 \times 3 = 23$$

所以 $(1 * 2) * 3 = 23$

由规定: $a * b = a + b + ab$,

$$b * a = b + a + ba$$

由加法和乘法的交换律有

$$b + a + ba = a + b + ab$$

所以 $a * b = b * a$

即运算“ $*$ ”符合交换律.

又 $(a * b) * c = (a + b + ab) * c$

$$= a + b + ab + c + (a + b + ab)c$$

$$= a + b + ab + c + ac + bc + abc$$

$$a * (b * c) = a * (b + c + bc)$$

$$= a + b + c + bc + a(b + c + bc)$$

$$= a + b + c + bc + ab + ac + abc$$

显然有 $(a * b) * c = a * (b * c)$

即运算“ $*$ ”满足结合律.

 **思考** 定义新运算: $a \triangle b = \frac{ab}{a+b}$,

(1) 计算 $2 \triangle 6$;

(2) 验证是否符合交换律与结合律.

 **【例6】** 用字母表示和、差、倍问题.

(1) 已知两数和为 a , 两数差为 b , 求这两数;

(2) 已知两数和为 a , 其中一数为另一数的 m 倍, 求这两数;

(3) 已知两数差为 b , 其中一数为另一数的 n 倍, 求这两个数.

 **分析与解** 根据小学的解法, 很容易得到解为:

(1) $\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}$;

$$(2) \frac{1}{m+1}a, \frac{m}{m+1}a;$$

$$(3) \frac{1}{n-1}b, \frac{n}{n-1}b.$$

思考 甲、乙、丙三数的平均数为 a , 甲、乙两数的平均数为 b , 求丙数.

【例 7】 一环形跑道, 长 am , 甲每分跑 bm , 乙每分跑 cm , 两人同时同地背向而行, 多少分后两人相遇; 若两人同时同地同向而行, 又多少分后两人相遇 ($b > c$)?

分析与解 本题属于相遇问题与追及问题, 很容易得到所求两个时间分别为 $\frac{a}{b+c}, \frac{a}{b-c}$.

思考 一支部队排成 a 米长队行军, 在队尾的张明要与最前面的营长联系, 他用 t_1 分钟时间追上了营长. 为了回到队尾, 在追上营长的地方等了 t_2 分钟. 如果他从最前头跑步回队尾, 那么要多少时间?

【例 8】 某厂第一个月生产 a 个零件, 第二个月比第一个月增产 $x\%$, 第三个月又比第二个月增产 $x\%$, 那么第三个月的产量是多少? 这一季度的总产量是多少个零件?

分析与解 第一个月生产零件 a 个, 由题意第二个月产量应为

$$a + a \times x\% = a(1 + x\%)$$

第三个月产量应为

$$a(1 + x\%) + a(1 + x\%)x\% = a(1 + x\%)^2$$

这一季度的总产量为

$$a + a(1 + x\%) + a(1 + x\%)^2.$$

【例 9】 用代数式表示下列图中阴影部分的面积(如图 1.01).

分析与解 (1) 阴影部分的面积可视为边长为 $(a + 2x)$ 的正方形面积减去四个边长为 x 的小正方形的面积, 再减去半径为 r 的圆的面积, 即为

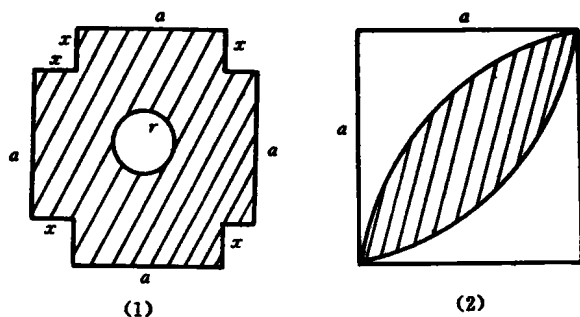


图 1.01

$$(a + 2x)^2 - 4x^2 - \pi r^2.$$

(2) 阴影部分的面积等于半径为 a 的两个 $\frac{1}{4}$ 圆的面积减去边长为 a 的正方形的面积, 即为

$$2 \times \frac{1}{4} \pi a^2 - a^2.$$

思考 用代数式表示下列图中阴影部分的面积(如图 1.02).

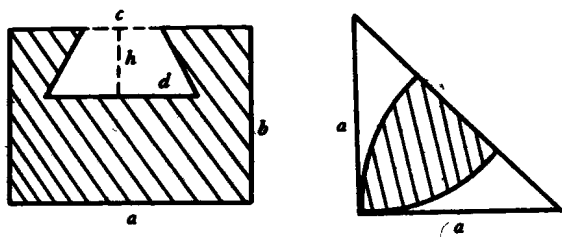


图 1.02

【例 10】 $ABCD$ 是一个梯形, E 是 AD 的中点, 直线 CE 把梯形分成甲、乙两部分, 它们的面积之比是 $\lambda:1$ ($\lambda > 1$), 求 $\triangle ABC$ 面积与梯形面积之比(如图 1.03).

分析与解 由题设有

$$\text{甲} = \lambda \text{ 乙}$$

因 E 为 AD 之中点, 则有

$$S_{\triangle CAE} = S_{\triangle CED}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \text{甲} - \text{乙} = \lambda \text{ 乙} - \text{乙} = (\lambda - 1)\text{乙}$$

$$\text{又有 } S_{\text{梯形}ABCD} = \text{甲} + \text{乙} = (\lambda + 1)\text{乙}$$

所以

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\text{梯形}ABCD}} = \frac{(\lambda - 1)\text{乙}}{(\lambda + 1)\text{乙}} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

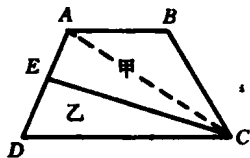


图 1.03

二、列方程解应用题

在小学,我们学习了一些简单的一元一次方程应用题.列方程解应用题是由算术过渡到代数最为重要的环节,小学的许多算术应用题都可以用列方程来求解.列方程解应用题通常按下述五个步骤来操作:

1. 弄清题意,找出已知条件和所求问题;
2. 设未知数(或叫设元);
3. 根据等量关系,列出方程;
4. 解方程;
5. 检验,写出答案.

在上述五个步骤中,第二步,可以是直接设元,也可以是间接设元;第四步,可以是一元一次方程,也可以是其他形式,如二元一次方程组.

【例 1】有三个连续自然数的和为 333,求这三个数.

分析与解 设这三个自然数分别为 $(x - 1)$, x , $x + 1$, 则

$$x - 1 + x + x + 1 = 333$$

求得

$$x = 111$$

故所求三连续自然数分别为 110, 111, 112.

【例 2】有一个三位数,各数位的数字之和是 15,个位数字与百位数字的差是 5;如果颠倒各数位的数字顺序,则所成的新数比原数