概率论与数理统计基础

翁方恩　李小军　编著

中国铁道出版社

概率论与数理统计基础

翁方愚　李小军　编著

中　国　铁　道　出　版　社
2002年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书根据教育部 2000 年颁布的《中等职业教育数学教学大纲》第四、六模块的教学内容和要求，以浅显、形象的语言阐述了概率论与数理统计基础知识。内容包括：预备知识(排列与组合)、随机事件及其概率、随机变量及其分布、数理统计以及本学科发展简史。

本书不同于一般教学用书的地方是：本书避免了一般数学书籍的大量推导、证明，而是采用通俗易懂的语言、生动浅显的实例将其概念、原理、应用阐述出来，使读者同样能达到理解和运用其基本方法解决一定难度问题的要求。

本书适合作为中等职业教育各专业教学用书，亦可供高职教育和其他各级人员参考使用，或作为本学科的普及读物。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计基础/翁方愚，李小军编著.—北京：中国铁道出版社，2002.6
ISBN 7-113-04670-3

Ⅰ.概… Ⅱ.①翁…②李… Ⅲ.①概率论—专业—学校—教材 ②数理统计—专业学校—教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 026356 号

书　　名：概率论与数理统计基础
作　　者：翁方愚　李小军
出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑：夏　伟
封面设计：马　利
印　　刷：北京市燕山印刷厂
开　　本：787×1092　1/32　印张：6　字数：136 千
版　　本：2002 年 8 月第 1 版　　2002 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1～5000 册
书　　号：ISBN 7-113-04670-3/F·351
定　　价：10.00 元

前　　言

概率论与数理统计的内容很丰富，随着生产和科学技术的发展，它的应用越来越广泛，已经成为科学研究、生产实践和经济管理等方面工作中的重要工具。这方面的专著、教材不少，但很多读者苦于数学基础差，对于一些理论性较强、推导较严谨的专著、教材望而却步。本书是根据教育部2000年颁布的《中等职业学校数学教学大纲(试行)》第四模块、第六模块的教学内容和要求编写的。

编著者力求用通俗易懂的语言、生动浅显的实例，将概率论与数理统计中一些最基本的概念、原理、应用阐述出来，使广大读者对该学科有一个初步了解，并能运用其基本方法解决一些简单的实际问题。

为了提高广大读者的学习兴趣，本书文字浅显易懂，内容生动，尤其注意结合现实生活中的实例进行分析阐述。如作者指出：“人造卫星被流星撞上的概率和人在大街上被汽车轧死的概率差不多。”从而读者对小概率事件有了较清晰的了解。

本书适合作为中等职业学校各专业概率论与数

理统计教学用书，学时数约30小时，也适合高中学生的课外读物，以及各级人员的科普读物。

本书由柳州铁路运输学校翁方恩、中国铁道出版社李小军共同编著。李小军负责起草编写提纲并编著第一章，其他章节均为翁方恩编著，全书由两人共同统稿。在编写和出版过程中，本书得到了济南铁路机械学校沈国芳、南昌铁路机械学校罗冬根、齐齐哈尔铁路工程学校何永生、太原铁路机械学校王英杰等老师的大力支持，在此向他们表示诚挚的谢意。

编著者

2001.3

目　　录

预 备 知 识

学习概率论和数理统计，需要一定的数学知识作基础，其中排列组合与二项式定理是必不可少的，考虑到有些读者没有学习过，所以把它们作为预备知识。

一、排列与组合

历史上曾有人看不起音乐，觉得它无非就是1、2、3、4、5、6、7这七个数字，由作曲家随心所欲地排列起来，由于一共才七个数字，能够翻出多少花样？肯定很多都是雷同！这些话猛一听似乎有理，但仔细一想，不但事实上有许许多多优美动听而风格迥异的歌曲，而且只要粗粗一算，就会惊得目瞪口呆了。这七个音符如再加上高低音，则有21个，我们先考虑一种特殊情况，即用这21个音符，按不同次序排出来，有多少种不同的乐曲呢？有 $1\times2\times3\times\cdots\times20\times21\approx3.10909\times10^{19}$，即有3 109亿亿，如果再考虑到乐曲的不同长度，以及可以重复使用，则更是一个天文数字了，所以作曲家是不必担心无用武之地的。那么上面的计算根据是什么呢？这是排列中一个最简单的问题。为了学习有关排列的知识，我们先来看下面的两个基本原理。

1. 两个基本原理

我们设想有一位旅客要从上海去南京，对于交通工具，他的选择余地是很大的。不妨设想飞机有3个航班、火车有10趟、汽车有15个班次、轮船有2班，试问他总共有多少种选择？

按照一般人的思维方式，都是先从飞机、火车、汽车、轮船四大类中选择一类，然后再从时间上来选择一个班次，这样共有30(即 $3+10+15+2=30$)种不同的走法。

一般地，有如下原理：

加法原理　做一件事，完成它可以有几类办法，在第一类办法中，有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N(N=m_1+m_2+\cdots+m_n)$种不同的办法。

下边我们进一步来看上述的例子，如果该旅客中途要到镇江办事，为简化问题起见，假设从上海到镇江有4种走法(设为甲、乙、丙、丁)可选择，从镇江到南京有3种走法(设为 A、B、C)可选择，这时从上海经镇江到南京有多少种不同的走法？不妨具体来看一下：如果从上海到镇江，选择了甲，从镇江到南京有3种选择，所以共有甲 A、甲 B、甲 C 三种，同样如果从上海到镇江选择了乙，则有乙 A、乙 B、乙 C，同理有丙 A、丙 B、丙 C、丁 A、丁 B、丁 C 共12种走法。

结果的12与原来条件中的4、3有关系 $12=4\times3$。

一般地，有如下原理：

乘法原理　做一件事，完成它需要分成几个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，……做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N(N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n)$种不同的方法。

这两个原理在实际中应用很广，在遇到具体问题时，首先要判断运用哪一个原理，这里关键是抓住：一步到位还是分几步走？有时候也可能同时用到这两个原理。

例 0-1　如图0-1，从 A 城到 B 城有3趟班车，从 B 城到 C 城有4趟班车，又从 A 城不经过 B 城到 C 城有2趟火车，问：

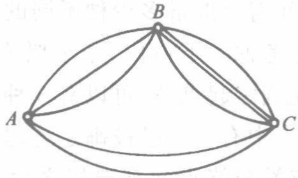


图　0-1

(1) 从 A 城经 B 城到 C 城有多少种不同的走法?

(2) 从 A 城到 C 城共有多少种不同的走法?

读者不妨自己解决之。

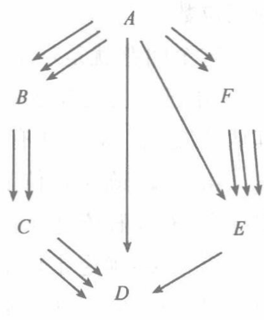
习　题　0-1

1. 如图,求:

(1) $A \to F \to E$ 有几种方法;

(2) $A \to E$ 有几种方法;

(3) $A \to D$ 有几种方法。



2. 一个口袋内装有 6 个小球,另一个口袋内装有 5 个小球,所有这些小球的颜色都不相同,问:

(1) 从两个口袋内任取一个小球,有多少种方法?

(2) 从两个口袋内各取一个小球,有多少种方法?

3. 将 4 封信投入 5 个信箱内,有多少种不同的投法?

4. 某学生要从 3 本不同的科技书、2 本不同的英语书、4 本不同的小说书中,各选一本,共有多少种不同的选法?

2. 排列

例 0-2　假设为了适应广大旅客提速的要求,铁道部决定在北京、上海、广州三个城市之间,开出中途不能上下旅客

的高速直达列车,问需要准备多少种不同的车票?

我们不妨具体考虑一下:每一张车票上有一个起点站和一个终点站。首先确定起点站,可以有3种选择;其次确定终点站,由于3个城市中有一个已被确定为起点站,所以只有两种选择。由于起点站与终点站都选好之后,这个工作才能结束,也就是说这件事情需要分两个步骤来做,根据乘法原理,共有$3\times2=6$个不同的方法。

在这里要注意,从北京到上海与从上海到北京是不同的,习惯上把起点站写在前面,终点站写在后面,即"北京—上海"与"上海—北京"是不同的,也就是顺序在这里是不可忽视的。

例0-3 由数字1、2、3、4可以组成多少个没有重复数字的三位数。

这个问题就是从1、2、3、4这四个数字中,逐个取出,共取3次,分别把它们放在百位、十位、个位(或个位、十位、百位或其他情况)上,求一共有多少种不同的排法。

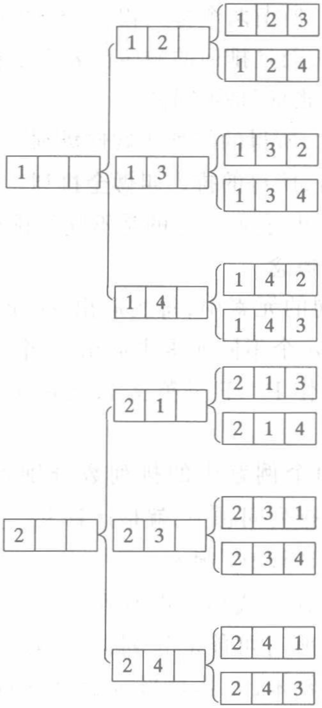
第一步:确定百位上的数字,在1、2、3、4这四个数字中任取一个,有4种方法。

第二步:确定十位上的数字,由于一个数字已被确定在百位上,所以只剩下3个数字,有3种方法。

第三步:确定个位上的数字,这时只有两个数字供选择,所以有两种方法。

根据乘法原理,从四个不同的数字中,可以组成没有重复数字的三位数,共有24个($4\times3\times2=24$)。

对于涉及到个数比较小的情况,我们也可以通过具体排出而得到结果。注意,这里一定要按照某个准则,有规律地来排,如首先排百位是1的,再排百位是2的,……同理十位、个位也是按1、2、3、4顺序来排,具体如下:



其他情况略。

上面两个例子所考察的对象和研究的问题是很不相同的，但是抽去它们的实际背景，却有共同的本质，即如果把所考察的对象（如火车站、数字）叫做**元素**。上面第一个问题，就是从 3 个不同的元素中，任取 2 个，然后按一定的顺序排成一列，求一共有多少种不同的排法；第二个问题就是从 4 个不同的元素中，任取 3 个，然后按一定的顺序排成一列，求一共有多少种不同的排法。

一般地说，从 n 个不同的元素中，任取 $m(m\leqslant n)$个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**排列**。

这里要注意，所谓两个排列相同，不仅这两个排列所含的元素要完全相同，而且排列的顺序也要完全相同。如“北京—上海”与“上海—北京”是不同的。

当 $m<n$ 时，所得的排列叫做**选排列**；

当 $m=n$ 时，所得的排列叫做**全排列**。

在具体问题里，我们关心的是不同的排列一共有多少种。这里先引进一个概念：

从 n 个不同的元素中，每次取出 m 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**排列数**(也叫排列种数)，记作 P_n^m(P 是英文 Permutation 排列的第一个字母)。

例如上面两个例题中的排列数分别可表示为 $P_3^2=6$，$P_4^3=12$。这样在排列问题中，就是计算 P_n^m 了。

那么如何来计算 P_n^m 呢?

从上面的论述中我们可以看到，当 n 比较小时，可以通过按一定规律把所有可能的排列，一一排出来而得到结果。当然这个方法比较笨，尤其是当 n 比较大时，在实际上是做不到的，所以得另找出路。

从哪里去找呢？其实上面的笨办法也给了我们启迪：按位置逐个来考虑。从具体问题说起，例如求 P_n^3，可以这样来考虑，假定有排好顺序的 3 个空位$\boxed{}\boxed{}\boxed{}$，从左到右分别记为第一、二、三号位，从 n 个不同的元素 a_1，a_2，…，a_n 逐个取出 3 个元素去填空，一个空位填一个元素，每一种填法就得到一个排列；反过来，任一个排列总可以由这样一种填法得到，因此所有不同填法的种数就是排列数 P_n^3。

下面来计算有多少种不同的填法。

完成这件工作(填满 3 个空)可以分为三个步骤：

第一步，先填第一个位置。可以从 n 个元素中任选一个，有 n 种方法。

第二步，填第二个位置。此时剩下$(n-1)$个元素，从中任选一个，共有$(n-1)$种方法。

第三步，填第三个位置，此时剩下$(n-2)$个元素，从中任选一个，共有$(n-2)$种方法。

根据乘法原理，得到排列数为 $P_n^3=n(n-1)(n-2)$。

一般地，求 P_n^m，可以这样来考虑：假定有排好顺序的 m 个空位，从 n 个不同元素 a_1、a_2、…、a_n 中任意逐个抽取 m 个元素去填空，一个空位填一个元素，每一种填法就得到一个排列；反过来，任一个排列总可以由一种填法得到，因此，所有不同填法的种数就是排列数 P_n^m。

此时第一位置有 n 种填法，第二位置有$(n-1)$种填法，…第 m 位置有$(n-m+1)$种填法（注意这里是 $n-m+1$ 而不是 $n-m$）。

根据乘法原理，填满 m 个空位共有 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$种填法，由此得到

$$P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

这里 n、$m\in\mathbf{N}$，且 $m\leqslant n$，这个公式称为**排列数公式**

只要掌握规律，这个公式是很好记的：一共有 m 个数相乘，最大的是 n，以后逐个减 1，最后一个是 $n-m+1$。

特别地，当全排列时有

$$P_n^m=n(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1$$

它是 1 到 n 的连乘积，称作 n 的**阶乘**，用 $n!$ 表示，即有 $P_n^n=n!$。

有了阶乘后，排列数公式，在形式上可作如下简化：

$P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)\cdot(n-m)\cdots\cdot 2\cdot 1}{(n-m)\cdots\cdot 2\cdot 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!}$$

一般地，在含字母的运算中，这个公式写起来简便一些。

为了使这个公式在 $m=n$ 时也成立，规定

$$0! = 1$$

例 0-4 从柳州到桂林共有 23 个火车站，共需要准备多少种普通客票？

解 因为每一张车票上有起始站和终到站，所以对应着 2 个车站的一个排列，因此需要准备的车票种数，就是

$$P_{23}^{2} = 23 \times 22 = 506(\text{种})$$

例 0-5 某信号兵用红、黄、绿三面旗子从上到下挂在旗杆上，以表示信号，每次可以任挂一面、二面或三面，并且不同的顺序表示不同的信号，一共可以表示多少种不同的信号？

解 先考虑只挂一面旗时，则有 P_3^1 种；

再考虑挂二面旗时，则有 P_3^2 种；

最后考虑挂三面旗时，则有 P_3^3 种。

根据加法原理，所求的信号种数是

$$P_3^1 + P_3^2 + P_3^3 = 15$$

例 0-6 用 0 到 9 这十个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

分析 组成三位数，一般理解 0 不能在百位上，所以 0 这个数与其他 9 个数的地位并不相同，也就是 0 的地位很特殊，解决问题应当抓住关键。

解法一 既然 0 不能在百位，所以从百位考虑起，这时有 P_9^1 种。十位和个位上的数字可以从余下的九个数字中任选两个，有 P_9^2 种，根据乘法原理，所求的三位数的个数是

$$P_9^1 \cdot P_9^2 = 9 \times 9 \times 8 = 648$$

解法二 先不管是不是0,求出这十个数字中任取3个数字的排列数,然后再去掉以0为首的,因此所求三位数的个数是

$$P_{10}^3 - P_9^2 = 648$$

解法三 按照0出现情况来分类,一类是没有0的,共P_9^3,一类是0在个位上,共$9 \times 8 \times 1 = P_9^2$,一类是0在十位上,共$9 \times 1 \times 8 = P_9^2$。

根据加法原理,符合条件的三位数共有

$$P_9^3 + P_9^2 + P_9^2 = 648$$

习 题 0-2

1. 写出从5个元素a、b、c、d、e中,每次取出两个元素的所有排列。

2. 计算:

(1) P_6^3 (2) P_5^5 (3) $9P_8^4 - 2P_8^5$

3. 某航空公司开通9个城市之间的直达航班,问共有多少种飞机票?

4. 6个人排成一排,有多少种不同的排法?

5. 由1、2、3、4、5、6这6个数字能组成多少个没有重复数字的三位数?

6. 由0、1、2、3、4、5这6个数字能组成多少个没有重复数字的三位数?

7. 以2为首的7位数的电话号码,共有多少个?

8. 有4个小电灯泡排成一排,每个灯泡有亮和不亮两种状态,总共可以表示多少种不同信号?

9. 有8个不同的产品,每次取一件,连续取三次,问:

(1) 每次取出一件产品,不再放回,有几种取法?

(2) 每次取出一件产品,取后放回,有几种取法?

3. 组合

我们再来看例 0-1,如果问:有多少种不同的票价?根据常识,我们知道火车上行与下行的票价是一样的,即上海—北京与北京—上海是一样的,也就是与顺序无关。它有别于排列,是一类新的问题,它是从三个不同的元素中,任取两个,不管怎样的顺序,并成一组,求一共有多少个不同的组,这种问题称为组合问题。

一般地说,从 n 个不同的元素中,任取 $m(m\leqslant n)$个元素并成一组,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**组合**。

由此看出,组合与排列的根本区别在于,是否与顺序有关,这点必须牢牢记住。

在组合问题中,我们关心的依然是不同的组合有多少种,为此先引入概念:

从 n 个不同元素中,取出 $m(m\leqslant n)$个元素的所有组合的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**组合数**,用符号 C_n^m 表示(C 是“组合”一词英文 Combination 的第一个字母)。

三个城市之间的火车票价的组合数就是

$$C_3^2=3$$

如何来计算 C_n^m 呢?

具体排出来,仍是一个方法,尤其是当 n 比较小时,如 a、b、c、d 4 个元素,每次取出一个元素的所有组合为 a、b、c、d,即 $C_4^1=4$。

每次取出两个元素的所有组合:此时可考虑先以 a 为主,有 ab、ac、ad,再以 b 为主,有 bc、bd,注意由于 ab 与 ba 是同一个组合,所以这里没有 ba,再以 c 为主有 cd,共有 6