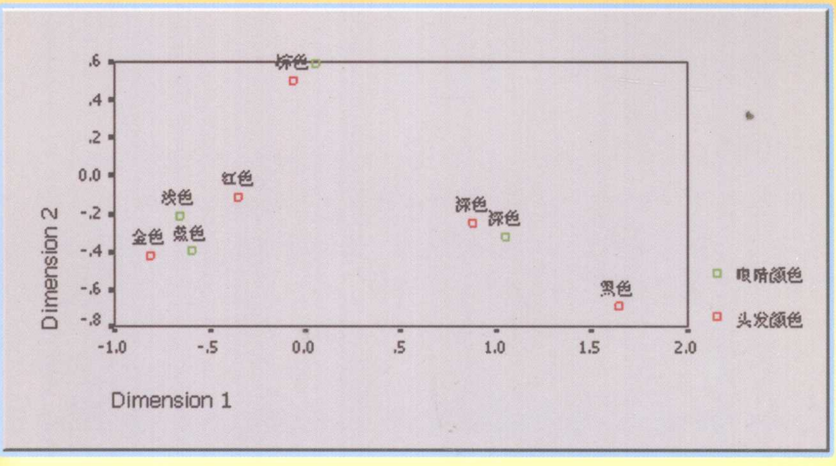
# 应用多元统计分析

傅德印　主编




高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

# 应用多元统计分析

Yingyong Duoyuan Tongji Fenxi

傅德印　主编
黄恒君　王　晶　副主编



高等教育出版社·北京
HIGH NG

内容简介

本书主要介绍一些实用的多元统计分析方法及其应用。所介绍的每种方法尽可能地结合中国社会、经济、管理方面的实例，以 SPSS 等软件作为工具，通过实例来讲述各种多元统计方法在统计软件中的实现。

本书共分十章。第一章介绍多元统计分析的研究对象、应用领域，以及回顾线性代数基础；第二章介绍多元正态总体的参数估计和假设检验；第三章介绍多元回归分析有关问题，包括参数估计、假设检验和变量筛选；第四章和第五章研究分类问题，分别介绍了聚类分析和判别分析；第六章、第七章和第八章主要研究降维问题，分别介绍了主成分分析、因子分析和对应分析；第九章研究两组变量的相关关系，即介绍典型相关分析；第十章简要介绍多元时间序列分析。

本书可作为财经类院校经济管理类专业高年级本科生、硕士研究生的多元统计分析课程教材。同时，也可供各个领域需要进行数据处理分析的实际工作者参考学习。

**图书在版编目(CIP)数据**

应用多元统计分析/傅德印主编．--北京：高等教育出版社，2013.5

ISBN 978-7-04-037219-9

Ⅰ.①应… Ⅱ.①傅… Ⅲ.①多元分析-统计分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O212.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 073070 号

策划编辑 施春花　责任编辑 施春花　封面设计 杨立新　版式设计 杜微言
插图绘制 尹　莉　责任校对 杨凤玲　责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 北京机工印刷厂
开　　本 787mm × 960mm 1/16
印　　张 19
字　　数 340 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2013 年 5 月第 1 版
印　　次 2013 年 5 月第 1 次印刷
定　　价 29.80 元


物 料 号 37219-00

# 前　言

在电子计算机日益普及和软件快速发展的今天，各行各业都开始采用计算机及相应的信息技术进行管理和决策，数据量与日俱增；而在自然科学和社会科学的许多领域中，研究者也经常面临复杂数据处理问题。从表面上看似杂乱无章的数据中提炼出规律性的结论，这就要求实际工作者和研究者不仅要对所面临的实际问题有很好的了解，而且要掌握必要的统计分析工具。当我们面临复杂数据处理问题时，特别是研究客观事物中多个变量之间相互依赖的统计规律时，一个重要的方法工具就是多元统计分析。

多元统计分析是统计学中内容十分丰富、应用范围极为广泛的一个分支。在已经出版的多元统计分析教材中，每本书都有它特定的读者群体，而且各有特色。实际上，对于以解决实际问题为目标的经济管理类专业学生而言，最重要的是通过本门课程的学习，能运用多元统计分析知识解决实际问题。

本书的定位是作为财经类院校经济管理类专业硕士研究生、高年级本科生的多元统计分析课程教材。根据这个定位，本书介绍了各种常用的多元统计分析方法的统计背景和实际意义，说明了方法的思想、具体的实现步骤、分析的技巧。为重点突出方法的思想和应用，每种方法尽可能地结合中国社会、经济、管理方面的实际问题，主要运用 SPSS 等软件来实现计算。

根据经济和管理类的专业要求，我们力求语言通俗，案例丰富，理论紧密联系实际，习题数量、难度适当。在本书中编者期望突出以下特点：

第一，注重统计思想，强调实际应用。在一元统计分析的基础上深入浅出地介绍多元统计分析的内容，并着重介绍多元统计分析中的各种常用方法，讲清各种方法的统计思想和实际背景。在多元统计方法的应用上把握实质，从实际问题入手，在不失严谨的前提下，淡化统计方法本身的数学推导，体现统计学的实用性。

第二，应用统计软件，实现统计计算。根据多元统计固有的特点，我们选用简单易用的 SPSS 等软件作为主要计算工具。在每一章中，都通过案例讲述所介绍的多元统计方法在统计软件的实现。这样将统计软件的学习和案例分析有机结合，不仅能使读者在实践运用中学习软件的操作方法，而且还使读者对多元统计分析的意义有深入的体会。

本书的具体编写分工如下：第一章、第三章、第六章、第七章和第九章由傅德

印执笔；第二章、第四章、第五章、第八章和第十章由黄恒君执笔；各章的案例实现和习题由王晶编写；最后由傅德印担任主编并进行统稿和总纂。

本书在编写的过程中，参考了国内外相关文献，并从中借鉴和吸收了许多有价值的内容作为有益补充，在此一并表示感谢。本书的出版得到了高等教育出版社的大力支持，张冬梅女士、施春花女士为本书的组稿、编辑做了大量的工作，在此表示衷心感谢！

本书的教学课件PPT、教材中的案例数据库和习题数据库可以在高等教育出版社的网站（http://www.hep.com.cn/sem）下载或通过电话和邮箱索取（shichh@hep.com.cn），供读者使用。

由于水平有限，书中难免有疏漏和不足之处，敬请广大读者批评指正！

编 者

2013年4月

## 郑重声明

# 目　录

# 第一章　绪　　论

## 第一节　多元统计分析概述

多元统计分析(简称多元分析),是运用数理统计的方法来研究多变量问题的理论和方法,它是一元统计学的推广。

在现实生活中,很多随机现象涉及的变量不止一个,经常是多个变量,进一步地,这些变量之间往往存在一定的联系。如果按照一元统计方法,势必要把多个随机变量拆开分析,每次处理一个变量,并得到分析结果。这种做法有时是有效的,但通常来讲,由于忽视了变量之间可能存在的相互关联性,按照一元统计方法分析多变量的问题,往往不容易取得好的研究结论。要在数据分析中同时考虑到变量间的相互关系,就需要用多元统计分析方法来解决:从理论上讲,这就需要同时对多个随机变量进行分析研究;从数据分析实践上看,多元统计是通过对多个随机变量的观测数据分析,来研究随机变量总的特征、规律以及随机变量之间的相互关系。

根据上面的描述,多元统计分析实际上是以 $p$ 个变量的 $n$ 次观测数据形成矩阵

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

为依据,根据实际问题的需要,给出种种分析方法。英国统计学家肯德尔(Kendall)把多元统计研究的内容和方法概括为以下几个方面:

(1) 理论基础。多元统计分析的理论基础主要包括多维正态随机向量,以及由此定义的各种多元统计量,推导它们的分布并研究其性质,研究它们的抽样分布理论。这些不仅是统计估计和假设检验的基础,也是多元统计分析的理论基础。多元统计分析是一元统计学的推广,两者在研究思路和理论基础上具有一致性,如表 1.1 所示。

(2) 降维问题。降维就是对数据结构的简化,即将某些较为复杂的数据结

构通过数据变换等方式,使原本相互依赖的变量转化为互不相关的变量;或把高维空间的数据投影到低维空间中。降维处理使得研究问题得到简化的同时,信息量的压缩不至于太大,例如主成分分析、因子分析,以及对应分析等,就是这样一类处理方法。

**表 1.1 一元统计与多元统计的简单比较**

| 主要内容 | 一元统计 | 多元统计 |
| --- | --- | --- |
| 研究对象 | 一维随机变量 | 多维随机向量 |
| 基础分布 | 一元正态分布 | 多元正态分布 |
| 抽样分布 | $\chi^2$ 分布<br>$t$ 分布<br>$F$ 分布 | 维希特分布<br>霍特林分布<br>威尔克斯分布 |
| 主要数字特征 | 均值<br>方差 | 均值向量<br>协差阵 |
| 参数估计 | 最大似然估计<br>最小二乘估计<br>矩估计 | 最大似然估计<br>最小二乘估计<br>矩估计 |
| 假设检验 | 对均值假设检验<br>对方差假设检验 | 对均值向量假设检验<br>对协差阵假设检验 |

(3) 归类问题。归类问题即对所考察的观测点(或变量)按照相似程度进行分类(或归类),例如聚类分析和判别分析等。

(4) 相依问题。相依问题的研究包括:第一,探索两组变量间的相互关系——典型相关分析。第二,分析一个或几个变量的变化是否依赖于另一些变量的变化。如果是,建立变量间的定量关系式,并用于预测或控制——回归分析。

事实上,在多元统计分析的推断理论基础上,上述分类中的相依问题、归类问题是单变量常用的统计方法在多元随机变量情况下的推广和应用;而降维问题是因为多元变量之间存在相关性,而对多元变量本身进行研究的特殊方法。

从上面的研究内容上看,多元统计分析归纳起来讲就是运用数理统计的方法来研究多变量问题的理论和方法。早在 19 世纪就出现了处理二维正态总体的一些方法,但系统地处理多维概率分布总体的统计分析问题,开始于 20 世纪。人们常把 1928 年维希特(Wishart)分布的导出作为多元分析成为一门独立学科的标志。20 世纪 30 年代,费希尔(Fisher)、霍特林(Hotelling)、罗伊(Roy)以及许宝騄等人做出了一系列奠基性的工作,使多元统计分析在理论上取得迅速进

展。20 世纪 40 年代，多元分析在心理、教育、生物等方面获得了一些应用。但是由于应用时常需要大量的计算，加上第二次世界大战的影响，使其发展停滞了相当长的时间。50 年代中期以来，随着电子计算机的发展和普及，多元统计分析在地质、气象、生物、图像处理、经济分析等许多领域得到了广泛的应用。正是由于这些应用中出现了新的数据特征，对多元统计的新理论提出了需求，反过来促进了多元统计理论的发展。近年来，对离散型多元数据的分析以及对高维海量数据，甚至是无穷维函数数据的分析，成为多元统计分析的发展趋势。这些方面的发展与传统的多元统计方法存在着明显的差别，但其分析思路却是一脉相承的。

## 第二节　多元统计分析的应用

多元统计分析方法是解决实际问题中有效的数据分析处理方法，随着电子计算机使用的日益普遍，多元统计分析方法广泛地应用于地质科学、气象科学、医疗卫生、体育、语言学、考古学、教育学、心理学以及经济学、管理学等自然科学和社会科学领域。其中，在经济管理中的应用，主要集中在如下的场合：

（1）对多变量进行降维处理，选择数目较少的变量子集合。如在经济统计分析中，当对地区、产业或企业的经济效益进行评价分析，对地区的经济发展水平进行评价，对地区或企业的竞争力进行对比，以及对人民生活质量等进行综合评价分析时，为了能够全面刻画所要研究对象的数量特征，往往要调查和收集该研究对象的多方面统计数据，这样就构成了多元的统计数据。一方面，统计数据的维数越多，所反映的内容就越丰富、越全面，包括的信息量也就越大；但另一方面，统计数据的维数越多，数据也就越复杂，数据收集的成本也越高、时间也越长，而且由于各个变量之间的相关性，也给统计分析带来了困难。因此，为了使统计分析简化，就需要在不损失太多原有信息量的情况下，对原始数据进行降维处理，并选择相关性较小或者互不相关的代表性变量进行分析，这样在简化数据结构的同时，又能够达到进行客观分析的目的。能够进行这种数据处理的多元统计分析方法主要有主成分分析、因子分析、对应分析等。

（2）对研究对象需要进行分类研究，分类处理，构造分类模式。我们知道，统计分组可以深化人们的认识，因此进行经济统计分析时，分组研究是常用的方法之一。但是统计分组有时比较简单，比如人口总体按照性别可以分为男性人口和女性人口两组。有时统计分组是非常困难的事情，如根据各地区的经济发展水平或经济发展特征对我国各地区的经济发展类型进行划分时就不可能只根据行政区划或地理位置来简单的划分，这时需要根据反映各地区的经济发展水

平和经济发展特征等多项指标所描述的内容,来测算各地区经济发展的相似程度,并根据相似程度对各地区的经济发展类型进行划分。这一过程需要对多元数据进行分类研究和分类处理,甚至有时需要构造分类模式。处理这类问题的多元统计分析方法主要是聚类分析和判别分析等。

(3) 建立经济模型和利用模型进行外推。经济模型一般是指把经济变量之间的依存关系通过数学表达式的形式加以模拟。在经济模型的基础上,一方面根据这种数学表达式所呈现出的经济变量之间的内部结构,进行各种分析,如因素分析、边际分析或弹性分析;另一方面根据自变量的变化来预测因变量的变化。在多元统计分析应用中有两大类模型,一类是预测性模型,另一类是描述性模型。对于预测性模型,通常采用回归分析的方法来处理,如果经济预测变量是一个因变量,则可应用多元线性回归、逐步回归、非线性回归分析等方法处理;如果经济预测变量是多个因变量,则可以应用多因变量对多个自变量的多对多元线性回归分析方法进行处理。对于描述性模型,通常采用聚类分析等方法处理。

(4) 研究经济现象之间的相互关系。经济现象之间的联系是普遍存在的。我们知道,简单相关系数可以用来刻画两个随机变量之间线性相关的程度及方向。但是,当我们要研究两组变量之间的相关程度时,如研究一组反映投入变量与另外一组反映产出变量之间的相关程度时,只用简单相关系数是不够的,在多元统计分析中,可用典型相关分析进行两组变量之间相关程度的分析和测量。

需要说明的是,由于社会经济现象的复杂性以及每一种多元分析方法的特殊应用场合和局限性,在进行经济统计分析时,有必要把多种多元统计分析方法结合运用,如主成分分析与回归分析的结合运用,因子分析与聚类分析的结合运用等,往往会收到更好的效果。

## 第三节 线性代数基础

向量、矩阵是多元统计分析的重要工具。在学习多元统计知识之前,我们对本书中需要的矩阵代数知识作一简单的回顾和介绍。在本书中,向量用小写黑斜体字母(如 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{a}$ 等)表示,矩阵用大写黑斜体字母(如 $\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{A}$ 等)表示,标量用斜体字母(如 $x$,$X$ 等)表示。如果读者希望对这些方面的知识有更多的了解,可参见有关的线性代数教程。

### 一、向量及其几何意义

#### (一) 向量的定义

由 $n$ 个实数组成的一个数组称为 $n$ 维向量,记为

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{或} x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$$

本书中，向量均指列向量，行向量用列向量的转置表示，如 $\boldsymbol{x}'$。$n$ 维向量在几何上表示一个有方向的线段。向量可以进行数量乘法和加法运算。令 $c$ 为任意常数，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$，则向量的数量乘法和加法可分别定义为

$$c\boldsymbol{x} = (cx_1, cx_2, \cdots, cx_n)'$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)'$$

向量的数量乘法是向量通过一个常数 $c$ 来实现伸长或缩短，而向量的加法是向量在各分量上的叠加，满足平行四边形法则。简单起见，我们可以用二维向量($n=2,\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)',\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)'$)通过图形进行直观解释，如图 1.1 所示。

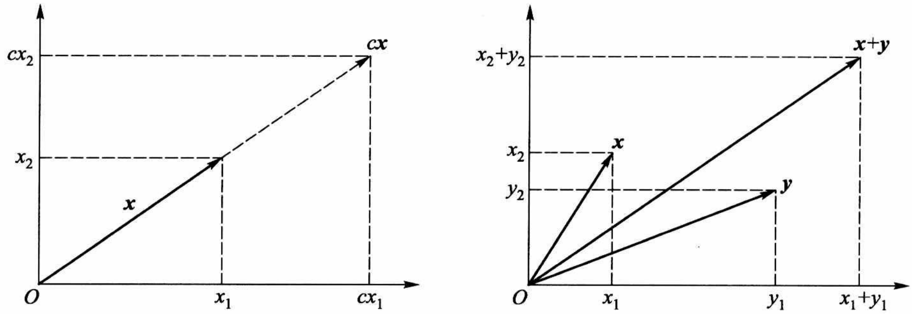



图 1.1　向量数量乘法和加法

**（二）向量的长度及两向量的夹角**

向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$的长度可定义为

$$L_x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

若令 $\boldsymbol{y}=c\boldsymbol{x}$，则 $L_y=L_{cx}=|c|L_x$，这里$|\cdot|$表示绝对值。取 $c=1/L_x$，则得到长度为 1，且与 $\boldsymbol{x}$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{y}=L_x^{-1}\boldsymbol{x}$。

下面考虑两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的夹角 $\theta$，我们以二维空间($n=2,\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)'$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)'$)为例进行说明，向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 与横坐标的夹角分别为 $\theta_x$ 和 $\theta_y$，则 $\theta=\theta_y-\theta_x$，如图 1.2 所示。

根据三角函数知识得 $\cos\theta_y=y_1/L_y$，$\sin\theta_y=y_2/L_y$；同理，$\cos\theta_x=x_1/L_x$，$\sin\theta_x=x_2/L_x$。则 $\cos\theta$ 可表示为

$$\cos\theta = \cos(\theta_y - \theta_x) = \cos\theta_y\cos\theta_x + \sin\theta_y\sin\theta_x$$

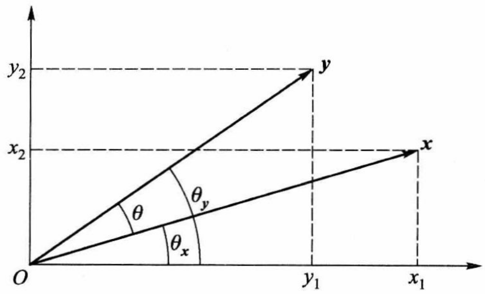



图 1.2 向量的长度与角度

$$= \frac{y_1}{L_y} \cdot \frac{x_1}{L_x} + \frac{y_2}{L_y} \cdot \frac{x_2}{L_x} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{L_x L_y} = \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}}{L_x L_y}$$

推广到 $n$ 维向量,也有类似的定义。如果引入两个 $n$ 维向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的内积,其定义为

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}> = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{x} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

则 $n$ 维向量 $\boldsymbol{x}$ 长度 $L_x$,以及两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的夹角都可以由内积来表示

$$L_x = (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^{1/2}$$

$$\cos\theta = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{L_x L_y} = \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}}{(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^{1/2}(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y})^{1/2}}$$

当 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}=0$ 时,$\cos\theta=0$,此时向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 相互垂直;当 $\boldsymbol{y}=c\boldsymbol{x}(c>0)$ 时,$\cos\theta=1$;当 $\boldsymbol{y}=c\boldsymbol{x}(c<0)$ 时,$\cos\theta=-1$。因此,向量的夹角是与相关系数相联系的一个概念。

### (三) 向量的投影

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$,向量 $\boldsymbol{y}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 上的投影为

$$\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = \left(\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}}{L_x}\right)\left(\frac{1}{L_x}\boldsymbol{x}\right)$$

其中,单位向量$\frac{1}{L_x}\boldsymbol{x}$ 表示 $\boldsymbol{y}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 上投影的方向。而向量 $\boldsymbol{y}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 上投影的长度为

$$\frac{|\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}|}{L_x} = L_y \left|\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}}{L_x L_y}\right| = L_y \cdot \cos\theta$$

其中 $\theta$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的夹角。以二维空间($n=2$)为例,关于投影的直观解释,如图 1.3 所示。

## 二、矩阵及基本运算

### (一) 矩阵的定义

将 $n \times p$ 个数 $x_{11},x_{12},\cdots,x_{np}$排成一个形如 $n$ 行 $p$ 列的长方形表

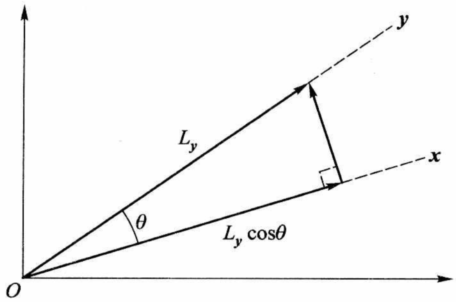



图 1.3 向量的投影

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

称 $\boldsymbol{X}$ 为 $n \times p$ 矩阵,常记为 $\boldsymbol{X} = (x_{ij})_{n \times p}$,其中 $x_{ij}$为第 $i$ 行,第 $j$ 列的元素。本书中假定 $x_{ij}$均为实数。将矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的行列互换,得到矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的转置,记为 $\boldsymbol{X}'$,$\boldsymbol{X}'$是 $p \times n$ 矩阵:

$$X' = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

若 $p = 1$,则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $n$ 维列向量,记为 $\boldsymbol{x}$;当 $n$ 维列向量所有元素均为 1 时,常记为 $\mathbf{1}_p$。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

若 $n = 1$,则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $p$ 维行向量,记为

$$\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$$

若 $\boldsymbol{X}$ 的所有元素为零,则称 $\boldsymbol{X}$ 为零矩阵,记为 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}_{n \times p}$或 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$;若 $\boldsymbol{X}$ 的所有元素为 1,常记该矩阵为 $\mathbf{1}_n\mathbf{1}_p'$。

若 $n = p$,则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $p$ 阶方阵,$x_{ii}(i = 1, 2, \cdots, p)$称为 $\boldsymbol{X}$ 的对角线元素,其他元素 $x_{ij}(i \neq j)$称为非对角线元素。

若 $\boldsymbol{X}$ 为方阵,且 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}'$,则称 $\boldsymbol{X}$ 为对称阵,此时,显然有 $x_{ij} = x_{ji}$。若方阵 $\boldsymbol{X}$

的对角线下方元素为零,则称 $\boldsymbol{X}$ 为上三角矩阵。反之,若方阵 $\boldsymbol{X}$ 的对角线上方元素为零,则称 $\boldsymbol{X}$ 为下三角矩阵。若方阵 $\boldsymbol{X}$ 的非主对角线元素全为零,则称为对角阵,记为

$$\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}(x_{11}, x_{22}, \cdots, x_{pp})$$

进一步地,若 $x_{11} = x_{22} = \cdots = x_{pp} = 1$,称对角阵 $\boldsymbol{X}$ 为单位阵,记为 $\boldsymbol{I}_p$ 或 $\boldsymbol{I}$。

**(二) 矩阵的运算**

(1) 矩阵加法。若 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 为 $n \times p$ 矩阵,则 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的和为矩阵对应元素的和

$$\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = (x_{ij} + y_{ij})_{n\times p}$$

(2) 数量乘积。若 $c$ 为一常数,它与 $\boldsymbol{X}$ 的积定义为该常数与矩阵元素的乘积

$$c\boldsymbol{X} = (cx_{ij})_{n\times p}$$

(3) 矩阵乘法。若 $\boldsymbol{X} = (x_{ij})_{n\times p}$,$\boldsymbol{Y} = (y_{ij})_{p\times q}$,则 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的积定义为

$$\boldsymbol{XY} = \left(\sum_{k=1}^{p} x_{ik}y_{kj}\right)_{n\times q}$$

在一般情况下,$\boldsymbol{XY} \neq \boldsymbol{YX}$。从上述矩阵运算定义中可以得到如下运算规律:

$$(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y})' = \boldsymbol{X}' + \boldsymbol{Y}'$$

$$(\boldsymbol{XY})' = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X}'$$

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}_1 + \boldsymbol{Y}_2) = \boldsymbol{XY}_1 + \boldsymbol{XY}_2$$

$$\boldsymbol{X}\left(\sum_{\alpha=1}^{k} \boldsymbol{Y}_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{k} \boldsymbol{XY}_\alpha$$

$$c(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) = c\boldsymbol{X} + c\boldsymbol{Y}$$

若 $\boldsymbol{X}$ 为方阵,满足 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{XX}' = \boldsymbol{I}$,则称 $\boldsymbol{X}$ 为正交矩阵。

**(三) 矩阵分块**

矩阵分块是处理阶数较高的矩阵时常用的方法。有时,我们把一个高阶矩阵看成是一些低阶矩阵组成的,就像矩阵由数值组成一样。设 $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$ 为 $n \times p$ 矩阵,将 $\boldsymbol{X}$ 剖分成四块,表示成

$$\boldsymbol{X} = \left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12} \\ \hdashline \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22} \end{array}\right)$$

其中,$\boldsymbol{X}_{11}$ 表示 $k \times l$ 矩阵,$\boldsymbol{X}_{12}$ 表示 $k \times (p-l)$ 矩阵, $\boldsymbol{X}_{21}$ 表示 $(n-k) \times l$ 矩阵,$\boldsymbol{X}_{22}$ 为 $(n-k) \times (p-l)$ 矩阵。分块矩阵也满足一般矩阵的乘法和加法等运算规律。

若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 有相同的分块,则

$$\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{11} + \boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{X}_{12} + \boldsymbol{Y}_{12} \\ \boldsymbol{X}_{21} + \boldsymbol{Y}_{21} & \boldsymbol{X}_{22} + \boldsymbol{Y}_{22} \end{pmatrix}$$